Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

С.М. Бородич, Т.В. Кавитова

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73
Б83

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 25.06.2024.

Авторы: старший преподаватель кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова **С.М. Бородич;** учитель математики ГУО «Средняя школа № 42 г. Витебска имени Д.Ф. Райцева», кандидат физико-математических наук **Т.В. Кавитова**

Научный редактор:
доцент кафедры прикладного и системного программирования
ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук,
доцент *С.А. Шлапаков*

Рецензент:
старший преподаватель кафедры математики
и информационных технологий УО «ВГТУ» *А.В. Коваленко*

Бородич, С.М.

Б83 Функциональный анализ : курс лекций / С.М. Бородич, Т.В. Кавитова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 52 с.

Данное учебное издание содержит теоретический материал и примеры, способствующие лучшему усвоению основных идей и методов функционального анализа.

Предназначается для студентов первой и второй ступеней высшего образования, обучающихся на факультете математики и информационных технологий.

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Функциональный анализ» играет весьма важную роль в системе математической подготовки современного специалиста. Сегодня идеи и методы функционального анализа применяются почти во всех сферах математики и смежных областях науки.

Настоящее учебное издание адресуется прежде всего студентам первой и второй ступеней высшего образования, обучающимся на факультете математики и информационных технологий. Цель – ознакомление с понятиями, фактами и методами, составляющими теоретические основы функционального анализа.

Курс лекций состоит из трех разделов: «Мера Лебега. Интеграл Лебега», «Метрические пространства» и «Нормированные пространства». Кроме теоретического материала каждый раздел содержит примеры, способствующие лучшему усвоению основных идей функционального анализа. Значительная часть приводимых авторами утверждений сопровождена доказательствами. В конце издания дан список литературы, изучение которой поможет студентам подробнее разобраться в отдельных вопросах курса.

§ 1. МЕРА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

1. Системы множеств

Пусть X – произвольное непустое множество.

Определение 1. Непустая система $\mathcal{R}$ подмножеств множества X называется *кольцом*, если она замкнута относительно операций пересечения и симметрической разности, т. е. для любых $A, B \in \mathcal{R}$ выполнено:

1) $A \cap B \in \mathcal{R}$,

2) $A \Delta B \in \mathcal{R}$.

(Напомним, что $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).

Предложение 1. Если $\mathcal{R}$ – кольцо, то $\varnothing \in \mathcal{R}$ и для любых $A, B \in \mathcal{R}$

$$A \cup B \in \mathcal{R}, \ \ A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Доказательство. Эти утверждения вытекают из равенств

$$\varnothing = A \Delta A, \qquad A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \Delta B), \qquad A \setminus B = A \cap (A \Delta B). \ \blacktriangleleft$$

Пример 1. Пусть $\mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств множества X. Очевидно, что $\mathcal{P}(X)$ является кольцом.

Определение 2. Кольцо $\mathcal{R}$ называется σ-*кольцом*, если оно замкнуто относительно операции счётного объединения, т. е.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R},$$

если $A_k \in \mathcal{R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Предложение 2. Любое σ-кольцо замкнуто относительно операции счётного пересечения.

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ – σ-кольцо, $A_k \in \mathcal{R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=2}^{\infty} (A_1 \cap A_k) = A_1 \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_k) \in \mathcal{R}. \ \blacktriangleleft$$

Определение 3. Кольцо $\mathcal{R}$ подмножеств множества X называется *алгеброй*, если $X \in \mathcal{R}$.

Таким образом, если $\mathcal{R}$ – алгебра, то для любого $A \in \mathcal{R}$ следует, что $X \setminus A \in \mathcal{R}$, т. е. алгебра замкнута относительно операции перехода к дополнениям.

Определение 4. Кольцо $\mathcal{R}$, являющееся одновременно алгеброй и σ-кольцом, называется σ-*алгеброй*.

Непосредственно из определения кольца множеств вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пересечение любого множества колец является кольцом.

Теорема 2. Для любой непустой системы S подмножеств множества X существует одно и только одно кольцо $\mathcal{R}(S)$, содержащее S и содержащееся в любом другом кольце, содержащем S. Кольцо $\mathcal{R}(S)$ называется *минимальным кольцом* над S или *кольцом, порожденным* S.

Доказательство. Пусть Σ – множество всех колец, содержащих S. Поскольку множество $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств множества X является кольцом (пример 1) и содержит S, то множество Σ не пусто. В силу теоремы 1 пересечение всех колец, входящих в Σ является кольцом. Очевидно, это кольцо и является минимальным кольцом над S. ◄

Отметим, что явное построение минимального кольца $\mathcal{R}(S)$, порождённого системой S, может оказаться достаточно трудной задачей. Поэтому выделяют такие системы S, для которых кольца $\mathcal{R}(S)$ строятся наиболее просто.

В дальнейшем символом $\coprod$ будем обозначать объединение попарно непересекающихся множеств (*дизъюнктивное объединение*). Например, для множеств A_k $(k=1,2,\ldots)$ под записью $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ понимаем их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, подразумевая при этом, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Определение 5. Непустая система S подмножеств множества X называется *полукольцом*, если $\varnothing \in S$ и для любых $A, B \in S$ выполнено:

1) $A \cap B \in S$,

2) существует такой конечный набор множеств $A_k \in S$ $(k=1,\ldots,n)$, что $A \setminus B = \coprod\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Замечание. Очевидно, что любое кольцо множеств является полукольцом.

Пример 2. Совокупность всех ограниченных полуинтервалов вида $[a,b)$ на прямой **R** (включая "пустой полуинтервал" $[a,a)$) образует полукольцо, но не кольцо.

Пример 3. Множество всех ограниченных промежутков вида (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ и $(a,b]$ на прямой **R**, включая одноточечные промежутки вида $[a,a]$ и "пустой интервал" (a,a), образует полукольцо, не являющееся кольцом.

Пример 4. Полукольцом является совокупность всех множеств на плоскости (x, y), каждое из которых определяется одним из неравенств вида

$$a \le x \le b, \quad a \le x < b, \quad a < x \le b, \quad a < x < b$$

и одним из неравенств вида

$$c \le y \le d, \quad c \le y < d, \quad c < y \le d, \quad c < y < d,$$

где a, b, c, d – произвольные действительные числа. Такие множества будем называть *прямоугольниками*. Заметим, что определенные таким образом прямоугольники могут не являться прямоугольниками в обычном смысле. Например, прямоугольник, определенный неравенствами

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d,$$

является:

- прямоугольником в обычном смысле (вместе с границей), если $a < b$ и $c < d$;
- отрезком, если $a = b$ и $c < d$ или $a < b$ и $c = d$;
- точкой, если $a = b$ и $c = d$;
- пустым множеством, если $a > b$ или $c > d$.

Очевидно, что полукольцо прямоугольников кольцом не является.

В случае, когда система множеств является полукольцом, построение минимального кольца над ней становится вполне обозримым. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть S – полукольцо. Тогда минимальное кольцо $\mathcal{R}(S)$ состоит из множеств, являющихся конечными объединениями попарно непересекающихся множеств из S, т. е.

$$\mathcal{R}(S) = \{A \mid A = \coprod_{k=1}^{n} A_k,\ A_k \in S\}.$$

2. Мера на полукольце

Пусть X – множество, S – некоторое полукольцо его подмножеств.

Определение 1. Говорят, что на полукольце S задана *мера* m, если для каждого множества $A \in S$ определено вещественное число $m(A)$ таким образом, что выполнены следующие условия:

1) $m(A) \ge 0$ для любого $A \in S$ (*неотрицательность*);

2) если $A, A_k \in S$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, то $m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$ (*аддитивность*).

Таким образом, мера m является вещественной функцией множества, заданной на S, т. е. $m : S \to \mathbf{R}$.

Отметим некоторые свойства меры на полукольце.

Теорема 1. Пусть S – полукольцо и m – мера на нем. Тогда

1) $m(\varnothing)=0$;

2) если $A, A_k \in S \ \ (k=1,\ldots,n)$ и $\coprod\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k) \le m(A)$;

3) если $A, A_k \in S \ \ (k=1,\ldots,n)$ и $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, то $m(A) \le \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$ (*конечная полуаддитивность*).

Пример 1. Пусть S – полукольцо промежутков из примера 3 п. 1. Зададим на S функцию m, ставящую в соответствие каждому промежутку его длину:

$$m((a,b)) = m([a,b]) = m([a,b)) = m((a,b]) = b-a. \tag{1}$$

Очевидно, что функция m является мерой на полукольце S.

Пример 2. Рассмотрим полукольцо S прямоугольников из примера 4 п. 1. Определим на S функцию m следующим образом:

а) $m(\varnothing)=0$,

б) если прямоугольник $P \ne \varnothing$ определяется числами a, b, c и d, то

$$m(P) = (b-a)(d-c) \tag{2}$$

(т. е. для прямоугольника P, являющегося прямоугольником в обычном смысле, $m(P)$ – его площадь). Функция m является мерой на полукольце S.

Пример 3. Пусть S – полукольцо полуинтервалов из примера 2 п. 1 и $F(x)$ – некоторая неубывающая на **R** функция. Зададим на S функцию m_F, положив

$$m_F([a,b)) = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Очевидно, что m_F – неотрицательная функция. Установим ее аддитивность. Пусть

$$[a,b) = \coprod_{k=1}^{n} [a_{k-1}, a_k),$$

где $a_0 = a, \ \ a_n = b, \ \ a_{k-1} < a_k \ \ (k=1,\ldots,n)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} m_F([a_{k-1}, a_k)) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \big(F(a_k) - F(a_{k-1})\big) \ = \ F(a_n) - F(a_0) \ = \ m_F([a,b)).$$

Таким образом, m_F является мерой на полукольце S.

Определение 2. Мера m на полукольце S, называется σ-*аддитивной* (*счетно-аддитивной*), если для любых $A, A_k \in S \ \ (k=1,2,\ldots)$ таких, что $A = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, имеет место равенство

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Теорема 2. Мера m, заданная на полукольце S, σ-аддитивна тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством: если $A, A_k \in S$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$m(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Это свойство меры называется σ-*полуаддитивностью* (*счетной полуаддитивностью*).

Отметим, что проверить счетную полуаддитивность меры бывает чаще проще, чем установить ее σ-аддитивность.

Теорема 3. Мера m, заданная на полукольце S всех ограниченных промежутков числовой прямой формулой (1), σ-аддитивна.

Доказательство. Установим счетную полуаддитивность меры m. Тем самым, согласно теореме 2, будет доказана ее σ-аддитивность. Пусть

$$I, I_k \in S \ (k = 1, 2, \ldots), I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Предполагаем, что $m(I) \ne 0$ (иначе справедливость доказываемого неравенства для мер очевидна). Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, что существуют такой отрезок $[\alpha, \beta] \subset I$ и такие открытые интервалы $(\alpha_k, \beta_k) \supset I_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$m([\alpha, \beta]) \ge m(I) - \varepsilon/2, \qquad m((\alpha_k, \beta_k)) \le m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Заметим, что

$$[\alpha, \beta] \subset I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k),$$

т. е. отрезок $[\alpha, \beta]$ покрыт системой открытых интервалов (α_k, β_k). В силу леммы Гейне – Бореля (см., например, [4]) существует такое N, что

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k).$$

Отсюда, учитывая свойство конечной полуаддитивности меры m (см. теорему 1), получаем

$$m([\alpha, \beta]) \le \sum_{k=1}^{N} m((\alpha_k, \beta_k)).$$

Следовательно,

$$m(I) \ \le \ m([\alpha, \beta]) + \frac{\varepsilon}{2} \ \le \ \sum_{k=1}^{N} m((\alpha_k, \beta_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \ \le \ \sum_{k=1}^{\infty} m((\alpha_k, \beta_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \ \le$$

$$\le \ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$m(I) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k). \blacktriangleleft$$

Аналогично устанавливается счетная аддитивность меры m, заданной формулой (2) на полукольце S прямоугольников на плоскости.

Укажем пример меры на полукольце, не обладающей свойством σ-аддитивности.

Пример 4. Пусть $X = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ – множество всех рациональных чисел, принадлежащих отрезку $[0,1]$, S – полукольцо, состоящее из пересечений $\mathbf{Q}$ с произвольными промежутками вида (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ и $(a,b]$, где $0 \le a \le b \le 1$. Для каждого множества $I_{ab} \in S$, определяемого числами a и b, положим

$$m(I_{ab}) = b - a.$$

Нетрудно видеть, что m – мера на S. Пусть $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Заметим, что $\{r_k\} \in S$ и $m(\{r_k\}) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. С другой стороны, $X \in S$, $X = \coprod_{k=1}^{\infty} \{r_k\}$ и $m(X) = 1$. Поскольку

$$1 = m(X) \ne \sum_{k=1}^{\infty} m(r_k) = 0,$$

мера m σ-аддитивной не является.

Приведем формулировку теоремы о σ-аддитивности меры m_F из примера 3.

Теорема 4. Пусть $S = \{[a,b) \mid a \le b\}$ – полукольцо всех открытых справа ограниченных интервалов числовой прямой, $F(x)$ – неубывающая на $\mathbf{R}$ функция и m_F – мера на S, заданная формулой (3). Мера m_F σ-аддитивна тогда и только тогда, когда $F(x)$ непрерывна слева на $\mathbf{R}$.

3. Продолжение меры с полукольца на кольцо, минимальное над ним

Определение 1. Пусть m – мера, заданная на полукольце S. Мера m_1, заданная на полукольце S_1, называется *продолжением* меры m, если

1) $S \subset S_1$,

2) $m_1(A) = m(A)$ для любого $A \in S$.

Пусть $\mathcal{R}(S)$ – минимальное кольцо, порожденное полукольцом S. Согласно теореме 3 из пункта 1, любое множество $A \in \mathcal{R}(S)$ представимо в виде

$$A=\coprod_{k=1}^{n} A_k, \text{ где } A_k \in S.$$

Таким образом, если на $\mathcal{R}(S)$ существует мера m_1, являющаяся продолжением меры m, заданной на S, то должно выполняться равенство

$$m_1(A)=\sum_{k=1}^{n} m(A_k). \tag{4}$$

Заметим, что сумма в правой части этого равенства не зависит от способа представления множества A в виде дизъюнктивного объединения множеств полукольца S. Действительно, если $A=\coprod_{k=1}^{n} A_k=\coprod_{j=1}^{l} B_j$, где $A_k, B_j \in S$, то $A_k=\coprod_{j=1}^{l}(A_k \cap B_j)$, $B_j=\coprod_{k=1}^{n}(A_k \cap B_j)$, и следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} m(A_k \cap B_j) = \sum_{j=1}^{l} m(B_j).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть m – мера, заданная на полукольце S, $\mathcal{R}(S)$ – минимальное кольцо, порожденное S. Тогда на $\mathcal{R}(S)$ существует единственная мера m_1, являющаяся продолжением меры m, и эта мера задается формулой (4). Если исходная мера m σ-аддитивна, то и ее продолжение m_1 будет σ-аддитивной мерой.

Замечание. Поскольку любое кольцо является полукольцом, то в силу теоремы 2 п. 3 σ-аддитивная мера m_1 обладает также свойством σ-полуаддитивности: если $A, A_k \in \mathcal{R}(S)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $A\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$m_1(A)\le \sum_{k=1}^{\infty} m_1(A_k).$$

4. Лебегово продолжение меры

Согласно теореме 1 п. 3, каждая мера m, заданная на полукольце S, имеет продолжение на минимальное над S кольцо $\mathcal{R}(S)$. Оказывается, что в случае σ-аддитивности меры m, ее можно продолжить на более широкий, чем кольцо $\mathcal{R}(S)$, класс множеств. Это можно сделать с помощью так называемого лебегова продолжения.

Случай $\boldsymbol{X \in \mathcal{R}(S)}$**.** Пусть X – множество, S – некоторое полукольцо его подмножеств и m – σ-аддитивная мера на S. Предполагаем, что

$X \in \mathcal{R}(S)$. В этом случае $\mathcal{R}(S)$ является алгеброй с заданной на ней σ-аддитивной мерой m_1 – продолжением меры m.

Определение 1. Пусть $A \subset X$. *Внешней мерой* множества A называется число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k m(A_k),$$

где нижняя грань берется по всем таким конечным или счетным системам множеств $A_k \in S$, что $A \subset \bigcup_k A_k$.

Замечание. Если в определении 1 вместо систем множеств $A_k \in S$ рассматривать всевозможные конечные или счетные системы множеств $A_k \in \mathcal{R}(S)$, заменив при этом меру m на ее продолжение на $\mathcal{R}(S)$ – меру m_1, то определяемое значение $\mu^*(A)$ будет тем же. Действительно, ведь кольцо $\mathcal{R}(S)$ состоит из всевозможных конечных дизъюнктивных объединений множеств полукольца S.

Предложение 1. Пусть $A \in \mathcal{R}(S)$. Тогда $\mu^*(A) = m_1(A)$.

Доказательство. Поскольку $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_k \in S$, то

$$m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq \mu^*(A).$$

Справедливость противоположного неравенства $m_1(A) \leq \mu^*(A)$ очевидна ввиду σ-полуаддитивности меры m_1 (см. замечание в конце п. 3). ◄

Определение 2. Множество $A \subset X$ называется *измеримым* (*по Лебегу*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{R}(S)$, что

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(S, m)$ совокупность всех измеримых по Лебегу множеств. Очевидно, что все множества из $\mathcal{R}(S)$ измеримы, т. е. $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{L}(S, m)$.

Предложение 2. Если $\mu^*(A) = 0$, то A – измеримое множество.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмём $B = \varnothing$. Тогда

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon. \text{ ◄}$$

Имеет место следующий критерий измеримости множества.

Теорема 1. Множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу в том и только том случае, если

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

Можно доказать, что совокупность $\mathcal{L}(S,m)$ измеримых по Лебегу множеств замкнута относительно операций конечных или счётных объединений и пересечений, а внешняя мера μ^*, рассматриваемая только на множествах из $\mathcal{L}(S,m)$, обладает свойством σ-аддитивности.

Определение 3. *Мерой Лебега* $\mu(A)$ измеримого множества A называется его внешняя мера: $\mu(A)=\mu^*(A)$.

Приведенные выше факты позволяют сформулировать теорему о продолжении меры по Лебегу.

Теорема 2. Совокупность $\mathcal{L}(S,m)$ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру, а мера Лебега μ является продолжением меры m_1 на σ-алгебру $\mathcal{L}(S,m)$ и является σ-аддитивной мерой.

Отметим следующее свойство меры Лебега, называемое непрерывностью.

Теорема 3. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ – убывающая последовательность измеримых множеств и $A=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

Следствие. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ – возрастающая последовательность измеримых множеств и $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

Случай $\boldsymbol{X \notin \mathcal{R}(S)}$**.** Выше мы рассмотрели построение меры Лебега в предположении, что $X\in\mathcal{R}(S)$. Это условие в ряде случаев оказывается слишком сильным. Его можно заменить более слабым, расширив при этом понятие измеримости множества и допустив бесконечные значения для меры.

Рассмотрим важный с практической точки зрения случай так называемой σ-конечной меры.

Определение 4. Мера m, заданная на полукольце S подмножеств множества X, называется σ-*конечной*, если

$$X=\coprod_{k=1}^{\infty} X_k,\ \text{где}\ X_k\in S. \tag{5}$$

Пример. Пусть $X=\mathbf{R}$, $S=\{[a,b)\mid a\le b\}$ – полукольцо подмножеств множества X с заданной на нем мерой $m([a,b))=b-a$. Поскольку

$$\mathbf{R} = \coprod_{k=-\infty}^{+\infty}[k, k+1),$$

то m – σ-конечная мера.

Итак, пусть m – σ-аддитивная и σ-конечная мера, определенная на полукольце S подмножеств множества X. Таким образом, для X имеет место представление (5). Для каждого множества X_k строится лебегово продолжение меры, т. е. повторяются описанные выше рассуждения и построения с заменой X на X_k и S на $S_k = \{B \cap X_k \mid B \in S\}$.

Определение 5. Множество $A \subset X$ называется *измеримым* (*по Лебегу*) относительно σ-конечной меры m, если измеримы все множества $A_k = A \cap X_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При этом *мера Лебега* $\mu(A)$ множества A определяется как сумма ряда:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

Если этот ряд расходится, то полагают $\mu(A) = +\infty$.

Замечание. Нетрудно установить справедливость следующих утверждений:

1. Продолженная мера μ и класс измеримых множеств не зависят от способа представления множества X в виде (5).

2. Измеримые множества по-прежнему (как и в случае $X \in \mathcal{R}(S)$) образуют σ-алгебру, а определенная на ней мера μ является σ-аддитивной.

Пусть S – полукольцо ограниченных промежутков на прямой $\mathbf{R}$, в качестве меры на котором рассматривается длина промежутка (см. пример 1 из пункта 2). Лебегово продолжение этой меры называется *мерой Лебега на прямой*.

Если S – полукольцо, образованное прямоугольниками в $\mathbf{R}^2$, и мера на S задана как площадь прямоугольника (пример 2 из пункта 2), то лебегово продолжение этой меры называется *мерой Лебега на плоскости*.

Аналогично определяется мера Лебега в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Построение меры на прямой можно также начать с меры m_F, заданной на полукольце $S = \{[a,b) \mid a \le b\}$ формулой

$$m_F([a,b)) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая неубывающая, непрерывная слева функция на $\mathbf{R}$. В силу теоремы 4 п. 2 мера m_F σ-аддитивна. Лебегово продолжение этой меры называется *мерой Лебега – Стилтьеса*.

Определение 6. Пусть Σ – σ-алгебра подмножеств множества X и μ – σ-аддитивная мера на ней. Мера μ называется *полной*, если из того, что

$A \in \Sigma$ и $\mu(A) = 0$, следует, что любое подмножество B множества A принадлежит Σ (очевидно, что при этом $\mu(B) = 0$).

Нетрудно видеть (с учетом предложения 2), что лебегово продолжение является полной мерой.

5. Измеримые функции

Пусть X – множество, Σ – σ-алгебра его подмножеств и μ – σ-аддитивная полная мера на ней. В качестве Σ может быть взята σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств, а в качестве μ – мера Лебега (см. пункт 4). В общем случае элементы σ-алгебры Σ будем также называть измеримыми множествами.

Пусть E – некоторое измеримое множество.

Определение 1. Функция $f : E \to \mathbf{R}$ называется *измеримой* на множестве E, если для любого $c \in \mathbf{R}$ множество $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ измеримо.

Предложение 1. Если функция $f : E \to \mathbf{R}$ измерима на множестве E, то для любого $c \in \mathbf{R}$ множества

$$\{x \in E \mid f(x) \le c\}, \qquad \{x \in E \mid f(x) > c\}, \qquad \{x \in E \mid f(x) \ge c\} \tag{6}$$

измеримы.

Доказательство. Поскольку σ-алгебра замкнута относительно операции счетного пересечения, то

$$\{x \in E \mid f(x) \le c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) < c + \frac{1}{k}\} \in \Sigma,$$

т. е. множество $\{x \in E \mid f(x) \le c\}$ измеримо. Измеримость остальных множеств вытекает из равенств

$$\{x \in E \mid f(x) > c\} = E \setminus \{x \in E \mid f(x) \le c\}, \ \{x \in E \mid f(x) \ge c\} = E \setminus \{x \in E \mid f(x) < c\}$$

и замкнутости Σ относительно операции разности. ◄

Следствие. Для измеримой на множестве E функции f измеримыми являются также все множества вида

$$\{x \in E \mid a < f(x) < b\}, \qquad \{x \in E \mid a \le f(x) \le b\}, \qquad \{x \in E \mid a \le f(x) < b\},$$

$$\{x \in E \mid a < f(x) \le b\}, \qquad \{x \in E \mid f(x) = a\}.$$

Замечание. Легко видеть, что если хотя бы одно из множеств (6) измеримо при любом $c \in \mathbf{R}$, то функция f измерима на E. Например, если предположить, что при любом $c \in \mathbf{R}$ измеримо множество $\{x \in E \mid f(x) \le c\}$, то измеримость множества $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ следует из равенства

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) \le c - \frac{1}{k}\}.$$

Таким образом, заменив в определении 1 множество $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ на одно из множеств (6), получим эквивалентное определение измеримой на множестве E функции.

Теорема 1. Пусть функция $f: E \to \mathbf{R}$ измерима на множестве E, а числовая функция φ непрерывна на открытом множестве G, содержащем множество значений функции f. Тогда сложная функция $h(x) = \varphi(f(x))$ является измеримой на множестве E.

Доказательство. В силу непрерывности функции φ множество $\{t \in G \mid \varphi(t) < c\} \subset \mathbf{R}$ открыто. По теореме о структуре открытого множества на числовой прямой (см., например, [7]) это множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов I_k (среди которых могут быть бесконечные):

$$\{t \in G \mid \varphi(t) < c\} = \coprod_k I_k.$$

Следовательно,

$$\{x \in E \mid h(x) < c\} = \coprod_k \{x \in E \mid f(x) \in I_k\}.$$

В силу предложения 1 и его следствия все множества $\{x \in E \mid f(x) \in I_k\}$ измеримы. Поэтому множество $\{x \in E \mid h(x) < c\}$ также измеримо. ◄

Следствие. Если $f: E \to \mathbf{R}$ – измеримая на множестве E функция, то измеримыми на E являются также следующие функции:

1) $a \cdot f + b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, 2) $|f|$, 3) f^2,

4) $1/f$ (при условии, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \in E$).

Теорема 2. Пусть $f: E \to \mathbf{R}$ и $g: E \to \mathbf{R}$ – измеримые на множестве E функции. Тогда множество $\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ измеримо.

Доказательство. Пусть $x \in E$ и $f(x) < g(x)$. Тогда найдется такое рациональное число r, что $f(x) < r < g(x)$. Отсюда следует, что

$$\{x \in E \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{r_k \in \mathbf{Q}} \left(\{x \in E \mid f(x) < r_k\} \cap \{x \in E \mid g(x) > r_k\}\right).$$

В силу предложения 1 множества $\{x \in E \mid g(x) > r_k\}$ измеримы. Таким образом, множество $\{x \in E \mid f(x) < g(x)\}$ является счетным объединением измеримых множеств, а значит, оно измеримо. ◄

Следующая теорема утверждает, что совокупность всех измеримых на множестве E функций, замкнута относительно арифметических операций.

Теорема 3. Пусть функции $f: E \to \mathbf{R}$ и $g: E \to \mathbf{R}$ измеримы на множестве E. Тогда измеримыми на E являются также функции $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, а если $g(x) \neq 0$ для всех $x \in E$, то и функция f/g.

Доказательство. 1) Имеем

$$\{x \in E \mid f(x) + g(x) < c\} = \{x \in E \mid f(x) < -g(x) + c\}.$$

Поскольку функция $-g(x) + c$ измерима на E (см. следствие из теоремы 1), то в силу теоремы 2 множество $\{x \in E \mid f(x) < -g(x) + c\}$ измеримо. Таким образом, измеримым является и множество $\{x \in E \mid f(x) + g(x) < c\}$, т. е. сумма $f + g$ измерима на множестве E.

2) Так как $f - g = f + (-g)$, то измеримость разности $f - g$ вытекает из 1) и следствия из теоремы 1.

3) Воспользуемся тождеством

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

В силу 1), 2) и следствия из теоремы 1 стоящее справа выражение является измеримой на E функцией. Следовательно, $f \cdot g$ – измеримая на E функция.

4) Измеримость частного f/g (при условии $g(x) \neq 0$) следует из 3) и следствия из теоремы 1. ◄

Определение 2. Функции $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : E \to \mathbf{R}$ называются *эквивалентными* на множестве E (обозначение: $f \sim g$), если

$$\mu\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

В этом случае также говорят, что функции f и g *равны (совпадают) почти всюду* на множестве E.

Теорема 4. Пусть функции $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : E \to \mathbf{R}$ эквивалентны на множестве E и f – измеримая на E функция. Тогда функция g также измерима на множестве E.

Доказательство. Пусть $A = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$. Для любого $c \in \mathbf{R}$ имеем

$$\{x \in E \mid g(x) < c\} = \left(\{x \in E \mid f(x) < c\} \setminus A\right) \cup \{x \in A \mid g(x) < c\}.$$

Множества $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ и A измеримы по условию теоремы. Поскольку $\{x \in A \mid g(x) < c\} \subset A$ и $\mu(A) = 0$, то в силу полноты меры μ множество $\{x \in A \mid g(x) < c\}$ также измеримо. Следовательно, $\{x \in E \mid g(x) < c\}$ – измеримое множество, и значит, функция g измерима на множестве E. ◄

Ниже мы рассмотрим несколько важных утверждений, относящихся к последовательностям измеримых функций. При этом будем использовать различные виды сходимости функциональных последовательностей.

Определение 3. Последовательность функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ *сходится поточечно* на множестве E к функции $f : E \to \mathbf{R}$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in E$.

Определение 4. Последовательность функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ *сходится равномерно* на множестве E к функции $f : E \to \mathbf{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что при $n \ge n_\varepsilon$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется для любого $x \in E$.

Определение 5. Последовательность функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ *сходится почти всюду* на множестве E к функции $f : E \to \mathbf{R}$, если существует такое измеримое множество $A \subset E$, что $\mu(A) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in E \setminus A$.

Определение 6. Последовательность измеримых на множестве E функций f_n *сходится по мере* к измеримой на E функции f, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \sigma\} = 0.$$

Теорема 5. Пусть последовательность измеримых на множестве E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится поточечно к функции $f : E \to \mathbf{R}$. Тогда f – измеримая на E функция.

Доказательство. Пусть $x \in E$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, выполнение неравенства $f(x) < c$ равносильно выполнению следующего условия: существуют такие $k \in \mathbf{N}$ и $m \in \mathbf{N}$, что для любого $n \ge m$ выполняется неравенство $f_n(x) < c - 1/k$. Таким образом,

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \bigcup_{m\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\ge m} \{x \in E \mid f_n(x) < c - \frac{1}{k}\}.$$

Так как f_n – измеримые на E функции, то множества $\{x \in E \mid f_n(x) < c - \frac{1}{k}\}$ измеримы, а значит, измеримы и их счетные объединения и пересечения. Поэтому множество $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ измеримо, и следовательно, f – измеримая на множестве E функция. ◄

Следствие. Пусть последовательность измеримых на E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится почти всюду к функции $f : E \to \mathbf{R}$. Тогда функция f измерима на множестве E.

Доказательство. Согласно определению 5 существует такое измеримое множество $A \subset E$, что $\mu(A) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in E \setminus A$. Для любого $c \in \mathbf{R}$ имеем

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = \{x \in E \setminus A \mid f(x) < c\} \cup \{x \in A \mid f(x) < c\}.$$

Очевидно, что функции $f_n : E \setminus A \to \mathbf{R}$ измеримы на множестве $E \setminus A$. Поэтому в силу теоремы 5 функция $f : E \setminus A \to \mathbf{R}$ также измерима на $E \setminus A$, и значит, измеримо множество $\{x \in E \setminus A \mid f(x) < c\}$. Заметим также, что множество $\{x \in A \mid f(x) < c\}$ является подмножеством множества A, имеющего нулевую меру, и следовательно (в силу полноты меры μ), тоже измеримо. Таким образом, $\{x \in E \mid f(x) < c\}$ – измеримое множество, т. е. функция f измерима на множестве E. ◄

Определение 7. Функция $f: E \to \mathbf{R}$ называется *простой* на множестве E, если она измерима и принимает конечное или счетное число различных значений.

Предложение 2. Функция $f: E \to \mathbf{R}$, принимающая не более чем счетное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, является измеримой на множестве E (а значит, и простой) в том и только том случае, если все множества $\{x \in E \mid f(x) = y_k\}$ измеримы.

Доказательство. Если f – измеримая на E функция, то в силу следствия предложения 1 множества $\{x \in E \mid f(x) = y_k\}$ измеримы. Обратно, пусть измеримы все множества $\{x \in E \mid f(x) = y_k\}$. Тогда для любого $c \in \mathbf{R}$

$$\{x \in E \mid f(x) < c\} = \bigcup_{y_k < c} \{x \in E \mid f(x) = y_k\} \in \Sigma,$$

и следовательно, функция f измерима на множестве E. ◄

Теорема 6. Пусть $f: E \to \mathbf{R}$ – измеримая на множестве E функция. Тогда существует последовательность простых функций $f_n: E \to \mathbf{R}$, сходящаяся к функции f равномерно на E.

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ определим функцию $f_n: E \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$f_n(x) = m/n, \text{ если } m/n \le f(x) < (m+1)/n \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

Заметим, что

$$\{x \in E \mid f_n(x) = m/n\} = \{x \in E \mid m/n \le f(x) < (m+1)/n\} \in \Sigma,$$

т. е. множества $\{x \in E \mid f_n(x) = m/n\}$ измеримы. Следовательно (в силу предложения 2), функции f_n являются простыми. Кроме того, для любого $x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| < 1/n,$$

откуда вытекает равномерная на E сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f. ◄

Рассмотрим некоторые соотношения между различными видами сходимости последовательностей измеримых функций. Следующая теорема устанавливает связь между сходимостью почти всюду и равномерной сходимостью.

Теорема 7 (Егоров). Пусть E – множество конечной меры и последовательность измеримых на E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится почти всюду к функции $f : E \to \mathbf{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, что

1) $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$;

2) на множестве $E \setminus E_\varepsilon$ последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно.

Следствие. Пусть E – множество конечной меры и последовательность измеримых на E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится почти всюду к функции $f : E \to \mathbf{R}$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к той же самой предельной функции f по мере.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\sigma > 0$. В силу следствия из теоремы 5 функция f измерима на E. С учетом этого легко устанавливается измеримость множеств $E_n(\sigma) = \{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| \ge \sigma\}$.

Согласно теореме 7 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, что $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на множестве $E \setminus E_\varepsilon$. Следовательно, найдется такой номер n_ε, что при $n \ge n_\varepsilon$ для всех $x \in E \setminus E_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \sigma$. Поэтому при $n \ge n_\varepsilon$ имеем $E_n(\sigma) \subset E_\varepsilon$, и значит,

$$\mu(E_n(\sigma)) \le \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(\sigma)) = 0. \blacktriangleleft$$

Отметим, что из сходимости по мере не следует сходимость почти всюду. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Пусть последовательность измеримых на множестве E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится по мере к функции $f : E \to \mathbf{R}$. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся к f почти всюду.

6. Интеграл Лебега

Пусть, как и в предыдущем пункте, X – множество, Σ – σ-алгебра его подмножеств, μ – σ-аддитивная полная мера на Σ; множества, принадлежащие Σ, называются измеримыми.

Пусть E – измеримое множество, причем $\mu(E) < +\infty$.

Определим сначала интеграл Лебега для функций, названных выше простыми (см. пункт 5).

Определение 1. Пусть $f: E \to \mathbf{R}$ – простая функция, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ $(y_i \neq y_j$ при $i \neq j)$. Функция f называется *интегрируемой (по Лебегу)* на множестве E, если ряд

$$\sum_k y_k \mu(E_k), \text{ где } E_k = \{x \in E \mid f(x) = y_k\}, \qquad (7)$$

сходится абсолютно (заметим, что в силу предложения 2 из п. 5 все множества E_k измеримы). Если функция f интегрируема на множестве E, то сумму ряда (7) называют *интегралом (Лебега)* функции f по множеству E и обозначают $\int\limits_E f(x)d\mu$, т. е.

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \sum_k y_k \mu(E_k).$$

Замечание. Напомним что, сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при изменении порядка его членов. Поэтому требование абсолютной сходимости ряда (7) обеспечивает независимость интеграла от случайно выбранной нумерации значений y_k.

Предложение 1. Ограниченная на множестве E простая функция f интегрируема на E.

Доказательство. Пусть функция f принимает значения y_k на множествах E_k и пусть $|f(x)| \le M$ для всех $x \in E$. Тогда

$$\sum_k |y_k \mu(E_k)| \le \sum_k M \mu(E_k) = M \sum_k \mu(E_k) = M\mu(E),$$

т. е. ряд $\sum\limits_k y_k \mu(E_k)$ сходится абсолютно, и значит, функция f интегрируема на множестве E. ◄

С помощью предельного перехода распространим теперь определение интеграла Лебега на существенно более широкий класс функций.

Определение 2. Пусть f – измеримая на E функция. Функция f называется *интегрируемой (по Лебегу)* на множестве E, если существует последовательность простых интегрируемых на E функций f_n, которая сходится к f равномерно на E. В этом случае *интеграл (Лебега)* функции f по множеству E определяется формулой

$$\int\limits_E f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu.$$

Корректность этого определения вытекает из следующих трех утверждений, справедливость которых несложно установить:

1. Для любой последовательности $\{f_n\}$ простых интегрируемых на множестве E функций, равномерно сходящейся на E к функции f, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)d\mu$ (здесь существенно условие $\mu(E) < +\infty$).

2. Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

3. Для простой функции f определение 2 интегрируемости и интеграла равносильно определению 1.

Рассмотрим основные свойства интеграла Лебега.

1. $\int\limits_E 1\cdot d\mu = \mu(E)$.

Это свойство вытекает непосредственно из определения интеграла Лебега для простых функций.

2. Если функции f и g интегрируемы на E, то для любых $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ функция $\alpha f+\beta g$ также интегрируема на E и

$$\int\limits_E [\alpha f(x)+\beta g(x)]d\mu = \alpha\int\limits_E f(x)d\mu + \beta\int\limits_E g(x)d\mu.$$

Сначала свойство 2 устанавливается для простых функций, а затем с помощью предельного перехода переносится на общий случай.

3. Если функция f ограничена и измерима на множестве E, то она интегрируема на E.

При доказательстве этого утверждения используется теорема 6 из пункта 5 и предложение 1.

4. Если функция f интегрируема на множестве E и $f(x)\geq 0$ на E, то

$$\int\limits_E f(x)d\mu \geq 0.$$

Доказательство. Для простой функции это свойство вытекает прямо из определения интеграла (определение 1). Чтобы его вывести в общем случае, рассмотрим последовательность простых функций, построенную при доказательстве теоремы 6 пункта 5:

$$f_n(x)=m/n, \text{ если } m/n\leq f(x)<(m+1)/n \quad (m\in\mathbf{Z}).$$

Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве E к функции f. Так как разность f_n-f является ограниченной и измеримой на E функцией, то она интегрируема (свойство 3). Поэтому в силу представления $f_n=(f_n-f)+f$ и свойства 2 простая функция f_n тоже интегрируема. Поскольку $f_n(x)\geq 0$ на E, то

$$\int\limits_E f_n(x)d\mu \geq 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем требуемое неравенство. ◄

5. Если функции f и g интегрируемы на множестве E и $f(x)\geq g(x)$ на E, то

$$\int_E f(x)d\mu \geq \int_E g(x)d\mu.$$

Это свойство вытекает из предыдущего свойства и свойства 2.

6. Пусть $\mu(E)=0.$ Тогда любая функция $f : E \to \mathbf{R}$ интегрируема на множестве E и

$$\int_E f(x)d\mu = 0.$$

Заметим, что любая функция на множестве меры нуль измерима. Поэтому, установив сначала свойство 6 для простых функций, можно затем, используя теорему 6 п. 5, предельным переходом распространить его на общий случай. Но для простых функций это свойство вытекает непосредственно из определения 1, поскольку любое измеримое множество $E' \subset E$ имеет меру нуль.

7. Если функции $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : E \to \mathbf{R}$ эквивалентны на множестве E, то они интегрируемы или не интегрируемы на E одновременно; в случае их интегрируемости

$$\int_E f(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu.$$

Это утверждение получается непосредственно из определения интеграла Лебега. При его выводе следует также учесть теоремы 4 и 6 пункта 5.

8. Если функция f измерима на множестве E, а функция φ интегрируема на E и почти всюду на E (т. е. всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль) выполняется неравенство $|f(x)| \leq \varphi(x),$ то f интегрируема на множестве E.

Сначала это свойство устанавливается для простых функций. Затем предельным переходом с использованием теоремы 6 п. 5 оно доказывается в общем случае.

9. Пусть $f : E \to \mathbf{R}$ – измеримая на множестве E функция. Тогда f и $|f|$ интегрируемы или не интегрируемы на E одновременно; в случае их интегрируемости выполняется неравенство

$$\left| \int_E f(x)d\mu \right| \leq \int_E |f(x)|\, d\mu.$$

Действительно, интегрируемость f следует из интегрируемости $|f|$ в силу свойства 8.

Обратное утверждение для случая простой функции вытекает из определения интеграла (определение 1), а для общего случая доказывается предельным переходом с использованием теоремы 6 п. 5; при этом нужно воспользоваться неравенством $\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.

Интегральное неравенство также сначала устанавливается для простых функций, а затем при помощи предельного перехода распространяется на общий случай.

Теорема 1. Пусть множество E является объединением конечного или счетного числа попарно непересекающихся измеримых множеств A_k:

$$E = \coprod_k A_k,$$

и пусть f – интегрируемая на E функция. Тогда f интегрируема на каждом из множеств A_k и

$$\int_E f(x)d\mu = \sum_k \int_{A_k} f(x)d\mu.$$

Следствие. Если функция f интегрируема на множестве E, то она интегрируема и на каждом измеримом множестве $E' \subset E$.

Теорема 2 (неравенство Чебышёва). Пусть f – интегрируемая на E функция, $f(x) \geq 0$ на E и $c > 0$. Тогда

$$\mu\{x \in E \mid f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_E f(x)d\mu.$$

Следствие. Если $\int_E |f(x)|\, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Доказательство. Имеем

$$\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

В силу неравенства Чебышёва

$$\mu\{x \in E \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k}\} \leq k \int_E |f(x)|\, d\mu = 0$$

для всех k. Значит,

$$\mu\{x \in E \mid f(x) \neq 0\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{x \in E \mid |f(x)| \geq \frac{1}{k}\} = 0. \blacktriangleleft$$

Теорема 3 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть f – интегрируемая на множестве E функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left| \int_e f(x)d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества $e \subset E$ с мерой $\mu(e) < \delta$.

Приведем формулировки трех классических теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, имеющих важное практическое значение.

Теорема 4 (Лебег). Пусть последовательность измеримых на множестве E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится почти всюду на E к функции $f : E \to \mathbf{R}$, и пусть существует такая интегрируемая на E функция φ, что при всех n

$$| f_n(x) | \leq \varphi(x)$$

почти всюду на E. Тогда все функции f_n и предельная функция f интегрируемы на E и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu.$$

Теорема 5 (Бéппо Лéви). Пусть $\{ f_n \}$ – последовательность интегрируемых на множестве E функций, причем

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

на E. Кроме того, пусть существует такая константа K, что

$$\int_E f_n(x) d\mu \leq K$$

для всех n. Тогда последовательность $\{ f_n \}$ сходится почти всюду на E к некоторой интегрируемой на E функции f и

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) d\mu = \int_E f(x) d\mu.$$

Теорема 6 (Фату́). Пусть последовательность неотрицательных интегрируемых на E функций $f_n : E \to \mathbf{R}$ сходится почти всюду на E к функции $f : E \to \mathbf{R}$, и пусть существует такая константа K, что

$$\int_E f_n(x) d\mu \leq K$$

для любого n. Тогда функция f является интегрируемой на E и

$$\int_E f(x) d\mu \leq K.$$

Распространим понятие интеграла Лебега на случай $\mu(E) = +\infty$. При этом будем предполагать, что множество E представимо в виде объединения счетного числа попарно непересекающихся множеств конечной меры:

$$E = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \mu(A_k) < +\infty$$

(в этом случае говорят, что мера μ *σ-конечна* на множестве E). Положив $B_1 = A_1$, $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ $(n = 2, 3, \ldots)$, получим возрастающую последовательность измеримых множеств

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots.$$

Очевидно, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad \mu(B_n) < +\infty \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Определение 3. Любая возрастающая последовательность $\{B_n\}$ измеримых подмножеств множества E, удовлетворяющая условию (8), называется *исчерпывающей множество E*.

Определение 4. Пусть E – множество с σ-конечной мерой μ. Измеримая на E функция $f:E\to\mathbf{R}$ называется *интегрируемой* на множестве E, если она интегрируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для каждой исчерпывающей E последовательности $\{B_n\}$ предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n} f(x)d\mu$$

существует и не зависит от выбора этой последовательности. Этот предел называется *интегралом* функции f по множеству E и по-прежнему обозначается $\int_E f(x)d\mu$.

Отметим, что изложенные выше факты об интеграле Лебега по множеству конечной меры в основном остаются справедливыми и для интегралов по множеству с σ-конечной мерой; в частности, сохраняют силу теорема 1 и теоремы Лебега, Б. Леви и Фату. Однако, в отличие от случая $\mu(E)<+\infty$, ограниченная измеримая функция не обязательно интегрируема на множестве бесконечной меры (например, любая отличная от нуля постоянная на таком множестве, очевидно, не интегрируема).

Сформулируем теорему о связи между интегралами Римана и Лебега.

Теорема 7. Пусть μ – мера Лебега на прямой (см. п. 4). Если функция $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке и по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега от функции f по отрезку $[a,b]$ равны:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]} f(x)d\mu.$$

Следует отметить, что существует большой класс функций, определенных на отрезке и интегрируемых на нем по Лебегу, но не интегрируемых по Риману. В него входят все неограниченные интегрируемые по Лебегу функции, а также все ограниченные измеримые функции, не интегрируемые по Риману.

Пример. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\mathbf{Q},\\ 0 & \text{при } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

на любом отрезке $[a,b]$ ограничена и измерима, а значит, интегрируема по Лебегу, но она, очевидно, не интегрируема на этом отрезке по Риману.

§ 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение метрического пространства. Примеры

Определение 1. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества X и отображения $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, принимающего неотрицательные значения и удовлетворяющего следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (*аксиома симметрии*);

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$ (*аксиома треугольника*).

Элементы множества X называются *точками* метрического пространства, а отображение ρ – *метрикой* или *расстоянием*.

Примеры метрических пространств:

Пример 1. l_1 – множество всевозможных последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} | x_k - y_k |.$$

Пример 2. $C([a, b])$ – множество всех функций, заданных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} | x(t) - y(t) | .$$

Пример 3. $C^m([a, b])$ $(m \in \mathbf{N})$ – пространство функций, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на нем непрерывные производные до порядка m включительно, с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|.$$

Пример 4. $C_1([a, b])$ – множество всех функций, заданных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Аксиомы 1)–3) определения 1 в приведенных выше примерах проверяются непосредственно.

Пример 5. Пусть T – измеримое множество. Обозначим через $L_1(T)$ множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на T. Каждой паре функций из $L_1(T)$ поставим в соответствие число

$$\rho(x,y)=\int_T |x(t)-y(t)|\,d\mu.$$

Легко видеть, что $\rho(x,y)$ удовлетворяет аксиомам 2) и 3) метрики. Если считать, что функции, эквивалентные друг другу на T, не различаются, а считаются за один и тот же элемент, то выполняется и аксиома 1). Таким образом, $L_1(T)$, рассматриваемое как множество классов эквивалентности функций, интегрируемых по Лебегу на T, является метрическим пространством с метрикой ρ.

Пример 6. Аналогично пространству $L_1(T)$ для любого $1<p<\infty$ определяется пространство $L_p(T)$: $L_p(T)$ – множество классов эквивалентных между собой функций, для которых существует интеграл $\int_T |x(t)|^p\,d\mu$, с метрикой

$$\rho(x,y)=\left(\int_T |x(t)-y(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Аксиома 3) метрики здесь устанавливается с помощью неравенства Гёльдера

$$\left|\int_T x(t)y(t)\,d\mu\right| \le \left(\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_T |y(t)|^q\,d\mu\right)^{1/q} \qquad (p>1,\ 1/p+1/q=1),$$

справедливого для любых функций $x(t)$ и $y(t)$, для которых существуют интегралы в правой части этого неравенства.

2. Сходимость в метрическом пространстве

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ точек (элементов) метрического пространства (X,ρ) называется *сходящейся*, если существует такой элемент $a\in X$, что $\rho(x_n,a)\to 0$ при $n\to\infty$. Точка a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ (говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к точке* a). При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Непосредственно из определения 1 вытекают следующие два предложения:

Предложение 1. Любая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Предложение 2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке a, то и всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, ρ) называется *последовательностью Коши* (*фундаментальной последовательностью*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для любых $n, m \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Теорема 1. В любом метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon/2$ для всех $n \geq n_\varepsilon$. В силу аксиомы 3) метрики (определение 1 п. 1)

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \varepsilon$$

для любых $n, m \geq n_\varepsilon$. ◄

Обратное утверждение для произвольных метрических пространств неверно.

Пример 1. Пусть $X = (0,1)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $x_n = 1/n$ является последовательностью Коши, но не имеет предела в X.

Пример 2. В метрическом пространстве $C_1([0,1])$ (см. пример 4 п. 1) рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/2, \\ n(t - 1/2), & 1/2 < t < 1/2 + 1/n, \\ 1, & 1/2 + 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(график функции $x_n(t)$ изображен на рис. 1).

Если $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt =$$

$$= \int_{1/2}^{1/2+1/n} |x_n(t) - x_m(t)| dt \leq 1/n.$$

Таким образом, для любых $n, m \in \mathbf{N}$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{1}{\min\{n, m\}}.$$

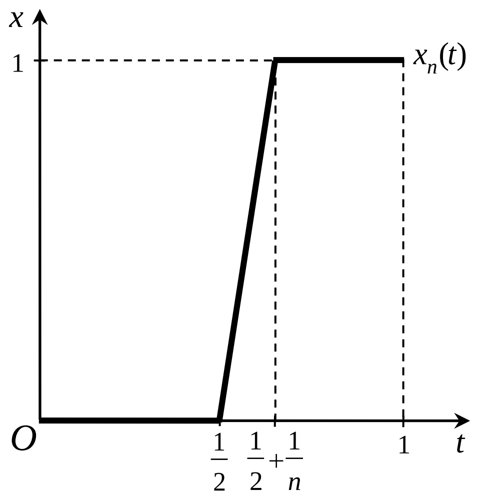

Рис. 1

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью Коши.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится ни к какой функции из пространства $C_1([0,1])$, т. е. не является сходящейся.

Легко видеть, что

$$\int_0^1 |x_n(t)-\varphi(t)|\,dt \to 0 \text{ при } n\to\infty, \tag{1}$$

где

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1/2,\\ 1 & 1/2<t\le 1.\end{cases}$$

Пусть $x(t)$ – произвольная функция из $C_1([0,1])$. Поскольку $x(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то, очевидно,

$$\int_0^1 |x(t)-\varphi(t)|\,dt > 0. \tag{2}$$

Так как

$$\int_0^1 |x(t)-\varphi(t)|\,dt \le \int_0^1 |x(t)-x_n(t)|\,dt + \int_0^1 |x_n(t)-\varphi(t)|\,dt,$$

то, учитывая (1) и (2), приходим к выводу, что $\int_0^1 |x(t)-x_n(t)|\,dt$ не может стремиться к нулю при $n\to\infty$, а значит, последовательность $\{x_n\}$ сходящейся не является.

3. Открытые и замкнутые множества. Всюду плотные множества

Пусть (X,ρ) – метрическое пространство.

Определение 1. *Открытым шаром* радиуса $r>0$ с центром в точке $x_0\in X$ называется множество

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid \rho(x,x_0)<r\}.$$

Замкнутым шаром радиуса $r>0$ с центром в точке $x_0\in X$ называется множество

$$B[x_0,r]=\{x\in X \mid \rho(x,x_0)\le r\}.$$

Определение 2. Множество $M\subset X$ называется *открытым*, если для каждой его точки найдется открытый шар с центром в этой точке, который целиком содержится в M.

Предложение 1. Открытый шар $B(x_0,r)$ является открытым множеством.

Доказательство. Если $x_1 \in B(x_0, r)$, то $\rho(x_1, x_0) < r$. Рассмотрим открытый шар $B(x_1, r_1)$, где $r_1 = r - \rho(x_1, x_0)$. Пусть $x \in B(x_1, r_1)$. Тогда

$$\rho(x, x_0) \le \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_0) \le r_1 + \rho(x_1, x_0) = r.$$

Таким образом, $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$. ◄

Непосредственно из определения 2 и определений операций объединения и пересечения множеств вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Объединение любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств являются открытыми множествами.

Определение 3. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если для любого $r > 0$ шар $B(x_0, r)$ содержит точки множества M, т. е. $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется его *замыканием* и обозначается $\overline{M}$.

Очевидно, что любая точка множества $M \subset X$ является для M точкой прикосновения. Поэтому $M \subset \overline{M}$.

Следующая теорема устанавливает тесную связь между понятиями точки прикосновения и предела последовательности точек.

Теорема 2. Для того чтобы точка x_0 была точкой прикосновения множества $M \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ точек из M, сходящаяся к x_0.

Доказательство. Докажем лишь необходимость, так как достаточность очевидна. Пусть x_0 – точка прикосновения множества M. Тогда для каждого $n \in \mathbf{N}$ шар $B(x_0, 1/n)$ содержит хотя бы одну точку $x_n \in M$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, поскольку $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. ◄

Определение 4. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Предложение 2. Замкнутый шар $B[x_0, r]$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть x_1 – точка прикосновения шара $B[x_0, r]$. В силу теоремы 2 существует такая последовательность точек $x_n \in B[x_0, r]$, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_1, x_n) = 0. \qquad (3)$$

Для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\rho(x_1, x_0) \le \rho(x_1, x_n) + \rho(x_n, x_0) \le \rho(x_1, x_n) + r.$$

Отсюда и из (3) следует, что $\rho(x_1, x_0) \le r$, т. е. $x_1 \in B[x_0, r]$. ◄

Теорема 3. Множество $M \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus M$ является открытым множеством.

Доказательство. Если M замкнуто, то для любой точки $x \in X \setminus M$ существует такое $r > 0$, что шар $B(x, r)$ не содержит точек множества M, и следовательно, целиком содержится в $X \setminus M$. Таким образом, множество $X \setminus M$ открыто.

Обратно, если $X \setminus M$ открыто и $x \in X \setminus M$, то существует открытый шар с центром в точке x, целиком принадлежащий $X \setminus M$. Следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества M, и значит, все точки прикосновения множества M содержатся в M, т. е. M замкнуто. ◄

Заметим, что пустое множество $\varnothing$ и само множество X являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Теорема 4. Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

Доказательство. Утверждение этой теоремы вытекает из теорем 1 и 3 с помощью следующих хорошо известных формул из теории множеств:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha} M_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus M_{\alpha}), \qquad X \setminus \bigcup_{\alpha} M_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus M_{\alpha}). \ ◄$$

Определение 5. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в метрическом пространстве (X, ρ), если $\overline{A} = X$, т. е. если для любого $x \in X$ и любого $r > 0$ открытый шар $B(x, r)$ содержит хотя бы одну точку множества A.

Пример 1. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в пространстве $\mathbf{R}$ вещественных чисел с естественной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Действительно, для любого $x \in \mathbf{R}$ и любого $r > 0$ найдется $y \in \mathbf{Q}$, содержащееся в интервале $(x - r, x + r)$.

Пример 2. Множество всех многочленов с вещественными коэффициентами всюду плотно в пространстве $C([a, b])$. Это значит, что для любой функции $x(t) \in C([a, b])$ и любого $r > 0$ найдется такой многочлен

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \qquad (a_k \in \mathbf{R},\ k = 0, 1, \ldots, n),$$

что

$$\max_{a \le t \le b} |x(t) - p(t)| < r.$$

Данный факт известен в математике как теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции многочленами.

Пример 3. Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций всюду плотно в пространстве $L_1([a, b])$, т. е. для любой функции $x(t)$ из пространства $L_1([a, b])$ и любого $r > 0$ существует такая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y(t)$, что

$$\int\limits_{[a,b]} | x(t) - y(t) | d\mu < r.$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [1].

4. Полные метрические пространства

Определение 1. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в нем любая последовательность Коши сходится.

Пример 1. Пространство **R** вещественных чисел со стандартной метрикой $\rho(x, y) = | x - y |$ является полным метрическим пространством. Это следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности, рассматриваемого в курсе математического анализа.

Пример 2. Пространство $C([a,b])$ – полное метрическое пространство. Действительно, пусть $\{x_n(t)\}$ – последовательность Коши в $C([a,b])$; это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что

$$| x_n(t) - x_m(t) | < \varepsilon \tag{4}$$

для всех $n,m \geq n_\varepsilon$ и всех $t \in [a,b]$. Согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. По известной теореме из математического анализа ее предел $x(t)$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией. Переходя в (4) к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$| x_n(t) - x(t) | \leq \varepsilon$$

для всех $n \geq n_\varepsilon$ и всех $t \in [a,b]$, а это и означает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в пространстве $C([a,b])$.

Примерами полных метрических пространств являются также пространства l_1, $C^m([a,b])$, $L_p([a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$.

Пример 3. Пространство $C_1([0,1])$ полным не является (см. пример 2 из п. 2).

Предложение 1. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Множество M образует полное метрическое пространство (относительно той же метрики ρ) тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Справедливость данного утверждения следует непосредственно из определений полного метрического пространства и замкнутого множества. При этом учитывается теорема 2 из п. 3, а также теорема 1 и предложение 1 из п. 2.

Определение 2. Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Пространство (X, ρ) называется *пополнением* метрического пространства (M, ρ), если M всюду плотно в (X, ρ), т. е. $\overline{M} = X$.

Теорема 1. Любое метрическое пространство имеет пополнение.

Следующая теорема, называемая *теоремой о вложенных шарах*, является одной из фундаментальных в функциональном анализе.

Теорема 2. Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая убывающая последовательность $B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset B[x_3, r_3] \supset \ldots$ замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Доказательства теорем 1 и 2 см., например, в [1, 2, 7].

5. Непрерывные отображения метрических пространств. Принцип сжимающих отображений

Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) – два метрических пространства. Под *отображением* f *пространства* (X, ρ_X) *в пространство* (Y, ρ_Y) понимают отображение $f : X \to Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие некоторую точку $y = f(x) \in Y$. При этом используют также обозначение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$.

Определение 1. Отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что

$$\rho_X(x, x_0) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Отображение f называется *непрерывным на множестве* $M \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M.

Определение непрерывности отображения в точке можно переформулировать в терминах сходимости последовательностей.

Теорема 1. Отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек $\{x_n\}$ из X, сходящейся к x_0 в (X, ρ_X), последовательность точек $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ в (Y, ρ_Y).

Будем рассматривать теперь отображения метрического пространства (X, ρ) в себя.

Определение 2. Пусть $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ – отображение метрического пространства (X,ρ) в себя. Точка $x^*\in X$ называется *неподвижной точкой* отображения f, если $f(x^*)=x^*$. Иначе говоря, неподвижная точка – это решение уравнения $x=f(x)$.

Определение 3. Отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ называется *сжимающим* (или *сжатием*), если существует такая константа $\alpha\in[0,1)$, что для всех $x_1,x_2\in X$ выполнено неравенство

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\le\alpha\rho(x_1,x_2). \tag{5}$$

Предложение 1. Всякое сжимающее отображение $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ непрерывно на X.

Доказательство. Пусть $x\in X$ и $\{x_n\}$ – последовательность точек из X, сходящаяся к точке x. Тогда

$$\rho(f(x_n),f(x))\le\alpha\rho(x_n,x)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$. В силу теоремы 1 отображение f непрерывно в точке x. ◄

Теорема 2 (принцип сжимающих отображений). Пусть (X,ρ) – полное метрическое пространство, $f:(X,\rho)\to(X,\rho)$ – сжимающее отображение. Тогда f имеет и притом единственную неподвижную точку x^*. Более того, если x_0 – произвольная точка из X, то последовательность

$$x_1=f(x_0),\ x_2=f(x_1),\ \dots,\ x_n=f(x_{n-1}),\ \dots$$

сходится к точке x^*, причём

$$\rho(x_n,x^*)\le\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1),$$

где α – константа из неравенства (5).

Приведем пример, в котором применяется принцип сжимающих отображений.

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)=\varphi(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{6}$$

где $K(t,s)$ и $\varphi(t)$ – заданные функции, λ – произвольный параметр, $x(t)$ – неизвестная функция. Предполагается, что $K(t,s)$ и $\varphi(t)$ определены и непрерывны соответственно в квадрате $[a,b]\times[a,b]$ и на отрезке $[a,b]$. Исследуется вопрос о существовании и единственности решения уравнения (6) в полном метрическом пространстве $C([a,b])$.

Формула

$$(F(x))(t) = \varphi(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

определяет отображение F пространства $C([a,b])$ в себя. Действительно, если $x(t)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, то подинтегральная функция $w(t,s) = K(t,s)x(s)$ является непрерывной функцией переменных t и s и по теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, функция

$$u(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

непрерывна на отрезке $[a,b]$. Отсюда и из непрерывности функции $\varphi(t)$ вытекает, что функция $(F(x))(t)$ также непрывна на отрезке $[a,b]$.

Пусть x_1 и x_2 – две произвольные функции из пространства $C([a,b])$. Тогда

$$\rho(F(x_1),F(x_2)) = \max_{a\le t\le b} |(F(x_1))(t) - (F(x_2))(t)| =$$

$$= \max_{a\le t\le b} |\lambda| \left|\int_a^b K(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds\right|. \quad (7)$$

В силу непрерывности функции $K(t,s)$ существует такая константа $K_0 > 0,$ что $|K(t,s)| \le K_0$ при $(t,s) \in [a,b]\times[a,b].$ С учетом этого из (7) получаем

$$\rho(F(x_1),F(x_2)) \le K_0|\lambda|(b-a)\rho(x_1,x_2).$$

Следовательно, при $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0(b-a)}$ отображение F является сжимающим, а значит, в силу теоремы 2 уравнение (6) имеет и притом единственное решение в метрическом пространстве $C([a,b])$.

6. Компактные и предкомпактные множества

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 1. Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если любая последовательность точек из M содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого множества.

Определение 2. *Покрытием* множества $M \subset X$ называется такая система $\{U_\alpha\}$ подмножеств множества X, что $M \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. При этом любая подсистема покрытия $\{U_\alpha\}$, которая сама является покрытием множества M, называется *подпокрытием* покрытия $\{U_\alpha\}$. Покрытие называется *открытым*, если все составляющие его множества открыты.

Теорема 1. Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [1].

Определение 3. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным*, если любая последовательность точек из M содержит подпоследовательность Коши.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. Если пространство (X, ρ) полное, то множество $M \subset X$ компактно в том и только в том случае, если оно предкомпактно и замкнуто.

Определение 4. Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если оно содержится целиком в некотором шаре конечного радиуса.

Предложение 1. Если множество $M \subset X$ предкомпактно, то оно ограничено.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть для любого шара конечного радиуса имеются точки множества M, не принадлежащие этому шару. Тогда, очевидно, найдется такая последовательность $\{x_n\}$ точек из M, что

$$\rho(x_1, x_n) \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{8}$$

В силу предкомпактности множества M эта последовательность содержит подпоследовательность Коши $\{x_{n_k}\}$. Так как

$$|\rho(x_1, x_{n_k}) - \rho(x_1, x_{n_m})| \le \rho(x_{n_k}, x_{n_m}),$$

то числовая последовательность $\{\rho(x_1, x_{n_k})\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет конечный предел. С другой стороны, из (8) следует, что $\rho(x_1, x_{n_k}) \to \infty$. Получено противоречие. ◄

Из теоремы Больцано – Вейерштрасса (см. курс математического анализа) вытекает, что любое ограниченное множество в $\mathbf{R}$ предкомпактно (аналогичный факт справедлив и в пространстве $\mathbf{R}^n$). Следующий пример показывает, что в произвольном метрическом пространстве из ограниченности множества может не следовать его предкомпактность.

Пример. В пространстве l_1 (см. пример 1 п. 1) рассмотрим замкнутый шар радиуса $r = 1$ с центром в точке $x_0 = (0, 0, \ldots)$ (последовательность, состоящая из одних нулей), т. е. рассмотрим множество

$$M = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le 1\}.$$

Все точки последовательности $\{e_n\}$, где $e_n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1},1,0,0,\ldots)$, принадлежат множеству M. Так как $\rho(e_n, e_m) = 2$ при $n \neq m$, то у последовательности $\{e_n\}$ не может существовать подпоследовательности Коши. Таким образом, множество M ограничено, но предкомпактным не является.

Определение 5. Пусть $M \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Множество $S \subset X$ называется *ε-сетью* для множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется такая точка $y \in S$, что $\rho(x, y) \leq \varepsilon$. Если при этом S является конечным множеством, то S называют *конечной ε-сетью*.

Определение 6. Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если при любом $\varepsilon > 0$ для M существует конечная ε-сеть.

Очевидно, что вполне ограниченное множество обязательно ограничено.

Теорема 3 (Хаусдорф). Множество $M \subset X$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Ниже мы приведем критерий предкомпактности множеств в пространстве $C([a,b])$. Для этого понадобятся следующие определения.

Определение 7. Множество $M \subset C([a,b])$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такая константа C, что

$$|x(t)| \leq C$$

для всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in M$.

Определение 8. Множество $M \subset C([a,b])$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

для всех $t_1, t_2 \in [a,b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и для всех $x \in M$.

Теорема 4 (Арцела). Для того чтобы множество $M \subset C([a,b])$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

§ 3. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Линейные пространства

Пусть $\mathbf{P}$ – некоторое числовое поле (например, $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{P} = \mathbf{C}$).

Определение 1. Непустое множество X называется *линейным* (*векторным*) *пространством над полем* $\mathbf{P}$, если:

I. Для любых двух элементов $x, y \in X$ однозначно определена их *сумма* $x + y \in X$, причем

1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in X$,

2) $x + y = y + x$ для любых $x, y \in X$,

3) существует элемент $\vec{0} \in X$ такой, что $x + \vec{0} = x$ для всех $x \in X$,

4) для любого $x \in X$ существует элемент $-x$ такой, что $x + (-x) = \vec{0}$.

II. Для любого числа $\lambda \in \mathbf{P}$ и любого элемента $x \in X$ однозначно определено *произведение* $\lambda x \in X$, причем

1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

2) $1 \cdot x = x$,

3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

4) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

для любых $\lambda, \mu \in \mathbf{P}$ и любых $x, y \in X$.

Приведем примеры линейных пространств.

Пример 1. Множество всевозможных последовательностей
$$x = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots)$$
действительных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \quad (1 \le p < \infty),$$
с операциями
$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots) + (y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_k,\, \ldots) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \ldots,\, x_k + y_k,\, \ldots),$$
$$\lambda(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots) = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \ldots,\, \lambda x_k,\, \ldots)$$
образует линейное пространство над полем **R** (над полем **C**). Его обозначают символом l_p.

Пример 2. Пусть T – произвольное множество. Множество $\mathcal{F}(T)$ всех функций, определенных на T и принимающих значения в **R** (в **C**), представляет собой линейное пространство над полем **R** (над полем **C**) с естественными операциями сложения и умножения на число:
$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t), \qquad t \in T.$$

Пример 3. Пространство $C([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительнозначных (комплекснозначных) функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа является линейным пространством над **R** (над **C**).

Пример 4. Пусть T – измеримое множество. Множество $L_p(T)$ $(1 \le p < \infty)$ действительнозначных (комплекснозначных) функций, для которых существует интеграл $\int\limits_T |x(t)|^p \, d\mu$, тоже представляет собой линейное пространство над полем **R** (над полем **C**) с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа.

Определение 2. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейного пространства X называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \vec{0}.$$

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми*.

Бесконечная система элементов пространства X называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 3. Линейное пространство X называется *n-мерным*, если в нем можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства будут линейно зависимы. При этом число n называется размерностью пространства X (пишут $\dim X = n$).

Определение 4. *Базисом* в n-мерном линейном пространстве X называется любая система, состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства.

Определение 5. Если в линейном пространстве X существует бесконечная линейно независимая система элементов, то пространство X называется *бесконечномерным* (пишут $\dim X = \infty$).

Пример 5. Пространство l_p (см. пример 1) бесконечномерно, поскольку последовательности $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют бесконечную линейно независимую систему элементов в этом пространстве.

Пример 6. Пространство $C([a,b])$ бесконечномерно. Бесконечной линейно независимой системой элементов в нем является, например, система функций $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Определение 6. Пусть X – линейное пространство над полем **P**. Непустое подмножество Y пространства X называется его *линейным подпространством*, если оно замкнуто по отношению к определенным в X операциям сложения элементов и умножения их на числа из поля **P**, т. е. если:

1) $x + y \in Y$ для любых $x, y \in Y$,

2) $\lambda x \in Y$ для любого $x \in Y$ и любого $\lambda \in \mathbf{P}$.

Нетрудно убедиться в том, что всякое линейное подпространство линейного пространства X само является линейным пространством с теми же операциями сложения элементов и умножения элемента на число, что и в пространстве X.

Пример 7. Совокупность всех многочленов с действительными коэффициентами, заданных на отрезке $[a,b]$, образует линейное подпространство в линейном пространстве $C([a,b])$ всех непрерывных на $[a,b]$ действительнозначных функций. В то же время само пространство $C([a,b])$ можно рассматривать как линейное подпространство в линейном пространстве всех действительнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$.

Определение 7. Пусть M – подмножество линейного пространства X. Наименьшее линейное подпространство в X, содержащее M, *называется линейным пространством, порожденным множеством М*, или *линейной оболочкой множества М*.

2. Определение нормированного пространства. Примеры

Определение 1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{P}=\mathbf{C}$. Отображение $\|\cdot\|:X\to\mathbf{R}$ называется *нормой* в пространстве X, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $\|x\|\geq 0$ для любого $x\in X$, причем $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=\vec{0}$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ для любого $\lambda\in\mathbf{P}$ и любого $x\in X$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ для всех $x,y\in X$ (*неравенство треугольника*).

Линейное пространство X с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется *нормированным пространством*.

Легко проверить, что нормированное пространство является метрическим с метрикой

$$\rho(x,y)=\|x-y\|.$$

Таким образом, на нормированные пространства переносятся все понятия и факты, изложенные в § 2 для метрических пространств.

Примерами линейных пространств, в которых может быть введена норма, являются рассмотренные в пункте 1 пространства l_p, $C([a,b])$ и $L_p(T)$:

Пример 1. l_p $(1\leq p<\infty)$ – нормированное пространство с нормой

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Пример 2. $C([a,b])$ – нормированное пространство с нормой

$$\|x\|=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)|.$$

Пример 3. $L_p(T)$ $(1 \le p < \infty)$ – нормированное пространство с нормой

$$\| x \| = \left(\int_T |x(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Приведем еще несколько примеров нормированных пространств.

Пример 4. l_∞ – пространство всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ с покоординатными операциями сложения и умножения на числа. Норма задается формулой

$$\| x \| = \sup_k |x_k|.$$

Пример 5. $C_p([a,b])$ $(1 \le p < \infty)$ – пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительнозначных или комплекснозначных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа, норма в котором определена формулой

$$\| x \| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Пример 6. $C^m([a,b])$ $(m \in \mathbf{N})$ – пространство m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ действительнозначных или комплекснозначных функций с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа. Норма задается равенством

$$\| x \| = \sum_{k=0}^{m} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|.$$

3. Банаховы пространства

Определение 1. Нормированное пространство X с нормой $\| \cdot \|$ называется *ба́наховым*, если оно по́лно как метрическое пространство относительно метрики $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

Банаховыми пространствами являются рассмотренные в предыдущем пункте нормированные пространства l_p, l_∞, $C([a,b])$, $C^m([a,b])$ и $L_p(T)$ (полнота пространства $C([a,b])$ была доказана в примере 2 пункта 4 § 2). В то же время пространство $C_p([a,b])$ неполно, и значит, банаховым не является (доказательство неполноты пространства $C_1([a,b])$ см. в примере 2 пункта 2 § 2).

В нормированном пространстве X рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x_k \in X. \tag{1}$$

Определение 2. Ряд (1) называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

сходится, т. е. если существует такой элемент $s \in X$, что $\| s_n - s \| \to 0$ при $n \to \infty$. Элемент $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ называется суммой ряда (1). При этом пишут: $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Определение 3. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| .$$

Теорема 1. Нормированное пространство является банаховым тогда и только тогда, когда в нем любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. Необходимость. Пусть X – банахово пространство и пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$ сходится. Рассмотрим последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. При $m > n$ имеем

$$\| s_m - s_n \| = \| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \| \le \sum_{k=n+1}^{m} \| x_k \|.$$

Отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$ вытекает, что последовательность $\{s_n\}$ является последовательностью Коши, и так как пространство X полное, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.

Достаточность. Пусть в нормированном пространстве X любой абсолютно сходящийся ряд сходится. Рассмотрим произвольную последовательность Коши $\{x_n\}$ элементов пространства X. Очевидно, что из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что

$$\| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < 1/2^k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В силу этих неравенств ряд

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \ldots \tag{2}$$

сходится абсолютно, и значит, согласно предположению, является сходящимся. Так как частичная сумма s_k ряда (2) равна x_{n_k}, то из сходимости этого ряда вытекает сходимость подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. Отсюда легко следует, что сходится и сама последовательность Коши $\{x_n\}$. ◄

Теорема 2. Для любого нормированнного пространства *Y* существует банахово пространство *X*, являющееся его пополнением, причем *Y* является линейным подпространством в *X*.

Доказательство. Пусть *Y* – неполное нормированное пространство. Тогда, согласно теореме 1 пункта 4 § 2, для *Y*, как метрического пространства, существует его пополнение – полное метрическое пространство *X*. Однако *X* еще не является линейным пространством и на нем пока еще не определена норма.

Пусть $x, y \in X$. Поскольку $\overline{Y} = X$, то существуют последовательности $x_n \in Y$ и $y_n \in Y$ такие, что $x_n \to x$ и $y_n \to y$. Положим по определению

$$x + y = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n), \quad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n,$$

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Легко проверить, что указанные пределы существуют и не зависят от выбора в *Y* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, сходящихся к x и y соответственно. Выполнение аксиом линейного пространства и аксиом нормы в пространстве *X* также проверяется без труда. ◄

Пример 1. Как отмечалось выше, пространство $C_p([a,b])$ $(1 \le p < \infty)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

неполно. Его пополнением является банахово пространство $L_p([a,b])$ (доказательство см., например, в [1]).

Важную роль в теории банаховых пространств играют их замкнутые линейные подпространства. Такие подпространства обладают свойством полноты (см. предложение 1 пункта 4 § 2), а значит, сами являются банаховыми пространствами.

Определение 4. *Замкнутым подпространством* (или просто: *подпространством*) банахова пространства *X* называется его замкнутое линейное подпространство.

Пример 2. В банаховом пространстве $C([a,b])$ рассмотрим множество *Y*, состоящее из всех функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(a) = 0$. Очевидно, что *Y* является линейным подпространством. Покажем, что оно замкнуто в пространстве $C([a,b])$. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность функций из Y такая, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ в пространстве $C([a,b])$. Поскольку

$$|x_n(a) - x_0(a)| \le \| x_n - x_0 \| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

последовательность $\{x_n(a)\}$ сходится к $x_0(a)$, и так как $x_n(a) = 0$ при всех n, то $x_0(a) = 0$. Таким образом, $x_0 \in Y$, и значит, Y – замкнутое подпространство в $C([a,b])$.

4. Гильбертовы пространства

Определение 1. Пусть H – линейное пространство над полем $\mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{P} = \mathbf{C}$. *Скалярным произведением* в H называется отображение $(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbf{P}$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1) $(x,x) \ge 0$ для любого $x \in H$, причем $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \bar{0}$;

2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$ при всех $x, y \in H$ (черта обозначает комплексное сопряжение);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$ для любого $\lambda \in \mathbf{P}$ и любых $x, y \in H$;

4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ при всех $x_1, x_2, y \in H$.

В случае $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ аксиома 2) имеет вид $(x,y) = (y,x)$.

Заметим, что из аксиом 2)–4) скалярного произведения следуют равенства

5) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)$ $\quad$ ($(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$, если $\mathbf{P} = \mathbf{R}$),

6) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

Определение 2. Линейное пространство H с введенным в нем скалярным произведением называется *предгильбертовым пространством*.

Примеры предгильбертовых пространств:

Пример 1. Пространство l_2 числовых последовательностей

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots),$$

удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

Пример 2. Пространство $C_2([a,b])$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительнозначных или комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt. \tag{3}$$

Пример 3. Пространство $L_2(T)$ действительнозначных или комплекснозначных функций, заданных на измеримом множестве T, для которых существует интеграл $\int\limits_T |x(t)|^2\, d\mu$, со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_T x(t)\overline{y(t)}\, d\mu.$$

Аксиомы 1)–4) скалярного произведения в приведенных выше примерах проверяются непосредственно.

Предложение 1. В любом предгильбертовом пространстве справедливо неравенство

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)},$$

называемое *неравенством Коши – Буняковского*.

Доказательство см., например, в [1].

Предложение 2. В любом предгильбертовом пространстве H формула

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)}$$

определяет норму.

Доказательство. Выполнение аксиом 1) и 2) нормы (определение 1 п. 2) немедленно вытекает из аксиом скалярного произведения. Проверим выполнение аксиомы 3). Применяя неравенство Коши – Буняковского, для любых $x, y \in H$ получаем

$$\| x + y \|^2 = (x + y, x + y) = \| x \|^2 + (x, y) + (y, x) + \| y \|^2 =$$
$$= \| x \|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \| y \|^2 \le \| x \|^2 + 2|(x, y)| + \| y \|^2 \le$$
$$\le \| x \|^2 + 2\| x \|\| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2,$$

откуда следует неравенство $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$. ◄

Таким образом, предгильбертово пространство является нормированным пространством и поэтому на него можно перенести все понятия и факты, относящиеся к теории нормированных пространств.

Предложение 3 (о непрерывности скалярного произведения). Если в предгильбертовом пространстве H последовательности элементов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся соответственно к элементам x и y, то

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

Доказательство. Имеем

$$(x_n, y_n) = (x_n - x + x, y_n - y + y) =$$
$$= (x_n - x, y_n - y) + (x_n - x, y) + (x, y_n - y) + (x, y).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \le \|x_n - x\| \cdot \| y_n - y \| + \|x_n - x\| \cdot \| y \| + \| x \| \cdot \| y_n - y \|,$$

и следовательно, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$. ◄

Предложение 4. Во всяком предгильбертовом пространстве H справедливо *тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Предложение 5. Если в нормированном пространстве H с нормой $\|\cdot\|$ выполняется тождество параллелограмма, то в H можно определить (причем единственным образом) скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, порождающее исходную норму по формуле $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Определение 3. Предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, называется *гильбертовым пространством*.

Пространства l_2 и $L_2(T)$ из примеров 1 и 3 являются гильбертовыми. Предгильбертово пространство $C_2([a,b])$ (пример 2) неполно относительно нормы

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

порожденной скалярным произведением (3), и следовательно, гильбертовым не является.

Определение 4. Элементы x и y предгильбертова пространства H называют *ортогональными*, если $(x,y)=0$. При этом пишут $x\perp y$.

Определение 5. Множество всех элементов предгильбертова пространства H, ортогональных каждому элементу данного множества $M\subset H$, называется *ортогональным дополнением* множества M и обозначается $M^{\perp}$.

Предложение 6. Ортогональное дополнение любого множества M в предгильбертовом пространстве H является замкнутым линейным подпространством в H.

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in M^{\perp}$. Тогда для любых чисел λ и μ и любого $y\in M$ имеем

$$(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda(x_1,y)+\mu(x_2,y)=0,$$

т. е. $\lambda x_1+\mu x_2\in M^{\perp}$, и значит, $M^{\perp}$ – линейное подпространство в H.

Докажем замкнутость $M^{\perp}$. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность элементов из $M^{\perp}$, сходящаяся к $x\in H$. Тогда, в силу непрерывности скалярного произведения (предложение 3), для любого $y\in M$ получаем

$$(x,y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,y)=0,$$

так что $x\in M^{\perp}$, и следовательно, $M^{\perp}$ замкнуто в H. ◄

Теорема 1. Пусть L – замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства *H*. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует, и притом единственный, ближайший к *x* элемент подпространства *L*, т. е. такой элемент $y \in L$, что

$$\| x - y \| = \inf_{z \in L} \| x - z \|.$$

Теорема 2. Пусть L – замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства *H*. Тогда любой элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде $x = y + y^{\perp}$, где $y \in L$, $y^{\perp} \in L^{\perp}$. При этом *y* является ближайшим к *x* элементом подпространства *L*.

Доказательства теорем 1, 2 можно найти, например, в [9].

Определение 6. Система ненулевых элементов $\{e_\alpha\}$ предгильбертова пространства *H* называется *ортогональной*, если любые два различных элемента из этого набора ортогональны. Ортогональная система $\{e_\alpha\}$ называется *ортонормированной*, если $\| e_\alpha \| = 1$ при всех α.

Предложение 7. Любая ортогональная система элементов $\{e_\alpha\}$ предгильбертова пространства *H* линейно независима (см. определение 2 п. 1).

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольные элементы системы $\{e_\alpha\}$ и пусть

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \bar{0},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – некоторые числа. Поскольку $\{e_\alpha\}$ – ортогональная система, имеем

$$(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, e_k) = \lambda_k (e_k, e_k) = 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots n$, и так как $(e_k, e_k) \neq 0$, то отсюда следует, что все λ_k равны 0. ◄

Определение 7. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ – ортонормированная система элементов гильбертова пространства *H*, *x* – некоторый элемент этого пространства. Числа $c_k = (x, e_k)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента *x* по системе $\{e_k\}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ называется *рядом Фурье* элемента *x* по этой системе.

Теорема 3. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ – ортонормированная система элементов гильбертова пространства *H*. Тогда:

1) для любого элемента $x \in H$ справедливо *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 \leq \| x \|^2, \tag{4}$$

где c_k – коэффициенты Фурье элемента *x* по системе $\{e_k\}$;

2) для любого элемента $x \in H$ его ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится, причем элемент $y = x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ ортогонален всем элементам системы $\{e_k\}$;

3) для сходимости ряда Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ элемента $x \in H$ к x необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2 .$$

Доказательство. 1. В силу ортонормированности системы $\{e_k\}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,\ x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k (x, e_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, x) + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2, \qquad (5)$$

откуда вытекает, что $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|x\|^2$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится и справедливо неравенство (4).

2. Пусть $\{s_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Тогда при $m > n$ получаем

$$\|s_m - s_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\|^2 = (\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k,\ \sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k) = \sum_{k=n+1}^{m} |c_k|^2.$$

Отсюда и из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ следует, что последовательность $\{s_n\}$ является последовательностью Коши, и так как пространство H полно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится.

Для любого $j = 1, 2, \ldots$ при $n \ge j$ имеем

$$(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_j) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0.$$

Отсюда, в силу непрерывности скалярного произведения (см. предложение 3), получаем

$$(x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, e_j) = 0.$$

3. Утверждение 3) следует из равенства (5). ◄

Определение 8. Ортонормированная система элементов $e_1, \ldots, e_k, \ldots$ гильбертова пространства H называется *ортонормированным базисом* в этом пространстве, если для любого элемента $x \in H$ найдется, и притом единственный, набор чисел $a_1, \ldots, a_k, \ldots$, для которого

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k. \qquad (6)$$

Замечание. Легко видеть, что на самом деле ряд (6) является рядом Фурье элемента x по системе $\{e_k\}$, т. е. $a_k = (x, e_k)$.

Определение 9. Система элементов $e_1, \ldots, e_k, \ldots$ гильбертова пространства H называется *максимальной*, если в H не существует элемента $x \neq \vec{0}$, ортогонального всем элементам этой системы.

Теорема 4. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ – ортонормированная система элементов гильбертова пространства H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) система $\{e_k\}$ является ортонормированным базисом пространства H;

2) система $\{e_k\}$ максимальна;

3) для любого элемента $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2,$$

где $c_k = (x, e_k)$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 3) следует из теоремы 3. Докажем эквивалентность утверждений 1) и 2).

Пусть $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в H, $x \in H$ и $x \perp e_k$ для всех k. Тогда все коэффициенты Фурье c_k элемента x равны нулю, и значит, $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = \vec{0}$. Таким образом, система $\{e_k\}$ максимальна.

Пусть $\{e_k\}$ – максимальная ортонормированная система в H, $x \in H$, $c_k = (x, e_k)$. По теореме 3 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится и элемент $y = x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ ортогонален всем элементам системы $\{e_k\}$. Отсюда, в силу максимальности системы $\{e_k\}$, вытекает, что $y = \vec{0}$, т. е. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Следовательно, $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в H. ◄

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: БГУ, 2006. – 430 с.

2. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 724 с.

3. Власова, Е.А. Элементы функционального анализа: учебное пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. – СПб.: Лань, 2022. – 400 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

4. Ильин, В.А. Основы математического анализа учебник: в 2 частях / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – Часть 1. – 2021. – 648 с.

5. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида; пер. с англ. и предисл. В.М. Волосов. – Изд. 2-е. – М.: ЛКИ, 2007. – 624 с. – (Физико-математическое наследие: математика (функциональный анализ)).

6. Кириллов, А.А. Теоремы и задачи функционального анализа: учебное пособие для вузов / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 400 с.

7. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебное пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – Изд. 7-е. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 572 с.

8. Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 272 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

9. Треногин, В.А. Функциональный анализ: учебник / В.А. Треногин. – 4-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

10. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. – 3-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2024. – 560 с.

11. Шлапаков, С.А. Теория функций действительного переменного: методические рекомендации / С.А. Шлапаков, С.М. Бородич. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2013. – 51 с.

Учебное издание

БОРОДИЧ Сергей Митрофанович

КАВИТОВА Татьяна Валерьевна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Курс лекций

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать .2024. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,32. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.