Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра инженерной физики

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. МЕТОДЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ФУНКЦИЙ ГРИНА

Курс лекций

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 51-7:53(075.8)
ББК 22.311я73
Т77

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 20.12.2023.

Авторы: профессор кафедры инженерной физики ВГУ имени П.М. Машерова, доктор физико-математических наук, профессор **Ю.В. Трубников;** старший преподаватель кафедры инженерной физики ВГУ имени П.М. Машерова **М.М. Чернявский**

Р е ц е н з е н т :
профессор кафедры «Информационные системы и технологии»
УО «ВГТУ», доктор физико-математических наук,
профессор *А.А. Корниенко*

Трубников, Ю.В.

Т77 Уравнения математической физики. Методы операционного исчисления и функций Грина : курс лекций / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 92 с.

ISBN 978-985-30-0147-1.

Данный курс лекций подготовлен для студентов математических и IT-специальностей факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова, изучающих как непосредственно дисциплину «Уравнения математической физики», так и смежные ей «Дифференциальные уравнения», «Математическое моделирование», «Основы вычислительной физики». Излагается теоретический материал лекций по разделам «Операционное исчисление» и «Нахождение периодических решений краевых задач с помощью метода функций Грина», приведены задания для самостоятельного выполнения, перечень индивидуальных домашних заданий и некоторая справочная информация.

УДК 51-7:53(075.8)
ББК 22.311я73

ISBN 978-985-30-0147-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление является эффективным математическим аппаратом исследования многих теоретических вопросов и прикладных задач как в самой математике, так и в других областях науки и техники, особенно тех задач, которые связаны с решением дифференциальных, дифференциально-разностных, интегральных, интегро-дифференциальных и других типов операторных уравнений.

Операционное исчисление − один из методов математического анализа, позволяющий рассматривать символ $d/dt = p$ как величину, над которой можно производить определенную систему формальных операций. На основе этого строится соответствующее исчисление. В результате многие операции математического анализа сводятся к более простым алгебраическим действиям.

Решение задач методами операционного исчисления происходит по схеме:

1. От искомых функций переходят к другим функциям − их изображениям.
2. Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями.
3. Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к исходным функциям.

Актуальным методом нахождения решений Т-периодической краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения является метод функций Грина. В представленном курсе лекций детально изложена теория данного метода с подробными доказательствами.

Рекомендуется студентам различных специальностей (1-31 03 03-02 Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность), 6-05-0533-12 Кибербезопасность, 6-05-0533-01 Физика, 1-31 03 07-03 01 Прикладная информатика (веб-программирование и компьютерный дизайн), изучающим операционное исчисление и методы нахождения периодических решений краевых задач для дифференциальных уравнений в рамках учебных дисциплин «Уравнения математической физики», «Дифференциальные уравнения», «Математическое моделирование», «Основы вычислительной физики» и других.

I Основы операционного исчисления

1.1 Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения

Основными понятиями операционного исчисления являются понятия функции-оригинала и функции-изображения.

Рассмотрим комплексную функцию $f(t)$ действительного переменного t.

Определение 1.1. Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям :

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) $f(t)$ – кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, т.е. непрерывная или имеет точки разрыва первого рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек конечное число;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. всегда можно указать такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$. Число s_0 называется показателем роста $f(t)$.

<u>Пример 1.1.1.</u> Показать, что функция

$$f(t) = \begin{cases} e^{5t} \sin t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является функцией-оригиналом. Действительно, условие 1) выполнено в силу задания функции; условие 2) также выполнено, так как e^{5t} и $\sin 7t$ – непрерывные функции при $t \geq 0$. Наконец,

$$\left| e^{5t} \sin 7t \right| \leq e^{5t},$$

так что можно взять $M = 1, s_0 = 5$.

<u>Пример 1.1.2.</u> Являются ли функциями−оригиналами функции

$$а)\, f(t) = \frac{t}{t^2 - 4}; \quad б)\, f(t) = \frac{1}{t}?$$

а) Функция $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$ не является оригиналом, так как при $t = \pm 2$ она имеет разрыв второго рода, т.е. не выполнено условие 2;

б) $f(t) = 1/t$ также не является оригиналом, так как при $t = 0$ она имеет разрыв второго рода.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая *единичная функция Хевисайда*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Использование буквы h обусловлено тем историческим фактом, что Оливер

Хевисайд $(Oliver\ Heaviside, 1850-1925)$, создатель операционного исчисления, использовал в качестве единичной функции функцию

$$H(t)=\begin{cases}1, t>0,\\ \frac{1}{2}, t=0,\\ 0, t<0.\end{cases}$$

Очевидно, что

$$\phi(t)h(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

так что если $\phi(t)$ удовлетворяет условиям 2) и 3), то $\phi(t)\,h(t)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функции-оригиналы.

Для дальнейшего нам потребуется понятие аналитической функции. Напомним основные определения.

Пусть комплекснозначная функция $w=f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z, а точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Обозначим $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$.

Определение 1.2. Функция $w=f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке $z\in D$, если отношение $\Delta w/\Delta z$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется *производной функции* $f(z)$ и обозначается символом $f'(z)$, так что по определению

$$w'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Возникает вопрос: при каких условиях функция $w=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ будет дифференцируемой в данной точке ?

Теорема 1.1. *Если функция* $w=u(x,y)+iv(x,y)$ *определена в некоторой окрестности точки* $z=x+iy$, *причем в этой точке действительные функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *дифференцируемы, то для дифференцируемости функции* $w=f(z)$ *в точке* z *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.1.1}$$

называемые условиями Коши – Римана.

Определение 1.3. Функция $w=f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Для любой аналитической функции $f(z)$ справедливы равенства

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1.1.2)$$

Напомним, что область − это связное открытое множество, удовлетворяющее следующим условиям: при любом разбиении его на две части хотя бы одна из этих частей содержит предельную точку другой, и каждая точка входит в него вместе с некоторой своей окрестностью.

<u>Пример 1.1.3</u>. Показать, что функция $w=e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Найти ее производную. Находим действительную $\operatorname{Re} w$ и мнимую $\operatorname{Im} w$ части функции: так как

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^x\cos y+ie^x\sin y,$$

то $u=\operatorname{Re} w=u(x,y)=e^x\cos y$, $v=\operatorname{Im} w=v(x,y)=e^x\sin y$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y, \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y, \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,$$

т.е. выполнены условия Коши – Римана, следовательно функция $w=e^x$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Найдем производную в соответствии с одним из равенств (1.1.2)

$$w'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)=e^{x+iy}=e^z,$$

т.е. и для функций комплексного аргумента справедливо равенство $\left(e^z\right)'=e^z$.

<u>Пример 1.1.4.</u> Проверить, является ли функция $w=z^2$ аналитической. Найти ее производную. Находим действительную $u=\operatorname{Re} w$ и мнимую $v=\operatorname{Im} w$ части функции: $w=z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2-y^2+2ixy$, т.е. $u=x^2-y^2, v=2xy$. Проверим выполнение условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \frac{\partial v}{\partial y}=2x, \frac{\partial u}{\partial y}=-2y, -\frac{\partial v}{\partial x}=-2y.$$

Условия (1.1.1) выполняется, следовательно функция $w=z^2$ дифференцируема и аналитична во всех точках комплексной плоскости z. Производную найдем по одной из формул (1.2):

$$\left(z^2\right)'=\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x}+i\frac{\partial 2xy}{\partial x}=2x+i2y=2\left(x+iy\right)=2z.$$

<u>Пример 1.1.5.</u> Является ли функция $w=z\overline{z}$ ($\overline{z}$ − число, сопряженное числу $z=x+yi$) аналитической хотя бы в одной точке? Так как $z\overline{z}=x^2+y^2$, то $u=x^2+y^2, v\equiv 0$. Условия Коши – Римана в этом случае имеют вид $2x=0$, $2y=0$ и выполняются только в точке $(0,0)$. Следовательно,

функция $w = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Определение 1.4. *Изображением оригинала* $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного аргумента $p = s + i\sigma,$ определяемая интегралом

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.3}$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа* (Пьер Симон Лаплас (1749–1827) – французский математик, астроном и физик). Соответствие между $f(t)$ и $F(p)$ записывается в виде $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \fallingdotseq f(t)$.

Теорема 1.2 (существование изображения). *Всякий оригинал имеет изображение* $F(p)$, *являющееся аналитической функцией в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = s > s_0$, *где* s_0 *– показатель роста* $f(t)$.

<u>Пример 1.1.6.</u> Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

$$a)\, f(t) = e^{\alpha t},\, b)\, f(t) = t,\, c)\, f(t) = \sin 3t.$$

$$a)\ F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{\alpha t - pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt = \left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Изображение определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Таким образом, $e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$.

$$b)\ F(p) = \int_0^\infty te^{-pt}dt = -\left.\frac{te^{-pt}}{p}\right|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2};$$

для $\operatorname{Re} p > 0$ выполняется равенство $\lim\limits_{t\to\infty} te^{-pt} = 0$. Таким образом, $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$.

$c)$ Так как $\sin 3t = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i3t} - e^{-i3t}\right)$, то

$$F(p) = \int_0^\infty \sin 3t e^{-pt}dt = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{i3t} - e^{-i3t}\right)e^{-pt}dt = \frac{1}{2i}\left[\int_0^\infty e^{-(p-3i)t}dt - \int_0^\infty e^{-(p+3i)t}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left.\frac{e^{-(p-3i)t}}{-(p-3i)}\right|_0^\infty - \left.\frac{e^{-(p+3i)t}}{-(p+3i)}\right|_0^\infty\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-3i} - \frac{1}{p+3i}\right] = \frac{1}{2i}\,\frac{p+3i-p+3i}{p^2+9} = \frac{3}{p^2+9}.$$

Таким образом, $\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+9}$.

Задания для самостоятельной работы АЗ−1

1.1 Проверить, какие из указанных функций являются функциями-оригиналами:

1.1.1 $f(t)=b^t,\ b>0,\ b\neq 1;$

1.1.2 $f(t)=e^{(2+4i)t};$

1.1.3 $f(t)=\dfrac{1}{t-3};$

1.1.4 $f(t)=t^2+5;$

1.1.5 $f(t)=\dfrac{1}{t^2+2};$

1.1.6 $f(t)=tgt;$

1.1.7 $f(t)=e^t\cos t;$

1.1.8 $f(t)=\dfrac{3t}{t-9};$

1.2. Пользуясь определением, найти изображения следующих функций:

1.2.1. $f(t)=te^{2t};$

1.2.2. $f(t)=\sin 5t;$

1.2.3. $f(t)=t^{\alpha}\ (\alpha>1);$

1.2.4. $f(t)=1+5t;$

1.2.5. $f(t)=2\sin t-\cos t;$

1.2.6. $f(t)=t+3e^{-2t};$

1.2.7. $f(t)=\cos\omega t;$

1.2.8. $f(t)=\sin^2 t;$

1.2 Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность. Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений, т.е. если

$$f_1(t)\ \risingdotseq\ F_1(p),\quad f_2(t)\ \risingdotseq\ F_2(p),$$

c_1 и c_2 − произвольные постоянные числа, то

$$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\ \risingdotseq\ c_1F_1(p)+c_2F_2(p).$$

Пример 1.2.1. Найти изображения функций

$a)\quad f(t)=1+t;\qquad b)\ f(t)=5\sin t+7\cos t;\qquad c)\ f(t)=4+\dfrac{1}{2}e^{-t}.$

Пользуясь свойством линейности и равенствами $1\risingdotseq\dfrac{1}{p},\ t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2},$ находим $1+t\risingdotseq\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{p+1}{p^2}.$

$b)\quad \sin t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2+1},\ \cos t\risingdotseq\dfrac{p}{1+p^2},$ тогда

$$5\sin t+7\cos t\risingdotseq\frac{5}{p^2+1}+\frac{7p}{p^2+1}=\frac{5+7p}{p^2+1}.$$

$c)\quad 4=4\cdot 1 \fallingdotseq \dfrac{4}{p},\ e^{-t} \fallingdotseq \dfrac{1}{p+1}$, тогда

$$4+(1/2)e^{-t} \fallingdotseq 4\frac{1}{p}+(1/2)\frac{1}{p+1}=\frac{9p+8}{2p(p+1)}.$$

2. Подобие. Если $f(t) \fallingdotseq F(p),\ \lambda>0,$ то $f(\lambda t) \fallingdotseq \dfrac{1}{\lambda}F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$, т.е. умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Пример 1.2.2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций: $a)\ f(t)=e^{5t}$, $b)\ f(t)=\sin\omega t$, $c)\ f(t)=\mathrm{sh}3t$.

$$a)\quad e^{t} \fallingdotseq \frac{1}{p-1},\ \text{тогда } e^{5t} \fallingdotseq \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{p}{5}-1}=\frac{1}{p-5}.$$

$$b)\quad \sin t \fallingdotseq \frac{1}{p^2+1};\ \sin\omega t \fallingdotseq \frac{1}{\omega}\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

$$c)\quad \mathrm{sh}t \fallingdotseq \frac{1}{p^2-1},\ \mathrm{sh}3t \fallingdotseq \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2-1}=\frac{3}{p^2-9}.$$

3. Смещение (затухание). Если

$$f(t) \fallingdotseq F(p),\ \ a=const, \text{ то } e^{at}f(t) \fallingdotseq F(p-a),$$

т.е. умножение оригинала на функцию e^{at} влечет за собой смещение переменной p.

Пример 1.2.3.

$$a)\ e^{\alpha t}\sin\omega t \fallingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2};\ b)\ e^{\alpha t}\cos\omega t \fallingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2};$$

$$c)\ e^{\alpha t}\mathrm{ch}\omega t \fallingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}.$$

4. Запаздывание. Если $f(t) \fallingdotseq F(p),\tau>0,$ то $f(t-\tau) \fallingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, т.е. запаздывание оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$. Свойство запаздывания удобно применять при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

Определение 1.5. Функция

$$h(t-\tau)=1(t-\tau)=\begin{cases}1, t\geq\tau,\\ 0,\ t<\tau\end{cases}$$

называется обобщенной единичной функцией.

Так как $h(t)=1(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p}$, то $h(t-\tau)=1(t-\tau)\risingdotseq\dfrac{1}{p}e^{-p\tau}$.

Запаздывающую функцию

$$g(t)=\begin{cases}f(t-\tau), t\geq\tau,\\ 0,\ t<\tau\end{cases}$$

можно записать как $g(t)=f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)$.

<u>Пример 1.2.4.</u> Найти изображение функции $f(t-1)=(t-1)^2\cdot 1(t-1)$. Для функции $f(t)=t^2\cdot 1(t)$ имеем $t^2 1(t)\risingdotseq\dfrac{2}{p^3}$. По теореме запаздывания $(t-1)^2\cdot 1(t-1)\risingdotseq e^{-p}\dfrac{2}{p^3}$. Если рассмотреть функцию $f_1(t)=(t-1)^2\cdot 1(t)=(t^2-2t+1)\cdot 1(t)$, то по свойству линейности

$$(t-1)^2\cdot 1(t)\risingdotseq\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

<u>Пример 1.2.5.</u> Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}0, t<0, t\geq 4,\\ t, 0\leq t\leq 2,\\ 4-t, 2<t<4.\end{cases}\qquad(1.2.1)$$

Изобразим функцию $f(t)$ графически (рисунок 1.1):

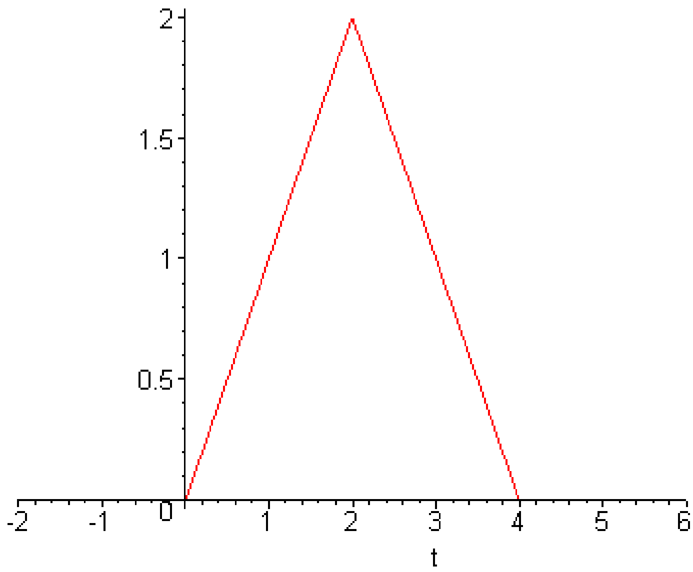


Рисунок 1.1 – График функции (1.2.1)

Запишем ее одним аналитическим выражением, используя функцию Хевисайда

$$1(t):\ f(t)=t\cdot 1(t)-t\cdot 1(t-2)+(4-t)\cdot 1(t-2)-(4-t)\cdot 1(t-4),$$

т. е. после приведения подобных

$$f(t)=t\cdot 1(t)+(-t+4-t)\cdot 1(t-2)+(t-4)\cdot 1(t-4)=$$
$$t\cdot 1(t)-2(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-4)\cdot 1(t-4).$$

Изображение функции $f(t)$ равно

$$f(t)\risingdotseq\frac{1}{p^2}-2\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-4p}}{p^2}=F(p).$$

Задания для самостоятельной работы АЗ-2

2.1 Найти изображения следующих функций:

2.1.1 $f(t)=\sin^2 t;$

2.1.2 $f(t)=\sin mt\cos nt;$

2.1.3 $f(t)=\cos^3 t;$

2.1.4 $f(t)=\sin mt\sin nt;$

2.1.5 $f(t)=e^{2t}\sin t;$

2.1.6 $f(t)=e^{-t}t^3;$

2.1.7 $f(t)=e^{3t}\sin^2 t;$

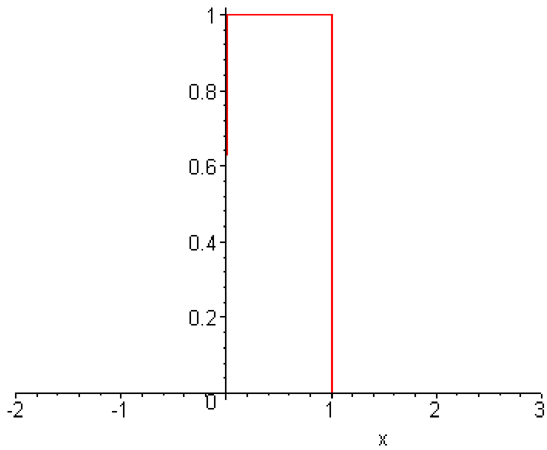
2.1.8 $f(t)=te^t\cos t;$

2.1.9 $f(t)=\sin(t-b)\cdot 1(t-b);$

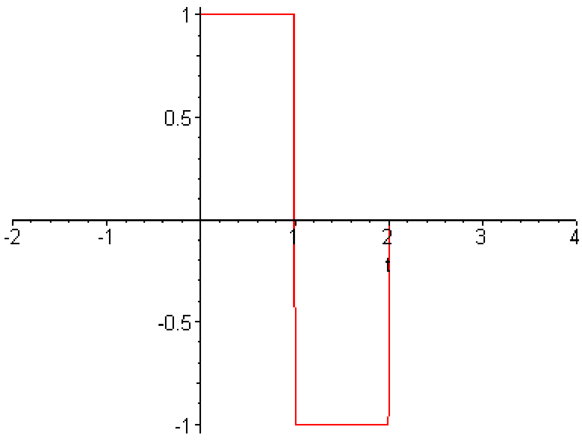
2.1.10 . $f(t)=\cos^2(t-b)\cdot 1(t-b).$

2.2 Найти изображения функций, заданных графически:

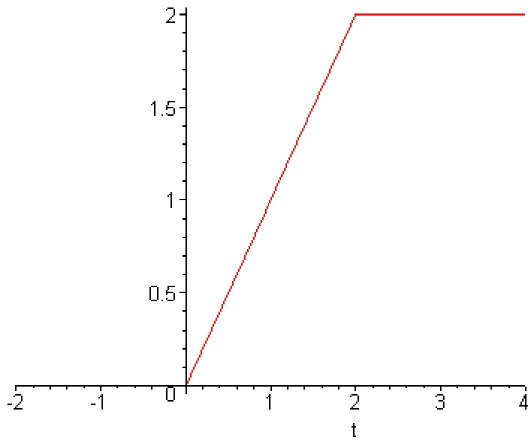
2.2.1



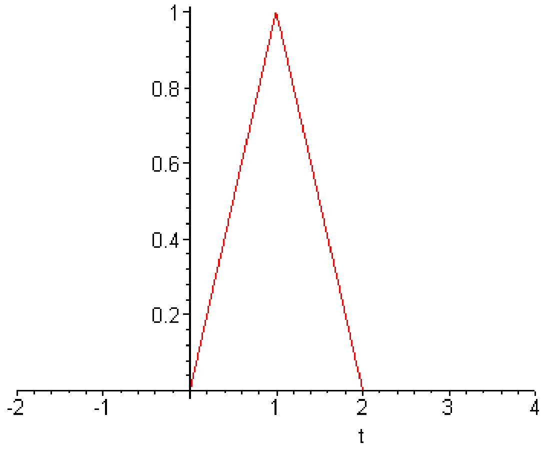
2.2.2



2.2.3



2.2.4



5. <u>Дифференцирование оригинала.</u> Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и функции $f'(t),\ f''(t), \dots,\ f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0); \quad f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3F(p) - p^2 f(0) - p\,f'(0) - f''(0);$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Свойство дифференцирования оригинала вместе со свойством линейности широко используется при решении линейных дифференциальных уравнений.

<u>Пример 1.2.6.</u> Пользуясь свойством дифференцирования оригинала, найти изображения функций: $a)\sin^2 t;\ b)\cos^4 t.$ Если $f(t) = \sin^2 t,$ то $f(t) \risingdotseq F(p),$

$$f''(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \quad f(0) = 0, \quad f''(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}.$$

Следовательно, $\dfrac{2}{p^2+1} = pF(p),$ откуда $F(p) = \dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)} \risingdotseq \sin^2 t.$

Далее, пусть $f(t) = \cos^4 t$ и $f(t) \risingdotseq F(p),$ $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$ тогда

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Но $f(0) = 1,$ $f'(t) = -4\cos^3 t\sin t,$ $f'(0) = 0,$ $f''(t) = 12\cos^2 t\sin^2 t - 4\cos^4 t.$

Далее

$$12\cos^2 t\sin^2 t - 4\cos^4 t = 3\sin^2 2t - 4\cos^4 t = \frac{3}{2}(1 - \cos 4t) - 4\cos^4 t \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+16}\right) - 4F(p).$$

Таким образом, $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+16}\right)-4F(p)=p^2F(p)-p,$ т. е.

$$\frac{24}{p\left(p^2+16\right)}+p=\left(p^2+4\right)F(p).$$

Отсюда $F(p)=\dfrac{p^4+16p^2+24}{p\left(p^2+4\right)\left(p^2+16\right)}.$

6. Дифференцирование изображения. Если $f(t)\risingdotseq F(p),$ то

$$F'(p)\risingdotseq -t\,f(t);\; F''(p)\risingdotseq(-1)^2t^2f(t);\ldots,F^{(n)}(p)\risingdotseq(-1)^nt^nf(t),$$

т. е. дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $(-t)$.

Пример 1.2.7. Найти изображение функций $a)$ $f(t)=t^n;$ $b)$ $f(t)=t^2e^t.$

$a)$ Так как $1(t)\risingdotseq\dfrac{1}{p},$ то по свойству дифференцирования изображения имеем $-t\cdot 1\risingdotseq-\dfrac{1}{p^2},$

т.е. $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2},\quad -t^2\risingdotseq-\dfrac{2}{p^3},\quad t^2\risingdotseq\dfrac{2}{p^3},\ldots,t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}.$

$b)$ Так как $e^t\risingdotseq\dfrac{1}{p-1},$ то $-te^t\risingdotseq\left(\dfrac{1}{p-1}\right)'=-\dfrac{1}{(p-1)^2},$

т. е. $te^t\risingdotseq\dfrac{1}{(p-1)^2}.$ Далее $-t\left(te^t\right)\risingdotseq-\dfrac{2}{(p-1)^3},$ т. е. $t^2e^t\risingdotseq\dfrac{2}{(p-1)^3}.$

7. Интегрирование оригинала. Если $f(t)\risingdotseq F(p),$ то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\risingdotseq$

т.е. интегрирование оригинала от 0 до t соответствует делению его изображения на p.

Пример 1.2.8. Найти изображение функции $f(t)=\int\limits_0^t e^\tau d\tau$. Так как $e^t\risingdotseq\dfrac{1}{p-1},$ то по свойству интегрирования оригинала

$$\int\limits_0^t e^\tau d\tau\risingdotseq\frac{1}{p}\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p(p-1)}.$$

8. Интегрирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(p)dp$ сходится, то $\int_p^\infty F(p)dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$, т. е. интегрированию изображения от p до ∞ соответствует деление его оригинала на t.

Пример 1.2.9. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$. Так как $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Задания для самостоятельной работы АЗ-3

3.1 Найти изображения следующих функций:

3.1.1 $f(t) = t\sin\omega t$;

3.1.2 $f(t) = \cos^3 t$;

3.1.3 $f(t) = te^t$;

3.1.4 $f(t) = \sin^4 t$;

3.1.5 $f(t) = t^2\cos t$;

3.1.6 $f(t) = (t+1)\sin 2t$;

3.1.7 $f(t) = t\left(e^t + \operatorname{ch} t\right)$;

3.1.8 $f(t) = t\operatorname{sh} t$.

3.2 Пользуясь свойствами об интегрировании оригинала и изображения, найти изображение следующих функций:

3.2.1 $f(t) = \int_0^t \sin\tau d\tau$;

3.2.2 $f(t) = \int_0^t \tau\operatorname{sh}\tau d\tau$;

3.2.3 $f(t) = \int_0^t \cos^2\omega\tau d\tau$;

3.2.4 $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

3.2.5 $f(t) = \frac{e^t-1}{t}$;

3.2.6 $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$;

3.2.7 $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$;

3.2.8 $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

9. Умножение изображений. Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части последнего равенства называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается $f_1(t) * f_2(t)$.

Пример 1.2.10. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$. Так как

$$F(p)=\frac{1}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p^2+\omega^2} \risingdotseq \frac{1}{\omega}\sin\omega t, \text{ то}$$

$$F(p) \risingdotseq \int_0^t \frac{1}{\omega}\sin\omega t\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^t\left[\cos\omega(2\tau-t)-\cos\omega t\right]d\tau =$$

$$=\frac{1}{2\omega^2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin\omega(2\tau-t)\Big|_0^t-\tau\cos\omega t\Big|_0^t\right]=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)=$$

$$=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t)-\omega t\cos\omega t, \text{ т. е. } \frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \risingdotseq \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t).$$

10. Умножение оригиналов. Пусть даны два оригинала $f(t)$ и $g(t)$ с показателями роста s_1 и s_2. Их произведение также является оригиналом, причем

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(q)G(p-q)dq, \tag{1.2.2}$$

где $a > s_1$ и $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

1.3 Обратное преобразование Лапласа

Рассмотрим две теоремы, называемые теоремами разложения, позволяющие по заданному изображению $F(p)$ находить соответствующий оригинал $f(t)$.

Теорема 1.3. *Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots \quad (t>0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$, т. е.

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}} \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}=f(t). \tag{1.3.1}$$

Пример 1.3.1. Найти оригинал $f(t)$, если $a)\ F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$, $b)\ F(p)=\frac{p}{p^2+1}$. Решение:

$$a)\ F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{3!\,p^3}+\frac{1}{5!\,p^5}-...\right)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3!\,p^4}+\frac{1}{5!\,p^6}-...\ .$$

По теореме 1.3 $f(t)=t-\frac{1}{3!}\frac{t^3}{3!}+\frac{1}{5!}\frac{t^5}{5!}-...,\ t>0;$

$$b)F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-...\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-...,$$

где $\left|\frac{1}{p}\right|^2<1,$ т.е. $|p|>1.$ Следовательно,

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos t.$$

Теорема 1.4. *Пусть функция* $F(p)$*:*

1) *мероморфна и правильна в некоторой полуплоскости* $\operatorname{Re} p>s_0$;

2) *существует система окружностей*

$$C_n:|\,p|=R_n,\ R_1<R_2<R_3<...,\ R_n\to\infty,$$

на которой $F(p)$ *стремится к нулю равномерно относительно* $\arg p$;

3) для любого $a>s_0$ *абсолютно сходится интеграл* $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)dp.$

Тогда оригиналом $F(p)$ *служит (умноженная на* $\eta(t)$*) функция*

$$f(t)=\sum_{(p_k)}\underset{p_k}{res}\,F(p)e^{pt},$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k *функции* $F(p)$ *в порядке неубывания их модулей.*

В частности, если $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}-$ правильная рациональная дробь и $p_1,p_2,...,p_l$ – корни знаменателя $R(p)$ кратности $k_1,k_2,...,k_l$ $(k_1+k_2+...+k_l=n),$ то оригинал $f(t),$ соответствующий изображению $F(p),$ определяется формулой

$$f(t)=\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{(k_i-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}}\left[(p-p_i)^{k_i}F(p)e^{pt}\right].\qquad(1.3.2)$$

Если p_k-простые корни знаменателя $R(p),$ то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (1.3.3)$$

<u>Пример 1.3.2.</u> Найти оригинал по его изображению:

$$a)\; F(p)=\frac{p-3}{p^2+4}, \quad b)\; F(p)=\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2}, \quad c)\; F(p)=\frac{1}{p^3(p-1)}.$$

$a)\; Q(p)=p-3, \quad R(p)=p^2+4, \quad R'(p)=2p,$ т.е. корни знаменателя $p_1=2i$ и $p_2=-2i$ (простые). Далее используем формулу (1.3.3):

$$f(t)=\frac{2i-3}{2\cdot 2i}e^{2it}+\frac{-2i-3}{2(-2i)}e^{-2it}=\frac{1}{4i}\left[2i\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)-3\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}-\frac{3}{2}\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}==\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t.$$

$b)\; Q(p)=p,\; R(p)=\left(p^2-1\right)^2$, корни знаменателя $p_1=1$ и $p_2=-1$ каждый кратности 2. По формуле (1.3.2)

$$f(t)=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{p}{(p-1)^2(p+1)^2}e^{pt}\right]+\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left[(p+1)^2\frac{p}{(p-1)^2(p+1)^2}e^{pt}\right]=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]+\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right]=\lim_{p\to 1}\left[\frac{\left(e^{pt}+tpe^{pt}\right)(p+1)^2-2p(p+1)e^{pt}}{(p+1)^4}\right]+$$

$$+\lim_{p\to -1}\left[\frac{(e^{pt}+tpe^{pt})(p-1)^2-2p(p-1)e^{pt}}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{16}\left(4e^{t}+4te^{t}-4e^{t}\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\left(4e^{-t}-4te^{-t}-4e^{-t}\right)=\frac{1}{4}t\left(e^{t}-e^{-t}\right)=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}t.$$

$c)\; R'(p)=4p^3--3p^2,\; p_1=1,\; p_2=0$ (кратность этого корня равна трем). Таким образом,

$$f(t)=\frac{1}{4-3}e^{1\cdot t}+\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left[p^3\frac{1}{p^3(p-1)}e^{pt}\right]=e^{t}+\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)=$$

$$=e^{t}+\frac{1}{2}\left(-t^2-t+t-2t-2\right)=e^{t}-\frac{t^2}{2}-t-1.$$

На практике удобен *следующий способ нахождения оригиналов* для изображений, являющихся *рациональными функциями*: функцию разлагают на простейшие дроби и, используя таблицу основных оригиналов и их изображений, находят оригиналы для каждой простой дроби.

<u>Пример 1.3.3.</u> Найти оригинал по его изображению:

$$a)\; F(p)=\frac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}, \; b)\; F(p)=\frac{p+5}{(p+1)\left(p^2-2p+5\right)}.$$

$a)$ Разлагаем дробь на сумму простых дробей

$$\frac{1}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p-1}+\frac{cp+d}{p^2+4}.$$

Так как равенство $a(p-1)\left(p^2+4\right)+bp\left(p^2+4\right)+(cp+d)p(p-1)\equiv 1$ должно выполняться при всех p, то полагая $p=0, p=1, p=2i, p=-2i,$ получим

$$a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{5}, c=\frac{1}{20}, d=-\frac{1}{5}, \text{ т.е.}$$

$$F(p)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Оригиналы для каждой из дробей находим из таблицы и, используя свойство линейности, получаем $f(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t.$

$b)$ $\frac{p+5}{(p+1)\left(p^2-2p+5\right)}=\frac{a}{p+1}+\frac{bp+c}{p^2-2p+5}.$ Находя коэффициенты $a, b, c,$ получаем

$$F(p)=\frac{1}{2(p+1)}+\frac{-p+5}{2\left(p^2-2p+5\right)}=\frac{1}{2(p-1)}-\frac{p-1}{2\left[(p-1)^2+2^2\right]}+\frac{4}{2\left[(p-1)^2+2^2\right]},$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^t\left(\cos 2t-4\sin 2t\right).$$

<u>Пример 1.3.4.</u> Найти оригинал, если $F(p)=\frac{e^{-p}}{p+1}.$ Наличие множителя e^{-p} указывает, что нужно применить свойство запаздывания. Здесь $\tau=1,$ $\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t},$ поэтому $\frac{e^{-p}}{p+1}\risingdotseq e^{-(t-1)}\cdot 1(t-1).$

Рассмотрим подробнее важный случай формулы (1.3.3), когда изображение $F(p)$ имеет вид

$$F(p)=\frac{Q(p)}{pR(p)}, \qquad (1.3.4)$$

где степень $Q(p)$ не превосходит степени $R(p)$ и $R(p)$ имеет простые корни, отличные от нуля. В этом случае получаем, что

$$\frac{Q(p)}{pR(p)}\risingdotseq\frac{Q(0)}{R(0)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{Q(p_k)}{p_k R'(p_k)}e^{p_k t}, \qquad (1.3.5)$$

где сумма берется по всем корням многочлена $R(p)$.

Заметим, что если многочлен $R(p)$ имеет действительные коэффициенты, то каждому его комплексному корню p отвечает комплексно сопряженный корень $\bar{p}$. Действительно,

$$R(\bar{p}) = a_n(\bar{p})^n + a_{n-1}(\bar{p})^{n-1} + \ldots + a_0 = \overline{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0} = R\overline{(p)} = 0.$$

Если, кроме того, и многочлен $Q(p)$ имеет действительные коэффициенты, то $\dfrac{Q(\bar{p})}{R'(\bar{p})}e^{\bar{p}t} = \overline{\dfrac{Q(p)}{R'(p)}e^{pt}}$ и, следовательно, сумма выражений $\dfrac{Q(p)}{R'(p)}e^{pt}$, подсчитанных для сопряженных корней $p = p_k$ и $p = \bar{p}_k$, равна $2\operatorname{Re}\dfrac{Q(p_k)}{R'(p_k)}$.

Таким образом, если многочлены $Q(p)$ и $R(p)$ имеют действительные коэффициенты, то равенство (1.3.5) можно представить в виде

$$\frac{Q(p)}{R(p)} \risingdotseq \sum \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t} + 2\operatorname{Re}\sum \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}, \tag{1.3.6}$$

где первая сумма распространена на все действительные корни многочлена $R(p)$, а вторая – на все комплексные корни с положительными мнимыми частями.

Заметим, что каждый член формулы (1.3.6), соответствующий корню $p_k = s_k + i\sigma_k$, можно представлять как записанное в комплексной форме колебание

$$\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{s_k t}\left(\cos\sigma_k t + i\sin\sigma_k t\right).$$

Отсюда ясно, что действительным корням $(\sigma_k = 0)$ соответствуют апериодические колебания, комплексным корням с отрицательными действительными частями s_k – затухающие колебания, чисто мнимым корням $(s_k = 0)$ – гармонические колебания. Положительные действительные корни или комплексные корни с положительными действительными частями вообще не могут иметь места, если рассматриваемая система не допускает колебаний с неограниченно возрастающей амплитудой.

Для таких систем колебание, соответствующее установившемуся режиму, имеет вид

$$f(t) = 2\operatorname{Re}\sum \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{\sigma_k t},$$

где сумма распространена на все чисто мнимые корни $p_k = i\sigma_k$ с неотрицательными мнимыми частями.

Импульсные функции. Функции $F(p)=1, p, p^2,...,$ которые даже не стремятся к нулю при $p\to\infty$, можно считать изображениями в условном смысле. Эти условные изображения и соответствующие им оригиналы, так называемые импульсные функции, были введены Дираком (1902–1984, английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики) и оказались полезными в ряде прикладных задач, в которых приходится иметь дело с величинами, имеющими характер мгновенного толчка.

Рассмотрим функцию $\delta_h(t)$, заданную следующим образом:

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, \; t<0, \; t>h, \\ \dfrac{1}{h}, \; 0<t<h.\end{cases}$$

Она представляет величину, которая отлична от нуля лишь на интервале $(0, h)$, где имеет постоянное значение $\dfrac{1}{h}$, суммарный эффект ее действия равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(t)dt = \int\limits_0^h\dfrac{dt}{h}=1.$

Предположим теперь, что $h\to 0$; семейство функций $\delta_h(t)$ расходится, но формально можно рассмотреть функцию $\delta(t)$, которую будем считать пределом такого семейства,

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h(t),$$

и называть *импульсной функцией нулевого порядка*, или, короче, δ-функцией. Импульсная функция $\delta(t)$ равна нулю всюду, кроме точки $t=0$, где она равна ∞, и тем не менее для нее считается справедливым соотношение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$, предельное для такого же соотношения с функцией $\delta_h(t)$.

Таким образом, δ-функция представляет собой условное сокращенное обозначение для вполне определенного предельного процесса, который часто рассматривается в физике: бесконечно большая величина, действующая в бесконечно малый промежуток с суммарным эффектом, равным 1. Введение этой функции упрощает вычисления, связанные с таким предельным процессом: вместо того, чтобы производить выкладки до перехода к пределу в окончательном результате, переходят к пределу сразу, до выкладок. Во многих физических задачах законность такой перестановки оправдана.

Условимся считать, что изображение δ-функции получается как предельное для изображения функции $\delta_h(t)=\dfrac{1}{h}\left[1(t)-1(t-h)\right]$, которое по теореме запаздывания равно $\delta_h(t) \risingdotseq \frac{1-e^{-ph}}{ph}$. Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, получим

$$\delta(t) \risingdotseq \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ph}}{ph} = 1. \qquad (1.3.7)$$

На δ-функцию распространяются основные правила операционного метода, например, теорема запаздывания приводит к равенству

$$\delta(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}.$$

Пример 1.3.5. Точечная масса m совершает прямолинейные колебания, причем сопротивлением среды мы пренебрегаем, а восстанавливающая сила $m\omega^2 x$ пропорциональна смещению. В моменты времени $t_k = k\tau,\ k = 0,1,2,\dots$ массе сообщаются импульсы величины a. Найти движение частицы, если начальное отклонение и начальная скорость равны нулю.

Решение. Уравнение движения имеет вид

$$mx'' + m\omega^2 x = a\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau),$$

где $\delta(t)$ – импульсная функция. Решение операторного уравнения

$$X(p) = \frac{a}{m}\cdot\frac{1}{p^2+\omega^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau p} = \frac{a}{m}\cdot\frac{1}{(p^2+\omega^2)\left(1-e^{-\tau p}\right)}$$

удовлетворяет условиям второй теоремы разложения. Согласно этой теореме оригинал представляет собой сумму вычетов функции $X(p)e^{pt}$ во всех ее полюсах: $p=0, p=\pm i\omega$ и $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}\ (k=1,2,\dots)$. Если τ не является целым кратным $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, что мы и предположим, то все полюсы простые, и, найдя вычеты, мы получим окончательно:

$$x(t) = \frac{a}{m\omega^2}\left[\frac{1}{\tau} - \frac{\omega\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t\right].$$

Задания для самостоятельной работы АЗ-4

4 Найти оригиналы по заданному изображению:

4.1 $F(p) = \frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; 4.2 $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$;

4.3 $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$;

4.4 $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$;

4.5 $F(p)=\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$;

4.6 $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)}$;

4.7 $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$;

4.8 $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$;

4.9 $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-p}}{p^2}$;

4.10 $F(p)=\dfrac{e^{-p/3}}{p\left(p^2+4\right)}$.

Заметим теперь, что Хевисайд нисколько не заботился об обосновании применяемых им методов и в ряде случаев приходил к неверным результатам. Обоснование операционного метода было дано лишь в двадцатых годах прошлого столетия Бромвичем и Карсоном, связавшими этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований, которым с успехом пользовались Коши, Лаплас и другие математики.

Приведем общую формулу, определяющую функцию-оригинал по ее изображению.

Напомним, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке t_0, если существуют положительные постоянные $A, \alpha \le 1$ и h_0 такие, что

$$|f(t_0+h)-f(t_0)| \le A|h|^{\alpha} \tag{1.3.8}$$

для всех $h, |h| \le h_0$.

Теорема 1.5. *Если функция $f(t)$ является оригиналом, т.е. удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, справедливо равенство*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp, \tag{1.3.9}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = a > s$ и понимается в смысле главного значения (т. е. как предел интеграла вдоль отрезка $(a-ib,\, a+ib)$ при $b\to\infty$).

Непосредственно из сформулированной теоремы следует

Теорема 1.6. *Оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$.*

Приведем еще условия, достаточные для того, чтобы заданная функция комплексного переменного $F(p)$ служила изображением некоторого оригинала.

Теорема 1.7. *Если функция* $F(p)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > s,$ *стремится к нулю при* $|p| \to \infty$ *в любой полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geq a > s$ *равномерно относительно* $\arg p$ *и интеграл*

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$$

абсолютно сходится, то $F(p)$ *является изображением функции*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)dp.$$

1.4 Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение $n-$го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t). \tag{1.4.1}$$

Требуется найти решение уравнения (1.4.1), удовлетворяющее условиям

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \tag{1.4.2}$$

Будем считать, что искомая функция $y(t),$ ее производные и функция $f(t)$ являются оригиналами. Пусть $y(t) \fallingdotseq Y(p),\ f(t) \fallingdotseq F(p).$ Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности преобразования Лапласа, перейдем в уравнении (1.4.1) от оригиналов к изображениям:

$$\left[p^n Y(p) - p^{n-1} c_0 - p^{n-2} c_1 - \ldots - c_{n-1}\right] + a_1\left[p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} c_0 - \ldots - c_{n-2}\right] + \ldots$$
$$+ a_{n-1}\left[pY(p) - c_0\right] + a_n Y(p) = F(p).$$

Это *уравнение* называется <u>*операторным.*</u> Разрешим его относительно $Y(p)$:

$$Y(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) = F(p) + c_0\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) +$$
$$+ c_1\left(p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots + c_{n-1},$$

т. е. $Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$ $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ – алгебраические многочлены от p. Таким образом,

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \tag{1.4.3}$$

Определение 1.6. Равенство (1.4.3) называют *операторным решением* дифференциального уравнения (1.4.1). Оно имеет более простой вид, если все начальные условия равны нулю, т.е.

$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0.$$

Тогда

$$Y(p)=\frac{F(p)}{Q_n(p)}.$$

<u>Пример 1.4.1.</u> Решить операционным методом дифференциальное уравнение

$$y''-3y'+2y=12e^{3t} \tag{1.4.4}$$

при начальных условиях $y(0)=2,\ y'(0)=6.$ Пусть $y(t)\risingdotseq Y(p),$ тогда

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-2;$$

$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-2p-6;\ e^{3t}\risingdotseq\frac{1}{p-3}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение (1.4.4), получим операторное уравнение

$$p^2Y(p)-2p-6-3\left[pY(p)-2\right]+2Y(p)=\frac{12}{p-3}.$$

Отсюда

$$Y(p)=\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Далее находим $y(t)$. Можно разложить полученную дробь на сумму простейших дробей

$$Y(p)=\frac{a}{p-1}+\frac{b}{p-2}+\frac{c}{p-3},$$

но так как корни знаменателя простые, то удобно воспользоваться второй теоремой разложения (формула (3.3)), в которой $Q(p)=2p^2-6p+12,$

$$R'(p)=(p-2)(p-3)+(p-1)(p-3)+(p-1)(p-2).$$

Таким образом,

$$y(t)=\frac{8}{(-1)(-2)}e^{1\cdot t}+\frac{8}{1\cdot(-1)}e^{2\cdot t}+\frac{12}{2\cdot 1}e^{3\cdot t}=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}.$$

<u>Пример 1.4.2.</u> Решить операционным методом

$$y''+y=2\cos t,\quad y(0)=0,\ y'(0)=-1.$$

Пусть

$$y(t)\risingdotseq Y(p),\ y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p),$$

$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+1,\ \cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1},$$

тогда

$$p^2Y(p)+1+Y(p)=\frac{2p}{p^2+1},$$

отсюда

$$Y(p)=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал для $Y(p)$. Оригиналом для функции $\frac{1}{p^2+1}$ является $\sin t$. Для нахождения оригинала для функции $\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ воспользуемся свойством 6 о дифференцировании изображения :

$$\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}=-\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' \risingdotseq t\sin t,$$

значит $y(t)=t\sin t-\sin t=(t-1)\sin t.$

<u>Пример 1.4.3.</u> Решить задачу Коши:

$$y''+y=-\sin 2t,\quad y(\pi)=y'(\pi)=1.$$

Введем замену $\tau=t-\pi\to t=\tau+\pi.$ Тогда исходная задача сводится к задаче

$y''+y=-\sin 2(\tau+\pi)\equiv-\sin 2\tau,\ y(0)=y'(0)=1,$ где $y=y(\tau)$. Пусть $y(\tau)\risingdotseq Y(p)$. Перейдем к изображениям

$$\left(p^2+1\right)Y(p)-p-1=-\frac{2}{p^2+4},$$

отсюда

$$Y(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+1\right)}=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{p^2+4}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq \cos\tau+\frac{1}{3}\sin\tau+\frac{2}{3}\sin 2\tau=\cos(t-\pi)+\frac{1}{3}\sin(t-\pi)+\frac{2}{3}\sin(2t-2\pi)=$$

$$=\cos t-\frac{1}{3}\sin t+\frac{2}{3}\sin 2t=y(t).$$

<u>Пример 1.4.4</u>. Решить задачу Коши

$$y''+4y=\begin{cases}\frac{1}{2}t,\ 0\le t<2,\\ 3-t,\ \ 2\le t<3,\\ 0,\ t<0,\ \ t\ge 3\end{cases}$$

при начальных условиях $y(0)=0, y'(0)=0$. График данной функции изображен на рисунке 1.2. С помощью единичной функции $1(t)$ и функции $1(t-\tau)$ (свойство 4) правую часть дифференциального уравнения запишем одним аналитичским выражением:

$$f(t)=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}t\cdot 1(t-2)+(3-t)\cdot 1(t-2)-(3-t)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}(t-2+2)\cdot 1(t-2)-(t-2-1)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{1}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)-1(t-2)-(t-2)\cdot 1(t-2)+1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3).$$

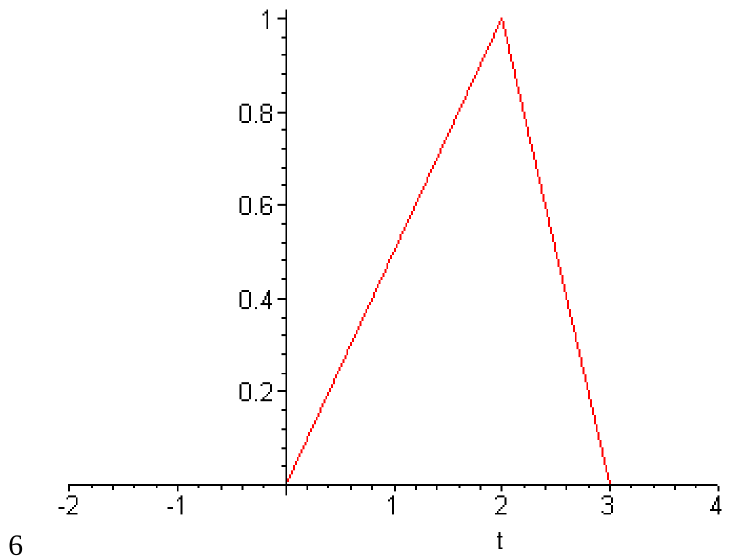


Рисунок 1.2 – График выражения правой части системы из примера 1.4.4

Таким образом, имеем

$$y''+4y==\frac{1}{2}t\cdot 1(t)-\frac{3}{2}(t-2)\cdot 1(t-2)+(t-3)\cdot 1(t-3).$$

Операторное уравнение при нулевых начальных условиях будет иметь вид:

$$p^2Y(p)+4Y(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{3}{2}\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

Находим из последнего уравнения $Y(p)$:

$$Y(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2(p^2+4)}-\frac{3}{2}\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-2p}+\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-3p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\right)\risingdotseq\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right),$$

то по свойству запаздывания находим:

$$y(t)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right)-\frac{3}{8}\left(t-2-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right)\cdot 1(t-2)+$$
$$+\frac{1}{4}\left(t-3-\frac{1}{2}\sin 2(t-3)\right)\cdot 1(t-3).$$

1.5 Интеграл Дюамеля

Если функция $f(t)$ непрерывна на интервале $(0,\infty)$, а функция $\phi(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$, кроме того

$$f(t) \risingdotseq F(p),\ \phi(t) \risingdotseq \Phi(p), \quad \text{то} \quad \int_0^t f(\tau)\phi(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)\cdot\Phi(p).$$

Отсюда по теореме о дифференцировании оригинала

$$pF(p)\Phi(p) \risingdotseq f(t)\phi(0)+\int_0^t f(\tau)\phi'(t-\tau)d\tau. \qquad (1.5.1)$$

Равенство (1.5.1) называется *формулой Дюамеля* (Ж. Дюамель (1797–1872) – французский математик).

Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $n-$го порядка

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t) \qquad (1.5.2)$$

при нулевых начальных условиях

$$y(0)=y'(0)=\ldots y^{(n-1)}(0)=0. \qquad (1.5.3)$$

Перейдем в уравнении (1.5.2) к изображениям. Пусть

$f(t) \risingdotseq F(p),\ y(t) \risingdotseq Y(p).$ Учитывая начальные условия, получаем

$$L(p)Y(p)=F(p), \qquad (1.5.4)$$

где $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши с той же левой частью и правой частью, равной единице

$$\begin{cases} z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}z'+a_nz=1, \\ z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0. \end{cases} \qquad (1.5.5)$$

Пусть $z(t) \risingdotseq Z(p)$. Тогда операторное уравнение для (1.5.5) будет иметь вид

$$\int_0^t f(\tau)\phi(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)\cdot\Phi(p).\ L(p)Z(p)=\frac{1}{p}.$$

$$L(p)Z(p)=\frac{1}{p}. \qquad (1.5.6)$$

Из (1.5.4) и (1.5.6) находим $Y(p)=pF(p)Z(p)$. Отсюда по формуле Дюамеля (1.5.1) для решения исходной задачи (1.5.2)–(1.5.3) получаем

$$pF(p)Z(p) \risingdotseq f(t)z(0)+\int_0^t f(\tau)z_t^{'}(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(\tau)z_t^{'}(t-\tau)d\tau,$$

так как $z(0)=0$. Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)z_t^{'}(t-\tau)d\tau. \tag{1.5.7}$$

<u>Пример 1.5.1.</u> Найти решение задачи Коши:

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2},\ y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$z''+4z'+4z=1,\ z(0)=z'(0)=0.$$

Пусть $z(t) \risingdotseq Z(p)$. Перейдем к изображениям:

$$\left(p^2+4p+4\right)Z(p)=\frac{1}{p},\ Z(p)=\frac{1}{p(p+2)^2}=\frac{1}{4p}-\frac{1}{2(p+2)^2}-\frac{1}{4(p+2)},$$

$$z(t)=\frac{1}{4}-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{4}.$$

По формуле (1.5.7) находим искомое решение

$$y(t)=\int\limits_0^t \frac{e^{-2t}}{(1+2\tau)^2}\left[\frac{1}{4}-\frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{2}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{4}\right]'d\tau=\int_0^t \frac{e^{-2t}}{(1+2\tau)^2}(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau=$$

$$=e^{-2t}\int_0^t \frac{t-\tau}{(1+2\tau)^2}d\tau=\frac{e^{-2t}}{4}\left[2t-\ln(1+2t)\right].$$

<u>Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом проводится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения</u>. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t)\ \ (1\le i\le n), \tag{1.5.8}$$

где a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} – постоянные. Решением задачи Коши называется векторнозначная дифференцируемая функция

$$x(t)=\left(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\right)$$

такая, что

$$x_k(0)=\alpha_k,\ x_k^{'}(0)=\beta_k\ \ (1\le k\le n). \tag{1.5.9}$$

Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения функций $x_k(t)$ и $f_i(t)$ от системы (1.5.8) с учетом начальных значений (1.5.9) перейдем к операторной системе

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)X_k(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(a_{ik}p+b_{ik}\right)\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right]. \tag{1.5.10}$$

Решая систему (1.5.10) как линейную алгебраическую систему относительно $X_k(p)$, найдем $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ $(1 \le k \le n)$. Функции $x_k(t)(1 \le k \le n)$ являются компонентами векторнозначной функции $x(t)$.

Пример 1.5.2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \quad x(0) = 1, y(0) = 2, \ z(0) = 3. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $z(t) \risingdotseq Z(p)$. Находим, что $x' \risingdotseq pX - 1$; $y' \risingdotseq pY - 2$; $z' \risingdotseq pZ - 3$. Система операторных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} pX - Y + Z = 1, \\ X - (p-1)Y = -2, \\ X + (1-p)Z = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, находим:

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)}, \ Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2}, \ Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)} = \frac{2p-2-p}{p(p-1)} = \frac{2(p-1)}{p(p-1)} - \frac{p}{p(p-1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1};$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2};$$

$$Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2};$$

Окончательно $x(t) = 2 - e^t$; $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$; $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$.

Пример 1.5.3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' = 3(-x + y + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z; \ x(0) = x'(0) = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = -1, z(0) = 1, z'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Переходя к операторной системе, получим

$$\begin{cases} p^2 X = 3(-X + Y + Z), \\ p^2 Y + 1 = X - Y, \\ p^2 Z - p = -Z, \end{cases} \tag{1.5.11}$$

где $X(p) \risingdotseq x(t)$, $Y(p) \risingdotseq y(t)$, $Z(p) \risingdotseq z(t)$. Решим систему (1.5.11) методом подстановки. Приводя систему (1.5.11) к стандартному виду, получаем

$$\begin{cases} \left(p^2+3\right)X - 3Y - 3Z = 0, \\ X - (p^2+1)Y = 1, \\ \left(p^2+1\right)Z = p. \end{cases}$$

Из третьего уравнения $Z = Z(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$. После подстановки в первое уравнение системы находим, что

$$\begin{cases} \left(p^2+3\right)X - 3Y = \dfrac{3p}{p^2+1}, \\ X - \left(p^2+1\right)Y = 1. \end{cases} \qquad (1.5.12)$$

Из второго уравнения полученной системы (1.5.12) выражаем $X(p)$ и подставляем в первое уравнение

$$\left(p^2+3\right)\left[1+\left(p^2+1\right)Y\right] - 3Y = \frac{3p}{p^2+1},$$

т.е.

$$\left[\left(p^2+3\right)\left(p^2+1\right)-3\right]Y = \frac{3p}{p^2+1} - \left(p^2+3\right),$$

$$\left(p^4+4p^2\right)Y = \frac{3p}{p^2+1} - p^2 - 3,$$

$$Y(p) = \frac{3p}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} - \frac{p^2+3}{p^2\left(p^2+4\right)} = \frac{3p - p^4 - 3p^2 - p^2 - 3}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} =$$

$$= \frac{3(p-1) - p^2\left(p^2+4\right)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} = \frac{3(p-1)}{p^2\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)} - \frac{1}{p^2+1}.$$

После этого из второго уравнения системы (1.5.12) находим $X(p)$:

$$X(p) = 1 + \left(p^2+1\right)Y(p) = 1 + \frac{3(p-1)}{p^2\left(p^2+4\right)} - 1 = \frac{3(p-1)}{p^2\left(p^2+4\right)}.$$

Оригиналы найдем по формуле (1.3.2):

$$x(t) = \frac{d}{dp}\left\{\frac{3(p-1)p^2}{p^2\left(p^2+4\right)}e^{pt}\right\}\Bigg|_{p=0} + \frac{3(p-1)(p-2i)e^{pt}}{p^2\left(p^2+4\right)}\Bigg|_{p=2i} +$$

$$+\left.\frac{3(p-1)(p+2i)e^{pt}}{p^2(p^2+4)}\right|_{p=-2i}=3\left.\left\{\frac{\left[e^{pt}+t(p-1)e^{pt}\right](p^2+4)-(p-1)e^{pt}2p}{(p^2+4)^2}\right\}\right|_{p=0}+$$

$$+\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2(p+2i)}\right|_{p=2i}+\left.\frac{(p-1)e^{pt}}{p^2(p-2i)}\right|_{p=-2i}=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3(2i-1)e^{2it}}{16i}-\frac{3(2i+1)e^{-2it}}{16i}=$$

$$=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{8}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)+\frac{3}{16i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t.$$

Далее

$$y(t)=\frac{d}{dp}\left.\left\{\frac{3(p-1)p^2e^{pt}}{p^2(p^2+1)(p^2+4)}\right\}\right|_{p=0}+\left.\frac{3(p-1)e^{pt}(p-i)}{p^2(p-i)(p+i)(p^2+4)}\right|_{p=i}+$$

$$+\left.\frac{3(p-1)e^{pt}(p+i)}{p^2(p-i)(p+i)(p^2+4)}\right|_{p=-i}+\left.\frac{3(p-1)e^{pt}(p-2i)}{p^2(p^2+1)(p+2i)(p-2i)}\right|_{p=2i}+$$

$$+\left.\frac{3(p-1)e^{pt}(p+2i)}{p^2(p^2+1)(p+2i)(p-2i)}\right|_{p=-2i}-\sin t=$$

$$=3\left.\left\{\frac{\left[e^{pt}+t(p-1)e^{pt}\right](p^2+1)(p^2+4)-(p-1)(4p^3+10p)e^{pt}}{(p^2+1)^2(p^2+4)^2}\right\}\right|_{p=0}+$$

$$+\frac{3(i-1)e^{it}}{(-1)(2i)(4-1)}+\frac{3(-i-1)e^{-it}}{(-1)(-2i)(4-1)}+\frac{3(2i-1)e^{2it}}{(-4)(-4+1)(4i)}+\frac{3(-2i-1)e^{-2it}}{(-4)(-4+1)(-4i)}-\sin t=$$

$$=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)+\frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)+\frac{1}{8}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)-\frac{1}{16i}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)-\sin t=$$

$$=\frac{3}{4}(1-t)-\cos t+\sin t+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t-\sin t=$$

$$=\frac{3}{4}(1-t)-\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x(t)=\frac{3}{4}(1-t)-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{3}{8}\sin 2t, \\ y(t)=\frac{3}{4}(1-t)-\cos t+\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{1}{8}\sin 2t, \\ z(t)=\cos t. \end{cases}$$

1.6 Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида

Определение 1.7. *Интегральным уравнением* называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши

$$y' = f(x,y),\ y(0) = y_0,$$

сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f\left[x, y(x)\right]dx + y_0.$$

Если искомая функция $y(x)$ входит в уравнение линейно, то интегральное *уравнение* называется *линейным.*

Определение 1.8. Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)y(t)dt \qquad (1.6.1)$$

(a и b – постоянные) называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Здесь $k(x,t),\ f(x)$ – известные функции, $y(x)$ – искомая функция. Функцию $k(x,t)$ называют *ядром уравнения* (1.6.1).

Определение 1.9. Уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad (1.6.2)$$

называют *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*.

Определение 1.10. Если в уравнениях (1.6.1) и (1.6.2) $f(x) \equiv 0,$ то уравнения называются *однородными*.

Если искомая функция $y(x)$ входит только под знак интеграла, то имеем соответственно уравнения Фредгольма или Вольтерра первого рода

$$\int_a^b k(x,t)y(t)dt = f(x) \text{ или } \int_a^x k(x,t)y(t)dt = f(x) .$$

Определение 1.11. Уравнения вида

$$\varphi(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt \ = \ f(x) \qquad (1.6.3)$$

с ядром $k(x-t),$ зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они называются *уравнениями типа свертки*.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt. \qquad (1.6.4)$$

Будем предполагать, что $f(x)$ и $k(x)$ являются функциями-оригиналами, а значит, может быть найдено изображение функций f, k и φ. Пусть

$$\Phi(p) \risingdotseq \varphi(x),\ F(p) \risingdotseq f(x),\ K(p) \risingdotseq k(x).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1.6.4) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки, получаем

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p), \tag{1.6.5}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)} \quad (K(p)\neq 1). \tag{1.6.6}$$

Для изображения $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)$ – решение интегрального уравнения (1.6.4).

Пример 1.6.1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \tag{1.6.7}$$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получаем

$$\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}.$$

Далее, применяя *Maple*, получаем

```
> Phi:= p^3/((p^2+1)*(p^2-1));
```

$$F := \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}$$

```
> convert(Phi, parfrac,p);
```

$$\frac{p}{2(p^2+1)}+\frac{1}{4(p+1)}+\frac{1}{4(p-1)}$$

и из последнего выражения

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{ch} x).$$

Пример 1.6.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=x+\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt; \qquad \varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3.$$

Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций, получаем

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2+1}\cdot\Phi(p),$$

далее

```
>Phi1:=solvefor[Phi](p^(-2)+(1/(p^2+1))*Phi-Phi);
```

$$\Phi_1=\frac{p^2+1}{p^4};$$

```
> with(inttrans): phi:=invlaplace(Phi1,p,x);
```

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3.$$

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с ядром, зависящим только от разности $x-t$, т.е. уравнения вида

$$\int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.6.8}$$

где $f(x)$ – известная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция.

1.7 Решение некоторых задач математической физики

Прежде всего рассмотрим определение и некоторые свойства гамма-функции Эйлера. Гамма-функция (Γ-функция) Эйлера – одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала

$$z!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot z$$

на случай комплексных значений z. Γ-функция впервые введена Л. Эйлером (1729); она определяется формулой

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z+n)}n^z.$$

Если действительная часть числа z положительна, то можно пользоваться формулой

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Если n – целое положительное число, то $\Gamma(n)=(n-1)!$.

<u>Пример 1.7.1.</u> Найти изображение функции $f(t)=t^\alpha$ $(\alpha>-1)$.

Решение. По определению

$$F(p)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}dt.$$

Сделав в последнем интеграле замену $pt = s,$ получаем

$$F(p) = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{p^\alpha} e^{-s} \frac{ds}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty s^\alpha e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Операционный метод успешно применяется к решению так называемых *нестационарных задач* для уравнений математической физики. Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t, где x – пространственная координата, $t-$ время. Предположим, что дифференциальное уравнение имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1.7.1}$$

где a, b, c, a_1 и b_1 – непрерывные функции переменного $x,$ заданные на отрезке $0 \le x \le l.$ Будем считать, что $a > 0$ и рассмотрим два основных случая: 1) $a_1 < 0$ – гиперболический случай и 2) $a_1 \equiv 0,\ b_1 < 0-$ параболический случай.

Нестационарная задача формулируется следующим образом.

Найти решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения (1.7.1) для $0 \le x \le l,\ t \ge 0,$ удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{1.7.2}$$

(второе задается лишь в гиперболическом случае) и краевым условиям

$$u(0,t) = f(t),\ \alpha\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} = \gamma u(l,t), \tag{1.7.3}$$

где $\alpha, b, \gamma-$ постоянные.

Нестационарность задачи выражается в том, что рассматривается решение, существенно зависящее от начальных условий («неустановившийся», «переходный» режим физического процесса).

Предположим, что $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ рассматриваемые как функции аргумента $t,$ являются оригиналами, и обозначим через

$$U(p,x) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-pt} dt$$

изображение функции $u.$ В силу наших предположений тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

(дифференцирование U по x мы обозначим с помощью символа d, а не ∂, так как p в данном случае рассматривается как параметр). По правилу дифференцирования оригиналов получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - u(x,0),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2 U - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t},$$

или, учитывая начальные условия,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Предположим еще, что функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p) \risingdotseq f(t)$, тогда граничные условия приводят к равенствам

$$U(p,0) = F(p), \quad \alpha \frac{dU(p,l)}{dx} + \beta\left[pU(p,l) - \varphi(l)\right] = \gamma U(p,l).$$

Таким образом, операционный метод приводит решение поставленной выше нестационарной задачи для уравнения (1.7.1) с частными производными к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\frac{d^2U}{dx^2} + b\frac{dU}{dx} + AU + B = 0,$$

где $A = c + a_1 p^2 + b_1 p,\quad B = -a_1 p\varphi - a_1\psi - b_1\varphi$ и p – комплексный параметр, при следующих граничных условиях:

$$U(p,0) = F(p), \quad \alpha \frac{dU(p,l)}{dx} + \beta\left[pU(p,l) - \varphi(l)\right] = \gamma U(p,l).$$

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.7.4}$$

(a^2 – постоянная). *Первая краевая задача* состоит в том, чтобы найти решение $u(x,t)$ дифференциального уравнения (1.7.4) для $0 \le x \le l$ и $t \ge 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{1.7.5}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t). \tag{1.7.6}$$

Предположим, что функции $u(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $f(x,t)$, рассматриваемые как функции аргумента t, являются оригиналами. Обозначим через

$$U(p,x) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-pt} dt \tag{1.7.7}$$

изображение функции $u(x,t)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{d^2 U}{dx^2}. \qquad (1.7.8)$$

По правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начального условия (1.7.5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU - \varphi(x). \qquad (1.7.9)$$

Предположим, что $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются оригиналами и

$$\psi_1(t) \risingdotseq \Psi_1(p), \quad \psi_2(t) \risingdotseq \Psi_2(p). \qquad (1.7.10)$$

Тогда граничные условия (1.7.6) дают

$$U(p,0) = \Psi_1(p), \quad U(p,l) = \Psi_2(p). \qquad (1.7.11)$$

Таким образом, операторный метод приводит решение задачи (1.7.5)–(1.7.6) к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$a^2 \frac{d^2 U(p,x)}{dx^2} - pU(p,x) + \varphi(x) + F(p,x) = 0 \qquad (1.7.12)$$

при граничных условиях (1.7.11), где $F(x,p) \risingdotseq f(x,t)$. Решая задачу (1.7.9) при граничных условиях (1.7.8) и обращая полученное решение, найдем функцию $u(x,t)$, являющуюся решением задачи (1.7.5)–(1.7.6). Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнений в частных производных.

<u>Пример 1.7.2.</u> Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l} \quad (0 \le x \le l). \qquad (1.7.13)$$

Начальные скорости равны нулю. Найти отклонение $u(x,t)$ при $t>0$.

Решение. Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.7.14)$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = A\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad (1.7.15)$$

и краевых условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \qquad (1.7.16)$$

Переходя к изображениям по переменной t, получаем

$$\frac{d^2 U(p,x)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(p,x) = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (1.7.17)$$

Далее, применяя Maple, получаем

$$> ode1 := diff(U(x), x, x) - \frac{p^2}{a^2} U(x) = -\frac{p A}{a^2} \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot x}{l}\right):$$

$$> Y := dsolve(ode1);$$

$$Y := U(x) = e^{\frac{p x}{a}} c_2 + e^{-\frac{p x}{a}} c_1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) p\, l^2 A}{\pi^2 a^2 + p^2 l^2}$$

$$> Y1 := e^{-\frac{p x}{a}} c_2 + e^{\frac{p x}{a}} c_1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) p\, l^2 A}{\pi^2 a^2 + p^2 l^2}:$$

$$> g1 := simplify(subs(x=0, Y1));$$

$$g1 := c_2 + c_1$$

$$> g2 := simplify(subs(x=l, Y1));$$

$$g2 := e^{-\frac{p l}{a}} c_2 + e^{\frac{p l}{a}} c_1$$

$$> g3 := solve(\{g1=0, g2=0\}, [c_1, c_2]);$$

$$g3 := [[c_1 = 0, c_2 = 0]]$$

$$> U := \frac{p\ A}{p^2 + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right):$$

$$U := \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) p A}{\frac{\pi^2 a^2}{l^2} + p^2}$$

$$> with(inttrans);\ assume(a > 0, l > 0);$$

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable, setup*]

$$> u := invlaplace(U, p, t);$$

$$u := \sin\left(\frac{\pi x}{l\sim}\right) A \cos\left(\frac{\pi a\sim t}{l\sim}\right)$$

$$\Rightarrow u := A\cos\left(\frac{\pi a t}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Эта функция $u(x,t)$ и будет решением поставленной задачи.

Приведем более общую теорему об умножении изображений – теорему Эфроса.

Теорема Эфроса. *Пусть* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *и пусть* $\Phi(p)$ *и* $q(p)$*– аналитические функции такие, что*

$$\Phi(p)e^{-\tau q(p)} \risingdotseq \varphi(t,\tau).$$

Тогда

$$F\left[q(p)\right]\Phi(p) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)d\tau.$$

<u>Пример 1.7.3.</u> Решить краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x>0, t>0\right),\ u(0,t)=u_0,\ u(x,0)=0. \qquad (1.7.18)$$

Применяя к обеим частям уравнения (1.7.18) преобразование Лапласа по переменной x, получаем

$$\frac{du(p,t)}{dt}=k\left(p^2u(p,t)-pu_0\right). \qquad (1.7.19)$$

Из уравнения (1.7.19)

$$u(p,t)=\frac{u_0}{p}\left(1-e^{kp^2t}\right).$$

Восстанавливая оригинал, находим, что

$$u(x,t)=u_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}e^{-s^2}ds\right).$$

<u>Пример 1.7.4.</u> Температура $u(x,t)$ в тонком стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad (0<x<\infty), \qquad (1.7.20)$$

где a^2 – постоянный коэффициент. Найти распределение температур в полуограниченном стержне $0<x<\infty$, если известен закон изменения температуры его левого конца, а начальная температура стержня равна нулю:

$$u(x,0)=0,\quad u(0,t)=f(t). \qquad (1.7.21)$$

Решение. Переходя к изображениям, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU(x,p)=a^2\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} \qquad (1.7.22)$$

с комплексным параметром p, которое нужно решить при условии $U(0,p)=F(p)$. Общее решение уравнения (1.7.22) имеет вид:

$$U(x,p)=ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x};$$

здесь должно выполняться условие $c_1=0$, в противном случае функция $U(x,p)$ будет неограниченно возрастать при $x\to\infty$. Начальное условие дает тогда, что $c=F(p)$, следовательно,

$$U(x,p)=F(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Для нахождения оригинала рассмотрим сначала частный случай, когда $f(t)\equiv 1$, тогда $F(p)=\frac{1}{p}$, $U=U_1=\frac{1}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. Применяя Maple, находим

```
> with(inttrans): assume(x>0,a>0);
> invlaplace((1/p)*exp(-p^(1/2)*x/a),p,t);
```

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x\sim}{a\sim\sqrt{t}}\right)$$

Таким образом, оригинал для для $U_1(p)$ имеет вид

$$u_1(x,t)=erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\tau^2}d\tau. \qquad (1.7.23)$$

В случае произвольных граничных условий (1.7.21) используем интеграл Дюамеля, так как

$$U(p)=pF(p)U_1(p),$$

следовательно

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau. \qquad (1.7.24)$$

Приближенное вычисление интеграла (1.7.24) можно осуществить следующим образом

```
> assume(x>0,a>0,t>0);g1:= exp(-x^2/(4*a^2*(t-
tau)));u2:=int((x/(2*a*Pi^(1/2)))*sin(tau)*(t-tau)^(-
3/2)*g1,tau=0..t);
```

$$g1:=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{x\sim^2}{a\sim^2\,(t\sim-\tau)}}$$

$$u2:=\int_0^{t\sim}\frac{1}{2}\,\frac{x\sim\sin(\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{x\sim^2}{a\sim^2\,(t\sim-\tau)}}}{a\sim\sqrt{\pi}\,(t\sim-\tau)^{3/2}}\,d\tau$$

```
> g2:=subs(t=3,x=1,a=10,u2);
```

$$g2 := \int_0^3 \frac{1}{20} \frac{\sin(\tau)\, e^{-\frac{1}{400\,(3-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\,(3-\tau)^{3/2}}\, d\tau$$

```
> evalf[6](g2);
```

$$0.200643$$

Здесь $f(t) = \sin t$.

Задача 1.7.5. Та же задача, но на левом конце происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой, начальная температура стержня $u_0 = const$. Задача сводится к решению уравнения (1.7.20) при следующих начальных и краевых условиях

$$u(x,0) = u_0,\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = hu(0,t) \quad (h > 0 \text{ – постоянная})$$

Операторное уравнение имеет вид

$$pU(x,p) - a^2 \frac{d^2 U(x,p)}{dx^2} = u_0;$$

его нужно решить при условии:

$$\frac{dU(0,p)}{dx} = hU(0,p).$$

Семейство решений этого уравнения, ограниченных при $x \to \infty$, имеет вид

$$U(x,p) = \frac{u_0}{p} + ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Далее, применяя *Maple*,

```
> assume(x>0,a>0,u[0],real);with(inttrans):
  U:=(u[0]/p)+c*exp(-p^(1/2)*x/a);
```

$$U := \frac{u\sim_0}{p} + c\, e^{-\frac{\sqrt{p}\, x\sim}{a\sim}}$$

Найдем значение c в соответствии с граничными условиями:

```
> c1:=solve ({subs(x=0,h*U-diff(U,x))},[c]);
```

$$c1 := \left[\left[c = -\frac{h\, a\sim\, u\sim_0}{e^0\left(h\, a\sim\, p + p^{3/2}\right)}\right]\right]$$

Тогда решение краевой задачи $U(x,t)$ будет иметь вид:

```
> c2:=-h*a*u[0]/(exp(0)*(h*a*p+p^(3/2)));UU:=subs(c=c2,U);
```

$$c2 := -\frac{h\,a\sim\,u\sim_0}{h\,a\sim\,p + p^{3/2}}$$

$$UU := \frac{u\sim_0}{p} - \frac{h\,a\sim\,u\sim_0\,e^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x\sim}{a\sim}\right)}}{h\,a\sim\,p + p^{3/2}}$$

```
> u:=invlaplace(UU,p,t);
```

$$u := u\sim_0 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x\sim}{a\sim\sqrt{t}}\right) + e^{h\,(a\sim^2\,t\,h + x\sim)}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x\sim + 2\,a\sim^2\,t\,h}{a\sim\sqrt{t}}\right)\right)$$

1.8 Разложение функций в ряды и бесконечные произведения

Напомним читателю, что всякая функция, аналитическая в круге $|z-a|<R,$ представляется в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Коэффициенты его определяются по формулам

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n=0,1,2,\ldots), \qquad (1.8.1)$$

где C – любой простой замкнутый контур, охватывающий точку a и содержащийся в круге $|z-a|<R.$

Ряды Лорана являются обобщением рядов Тейлора. С их помощью можно представлять функции, аналитические в кольцах $r<|z-a|<R\;(0\le r<R\le\infty)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z-a)^n.$$

Коэффициенты ряда Лорана определяются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots), \qquad (1.8.2)$$

где C – любой простой замкнутый контур, лежащий в кольце и охватывающий его внутреннюю окружность.

Формулы (1.8.1) и (1.8.2) редко используются для получения конкретных разложений. Обычно тейлоровские и лорановские разложения функций находят косвенным путем с помощью операций над степенными рядами.

Приведем несколько примеров разложений функций в ряды Тейлора и Лорана.

Пример 1.8.1. *Функция вероятности ошибок* определяется интегралом

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta, \tag{1.8.3}$$

который не выражается через элементарные функции. Чтобы получить разложение $\operatorname{erf} z$ в ряд Тейлора с центром в точке $a = 0,$ достаточно подставить $-\zeta^2$ вместо ζ в разложение e^{ζ} и последнее проинтегрировать почленно:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

Полученное разложение сходится для всех конечных z. При $x \to \infty$ по положительной полуоси функция $\operatorname{erf} x$ стремится к пределу (интегралу Пуассона):

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1. \tag{1.8.4}$$

Далее нам потребуется интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx,$$

также называемый *интегралом Пуассона*. Для его вычисления рассмотрим функцию $f(z) = e^{-az^2}$ и заметим, что ее интеграл по действительной оси находится на основании равенства (1.8.4), а на прямой $y = h$ она обращается в функцию

$$e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2} \cdot e^{-ax^2} \left(\cos 2ahx - i \sin 2ahx\right),$$

действительная часть которой при $h = \dfrac{b}{2a}$ отличается от подынтегральной функции постоянным множителем. Выберем в качестве контура интегрирования границу прямоугольника с вершинами в точках $R + 0i,\ R + \dfrac{b}{2a} i,\ -R + \dfrac{b}{2a} i,\ -R + 0i.$ Далее в силу теоремы Коши: если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D,$ то ее интеграл вдоль любого замкнутого контура, лежащего в $D,$ равен нулю, получаем

$$\int_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx+\int_{0}^{\frac{b}{2a}} e^{ay^2}\cdot e^{-aR^2}\left(\cos 2ayR-i\sin 2ayR\right)dy+$$
$$+e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{R}^{-R} e^{-ax^2}e^{-ibx}dx+\int_{\frac{b}{2a}}^{0} e^{ay^2}\cdot e^{-aR^2}\left(\cos 2ayR-i\sin 2ayR\right)dy=0.$$

На отрезках, где $x=R$ или $x=-R$, выполняется неравенство

$$|e^{-az^2}|=e^{-a\left(R^2-y^2\right)}\le e^{\frac{b^2}{4a}}e^{-aR^2},$$

следовательно, соответствующие интегралы будут стремиться к нулю при $R\to\infty$. В пределе при $R\to\infty$, используя равенство (1.8.4), получаем

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}-e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ibx}dx=0,$$

откуда, сравнивая действительные части, имеем окончательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}\quad\left(a>0\right).\tag{1.8.5}$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно получить соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\;\risingdotseq\;\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}.\tag{1.8.6}$$

Пусть теперь известен оригинал функции $F\left(p\right)\risingdotseq f\left(t\right)$. Учитывая соотношение (1.8.6), мы можем найти оригинал $F\left(\sqrt{p}\right)/\sqrt{p}$ по теореме Эфроса:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} f\left(\tau\right)e^{-\frac{\tau^2}{4t}}d\tau.\tag{1.8.7}$$

Рассмотрим определение и некоторые свойства цилиндрических функций. Цилиндрическая функция первого рода $J_n\left(z\right)$ целого порядка n определяется как коэффициент при w^n в разложении Лорана

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(z\right)w^n.$$

Функцию $J_n\left(z\right)$ можно представить в виде степенного ряда. Для этого надо перемножить ряды для $e^{\frac{z}{2}w}$ и $e^{-\frac{z}{2}\cdot\frac{1}{w}}$

$$e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}=\left[\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^s\frac{w^s}{s!}\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m\cdot\frac{1}{w^m}\right].$$

Пусть $n=0,1,2,...,$ тогда $n=s-m$ и

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+m}\frac{1}{(n+m)!m!}(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\frac{(-1)^m}{(n+m)!m!}\ (n=0,1,2,...),$$

а коэффициент при $\frac{1}{w^n}(n=1,2,...)$ равен

$$J_{-n}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^s\frac{1}{s!}\cdot\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m,$$

а так как $m=s+n,$ то

$$J_{-n}(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}\frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!}=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}\frac{(-1)^s}{s!(s+n)!}=(-1)^n J_n(z).$$

Найдем теперь выражение для $J_n(z)$ непосредственно с помощью формулы (1.8.2). Для коэффициентов ряда Лорана

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)}\frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Преобразуем это выражение; для этого выберем в качестве контура C окружность $|w|=1$ и положим $w=e^{it}$, тогда

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}e^{iz\sin t}\cdot e^{-i(n+1)t}\cdot e^{it}idt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(z\sin t-nt)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt-z\sin t)dt.$$

Но второй интеграл равен нулю, ибо по свойству интеграла от периодических функций промежуток интегрирования $(0,2\pi)$ можно заменить промежутком $(-\pi,\pi)$, а подынтегральная функция нечетна.

Таким образом,

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-z\sin t)dt.$$

Полученное соотношение, так называемый интеграл Бесселя, дает представление цилиндрической функции в виде интеграла и оказывается полезным в некоторых задачах математической физики.

Заметим, что при доказательстве этого факта мы воспользовались тем, что и для комплексных чисел $z=x+iy$ справедлива формула

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

Действительно, $e^{i(x+yi)}=e^{ix}e^{-y}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)$. С другой стороны

$$\cos z+i\sin z=\cos(x+yi)+i\sin(x+yi)=\cos x\cdot chy-i\sin x\cdot shy+$$

$$+i(\sin x\cdot chy+i\cos x\cdot shy)=\cos x\cdot chy-\cos x\cdot shy+i(\sin x\cdot chy-\sin x\cdot shy)=$$

$$=\cos x(chy-shy)+i\sin x(chy-shy)=$$

$$=(chy-shy)(\cos x+i\sin x)=e^{-y}(\cos x+i\sin x).$$

Заметим, что тригонометрические функции комплексного аргумента определяются следующим образом:

$$\sin(x\pm iy)=\sin xchy\pm i\cos xshy;$$
$$\cos(x\pm iy)=\cos xchy\mp i\sin xshy.$$

Напомним, что *уравнение Бесселя* – это линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-p^2\right)y=0, \qquad (1.8.8)$$

в котором параметр p может принимать произвольные комплексные значения. Первым систематическое изучение решений этого уравнения предпринял Ф. Бессель (1824), но еще раньше они встречались в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа. Решения уравнения Бесселя называются цилиндрическими функциями. К уравнению Бесселя приводят многие краевые задачи математической физики, связанные с вопросами равновесия (упругого, теплового, электрического) и установившихся колебаний тел цилиндрической формы. Решения, выражаемые рядом

$$J_\gamma(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma+2k}}{k!\Gamma(1+\gamma+k)},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, при всех γ определяют цилиндрические функции первого рода с индексом γ. При целом индексе $\gamma=n$ эта функция определена всюду на комплексной плоскости переменного z, при любом $\gamma-$на плоскости с разрезом $(-\infty,0)$; в частности, функция $J_\gamma(x)$ определена при всех действительных x, $0\le x<\infty$.

Цилиндрическая функция нулевого индекса имеет вид

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^k}{(k!)^2}.$$

Цилиндрические функции первого рода с полуцелым индексом $\gamma=n+\dfrac{1}{2}$ сводятся к элементарным функциям, например,

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\ J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Приведем примеры нахождения в виде отрезков ряда функций BesselJ и BesselY, являющихся функциями Бесселя первого и второго рода соответственно:

```
> g1:=convert(series(BesselJ(3,x),x,9),polynom);
```

$$g1 := \frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{768}x^5 + \frac{1}{30720}x^7$$

```
> g2:=convert(series(BesselJ(5,x),x,12),polynom);
```

$$g2 := \frac{1}{3840}x^5 - \frac{1}{92160}x^7 + \frac{1}{5160960}x^9 - \frac{1}{495452160}x^{11}$$

```
> g3:=convert(series(BesselJ(7,x),x,16),polynom);
```

$$g3 := \frac{1}{645120}x^7 - \frac{1}{20643840}x^9 + \frac{1}{1486356480}x^{11} - \frac{1}{178362777600}x^{13} + \frac{1}{31391848857600}x^{15}$$

```
> convert(evalf[6](series(BesselY(5,x),x,19)),polynom);
```

$$-\frac{244.462}{x^5} - \frac{15.2789}{x^3} - \frac{0.636620}{x} - 0.0265258x - 0.00165786x^3 + (-0.000208493 + 0.000165786\ln(x))\,x^5 + (0.0000127168 - 0.00000690777\ln(x))\,x^7 + \left(-2.66734\,10^{-7} + 1.23353\,10^{-7}\ln(x)\right)x^9 + \left(3.07294\,10^{-9} - 1.28493\,10^{-9}\ln(x)\right)x^{11} + \left(-2.29510\,10^{-11} + 8.92312\,10^{-12}\ln(x)\right)x^{13} + \left(1.21447\,10^{-13} - 4.46156\,10^{-14}\ln(x)\right)x^{15} + \left(-4.81794\,10^{-16} + 1.68998\,10^{-16}\ln(x)\right)x^{17}$$

Здесь в командах BesselJ(p,x), BesselY(p,x) первый аргумент задает значение p в уравнеии (1.8.8), а второй – аргумент требуемой функции.

Функции BesselI и BesselK являются решениями *модифицированного уравнения Бесселя*

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + p^2\right)y(x) = 0.$$

Например,

```
> convert(series(BesselI(1,x),x,12),polynom);
```

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 + \frac{1}{18432}x^7 + \frac{1}{1474560}x^9 + \frac{1}{176947200}x^{11}$$

```
>evalf[4](taylor(convert(series(BesselK(1,x),x,12),polynom
),x=1,12));
```

$$0.6019 - 1.023\,(x-1.) + 1.113\,(x-1.)^2 - 1.084\,(x-1.)^3 + 1.049\,(x-1.)^4 - 1.029\,(x-1.)^5 + 1.018\,(x-1.)^6 - 1.012\,(x-1.)^7 + 1.009\,(x-1.)^8 - 1.007\,(x-1.)^9 + 1.006\,(x-1.)^{10} - 1.005\,(x-1.)^{11} + \mathrm{O}\left((x-1.)^{12}\right)$$

Функции Ганкеля HankelH1 и HankelH2 называются иногда *функциями Бесселя третьего рода* и определяются следующим образом

$$HankelH1(p,x) = BesselJ\left(p,x\right) + I * BesselY(p,x);$$
$$HankelH2(p,x) = BesselJ\left(p,x\right) - I * BesselY(p,x).$$

Приведем примеры нахождения преобразования Лапласа функций Бесселя:

```
> with(inttrans): laplace(BesselJ(1,x),x,p);
```

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}+1$$

```
> laplace(BesselJ(3,x),x,p);
```

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}\left(\sqrt{p^2+1}+p\right)^3}$$

```
> laplace(BesselI(1,x),x,p);
```

$$\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}-1$$

1.9 Цилиндрические функции

Напомним, что линейное дифференциальное уравнение

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + \left(z^2 - p^2\right) y(z) = 0 \qquad (1.9.1)$$

называют *уравнением Бесселя*. Мы предполагаем, что параметр p может принимать любые комплексные значения, а $y(z)$ – аналитическая функция в некоторой области комплексной плоскости. Отметим, что значениям параметра p и $-p$ соответствует одно и то же уравнение. Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка и его общее решение может быть задано в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений $y_1(z)$ и $y_2(z)$:

$$y(z) = c_1 y_1(z) + c_2 y_2(z),$$

где c_1 и c_2 могут принимать произвольные комплексные значения.

Если $y_1(z)$ и $y_2(z)$ – два частных решения уравнения Бесселя, то их определитель Вронского равен

$$W\left[y_1; y_2\right](z) = \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix} = \frac{c}{z}, \qquad (1.9.2)$$

где c – некоторая постоянная. Действительно, из уравнения (1.9.1) получаем

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z\frac{dy_1(z)}{dz}\right] + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) y_1(z) = 0,$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z\frac{dy_2(z)}{dz}\right]+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)y_2(z)=0.$$

Умножая первое уравнение на $y_2(z)$, второе на $y_1(z)$, а затем вычитая из второго первое, получаем

$$y_1(z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dy_2(z)}{dz}\right]-y_2(z)\frac{d}{dz}\left[z\frac{dy_1(z)}{dz}\right]=0,$$

или

$$\frac{d}{dz}\left\{z\left[y_1(z)\frac{dy_2(z)}{dz}-y_2(z)\frac{dy_1(z)}{dz}\right]\right\}=0,$$

откуда вытекает (1.9.2).

Уравнение Бесселя имеет частное решение, представимое в виде ряда

$$y(z)=z^s\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^{n+s}, \tag{1.9.3}$$

где $a_0\neq 0$. Действительно, ряд (1.9.3) фактически является степенным, и его можно дифференцировать почленно любое число раз в его круге сходимости. С учетом этого имеем

$$z^2y''(z)=z^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nz^{n+s-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nz^{n+s},$$

$$zy'(z)=z\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nz^{n+s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nz^{n+s},$$

$$\left(z^2-p^2\right)y(z)=\left(z^2-p^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+s}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+s+2}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+s}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+s}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{n+s}.$$

Подставив эти выражения в уравнение Бесселя, получим тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-p^2\right]a_nz^{n+s}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}z^{n+s}\equiv 0.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$\left(s^2-p^2\right)a_0=0,$$

$$\left[(1+s)^2-p^2\right]a_1=0,$$

$$\left[(n+s)^2-p^2\right]a_n+a_{n-2}=0,\ n=2,3,\dots\ .$$

Из полученных уравнений следует, что $s=\pm p$ (так как $a_0\neq 0$), $a_1=0$ (так как равенство $s=\pm p$ означает, что $(1+s)^2-p^2\neq 0$) и

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2-s^2}=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2s)},\quad n=2,3,\dots\ .$$

В частности $a_{2k+1}=0,\ k=0,1,2,\ldots,\quad a_{2k}=-\dfrac{a_{2k-2}}{2^2k(k+s)},\quad k=1,2,\ldots.$

Итак, мы получили два решения. При $s=p$ ряд

$$y_p(z)=z^p\sum_{k=0}^{\infty}a_0\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k}k!(1+p)(2+p)\cdot\ldots\cdot(k+p)} \tag{1.9.4}$$

сходится всюду в комплексной плоскости. Случай $s=-p$ приводит к функции $y_{-p}(z)$, получающейся заменой в (1.9.4) p на $-p$.

Обе функции являются решениями уравнения Бесселя на всей комплексной плоскости, кроме точки $z=0$. Можно показать, что ряд (1.9.4) можно почленно дифференцировать по параметру p. Это значит, что функция $y_p(z)$ является аналитической и по аргументу p.

Замечание. Точка $z=0$, вообще говоря, является изолированной особой точкой функции $y_p(z)$. Более точно:

– если p — целое неотрицательное, то $z=0$ – устранимая особая точка;

– если $p-$ целое отрицательное, то $z=0$ – полюс;

– если $p-$ нецелое, то $z=0$ – точка ветвления.

Положив в формуле (1.9.4) $a_0=\dfrac{1}{2^p\Gamma(1+p)}$, получим с учетом свойств гамма-функции Эйлера функцию

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p},$$

которую называют *цилиндрической функцией первого рода* или *функцией Бесселя первого рода*.

Приведем еще одно доказательство того факта, что

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z).$$

Действительно, $\Gamma(z)$ имеет полюсы в точках $z=-n,\quad n=0,1,2,\ldots.$ Поэтому $\dfrac{1}{\Gamma(-n)}=0$ и

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^n J_n(z).$$

Если p не является целым числом, то функции $J_p(z)$ и $J_{-p}(z)$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка p.

Действительно, из определения функций Бесселя получаем формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$J_p(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma(1+p)}\left[1+O\left(z^2\right)\right],\quad J_p^{'}=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-1}}{2\Gamma(p)}\left[1+O\left(z^2\right)\right].$$

Прямой подсчет при помощи этих формул с учетом свойств гамма-функции дает

$$zW\left[J_p;J_{-p}\right](z)=\frac{1}{\Gamma(1+p)\Gamma(-p)}-\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}+O(z)=-\frac{2\sin(\pi p)}{\pi}+O(z).$$

Однако согласно равенству (1.9.2) эта величина является постоянной. Поэтому окончательно получаем

$$W\left[J_p;J_{-p}\right](z)=-\frac{2\sin(\pi p)}{\pi z}.$$

Например,

```
> J1:=BesselJ(5/2,z);J2:=BesselJ(-5/2,z);
```

$$J1:=-\frac{\sqrt{2}\left(\sin(z)\,z^2-3\sin(z)+3\cos(z)\,z\right)}{\sqrt{\pi}\,z^{5/2}}$$

$$J2:=-\frac{\sqrt{2}\left(\cos(z)\,z^2-3\cos(z)-3\sin(z)\,z\right)}{\sqrt{\pi}\,z^{5/2}}$$

```
> Ww:=simplify(z*(J1*diff(J2,z)-J2*diff(J1,z)));
```

$$Ww:=-\frac{2}{\pi}$$

II Метод функций Грина

2.1 Периодические решения уравнения первого порядка

Перейдем далее к систематическому изучению периодических решений дифференциальных уравнений вида

$$\mathrm{L}x:=x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x^{(1)}+a_0x=f(t) \tag{2.1.1}$$

с постоянными комплексными коэффициентами $a_0, a_1,\ldots,a_{n-1}$ и непрерывной $T-$периодической комплекснозначной функцией f. Выясним прежде всего условия существования единственного $T-$периодического решения уравнения первого порядка

$$\dot{x}=\lambda x+f(t) \tag{2.1.2}$$

при любой функции f, принадлежащей пространству B_T всех непрерывных комплекснозначных $T-$периодических функций, определенных на числовой прямой R. Через ρ обозначим множество комплексных чисел вида

$$\frac{2k\pi i}{T}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Лемма 2.1. *Если* $\lambda \notin \rho$, *то уравнение* (2.1.2) *при любой* $f \in B_T$ *имеет единственное решение* $\varphi \in B_T$. *Это решение* φ *имеет вид*

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda s} f(t-s) ds. \tag{2.1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В равенстве

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} c + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds, \tag{2.1.4}$$

дающем общее решение уравнения (2.1.2), найдем постоянную c из условия $T-$периодичности интересующего нас решения φ:

$$c = e^{\lambda t} c + \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds,$$

т.е.

$$c = \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds.$$

Подставляя найденное значение c в равенство (2.1.4), получаем

$$\varphi(t) = \frac{e^{\lambda t}}{1-e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda(T-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds =$$

$$= \frac{e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \frac{e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}} \int_t^T e^{\lambda(t-s)} f(s) ds =$$

$$= \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \left[\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + \int_t^T e^{\lambda(T+t-s)} f(s) ds \right].$$

Сделав в первом интеграле замену $t-s=\tau$, а во втором $T+t-s=\tau$, получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \left[-\int_t^0 e^{\lambda\tau} f(t-\tau) d\tau - \int_T^t e^{\lambda\tau} f(t+T-\tau) d\tau \right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \left[\int_0^t e^{\lambda\tau} f(t-\tau) d\tau + \int_t^T e^{\lambda\tau} f(t-\tau) d\tau \right] = \frac{1}{1-e^{\lambda T}} \int_0^T e^{\lambda s} f(t-s) ds,$$

что совпадает с равенством (2.1.3).

Лемма 2.2. *Если уравнение* (2.1.2) *при любой функции* $f \in \mathrm{B}_T$ *имеет единственное решение* $\varphi \in \mathrm{B}_T$, *то число* $\lambda \notin \sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположив противное, получаем, что уравнение

$$\dot{x} = \frac{2k\pi i}{T}x$$

имеет целое семейство $T-$ периодических решений

$$\varphi(t) = e^{\frac{2k\pi i}{T}t}c = \left(\cos\frac{2k\pi}{T}t + i\sin\frac{2k\pi}{T}t\right)c.$$

Далее заметим, что правая часть равенства (2.1.3) представляет собой интегральный оператор вида

$$(Af)(t) = \int_0^t k(s)\,f(t-s)\,ds. \tag{2.1.5}$$

Введем в пространстве B_T supremum − норму.

Лемма 2.3. *Пусть* $k:[0,T]\to R$ − *непрерывная функция. Тогда интегральный оператор* A, *определенный равенством* (2.1.5), *действует в банаховом пространстве* B_T *и является линейным ограниченным оператором, причем*

$$\|A\| = \int_0^T |k(s)|\,ds := k_*. \tag{2.1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что оператор A действует в пространстве B_T, очевиден. Далее из неравенства

$$|(Af)(t)| \le \int_0^T |k(s)|\,ds\,\|f\|$$

получаем, что $\|A\| \le k_*$. Заметим, что функция $\operatorname{sgn} k(s)$ измерима ([6], с. 322), так как множества $\{s:\operatorname{sgn} k(s) < c\}$ измеримы при любом c. Например, при $c>1$ множество $\{s:\operatorname{sgn} k(s) < c\}$ является отрезком $[0,T]$; при $c=1$ множество $\{s:\operatorname{sgn} k(s) < 1\}$ совпадает с множеством тех значений s, для которых $k(s) \le 0$, т. е. является замкнутым множеством и т.д.

По теореме Лузина для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[-T+\varepsilon, -\varepsilon]$ функция φ_ε, что

$$mes\{s:\operatorname{sgn} k(s) \ne \varphi_\varepsilon(-s)\} < \varepsilon.$$

Очевидно, функцию φ_ε можно расширить на отрезок $[0,\,T]$ так, чтобы выполнялось равенство $\varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(-T)$, т.е. чтобы $\varphi_\varepsilon(-s)$ стала непрерывной периодической функцией, при этом, очевидно, что $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$.

Пусть $M(\varepsilon)=\{s:\operatorname{sgn}k(s)\neq\varphi_\varepsilon(-s)\}$, а $CM(s)$ − дополнение множества $M(\varepsilon)$, тогда

$$(A\varphi_\varepsilon)(0)=\int_0^T k(s)\varphi_\varepsilon(-s)ds=$$

$$=\int_0^T k(s)\operatorname{sgn}k(s)ds+\int_0^T k(s)\left[\varphi_\varepsilon(-s)-\operatorname{sgn}k(s)\right]ds=$$

$$=\int_0^T |k(s)|ds+\int_0^\varepsilon k(s)\left[\varphi_\varepsilon(-s)-\operatorname{sgn}k(s)\right]ds+\int_{T-\varepsilon}^T k(s)\left[\varphi_\varepsilon(-s)-\operatorname{sgn}k(s)\right]ds+$$

$$+\int_{M(\varepsilon)\cap[\varepsilon,T-\varepsilon]} k(s)\left[\varphi_\varepsilon(-s)-\operatorname{sgn}k(s)\right]ds+\int_{CM(\varepsilon)\cap[\varepsilon,T-\varepsilon]} k(s)\left[\varphi_\varepsilon(-s)-\operatorname{sgn}k(s)\right]ds\geq$$

$$\geq k_*-2\varepsilon\|k\|-2\varepsilon\|k\|-2\varepsilon\|k\|=k_*-6\varepsilon\|k\|,$$

т.е.

$$\|T\varphi_\varepsilon\|\geq\left(k_*-6\varepsilon\|k\|\right)\|\varphi_\varepsilon\|,$$

что вместе с неравенством $\|T\|\leq k_*$ дает равенство (2.1.6).

Теорема доказана.

Определение 2.1. *Дифференциальный оператор* L, определяемый левой частью уравнения (2.1.1), называется *регулярным*, если уравнение (2.1.1) имеет единственное решение $\varphi\in\mathrm{B}_T$ при любой правой части $f\in\mathrm{B}_T$.

Теорема 2.1. *Пусть множество* $\sigma(\mathrm{L})$ *всех корней соответствующего характеристического многочлена не пересекается с множеством* ρ, *тогда оператор* L *регулярен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (2.1.1) можно представить в виде

$$\left[\prod_{1\leq j\leq n}\left(\frac{d}{dt}-\lambda_j\right)\right]x(t)=f(t),\tag{2.1.7}$$

где λ_j $(1\leq j\leq n)$ — корни характеристического многочлена, после чего регулярность оператора L будет вытекать из регулярности операторов

$$\mathrm{L}_j=\frac{d}{dt}-\lambda_j\ \ (1\leq j\leq n).\tag{2.1.8}$$

Теорема доказана.

2.2 Построение функции Грина Т-периодической краевой задачи

Вернемся к равенству (2.1.3), дающему явный вид периодического решения

$$\varphi(t)=\int_0^T G_1(\lambda, s)\, f(t-s)\,ds, \tag{2.2.1}$$

где

$$G_1(\lambda, s) = \left(1-e^{\lambda T}\right)^{-1} e^{\lambda s}. \tag{2.2.2}$$

Функция $G_1(\lambda, s)$ называется функцией Грина $T-$периодической краевой задачи. Покажем, что функция Грина $T-$периодической краевой задачи для уравнения второго порядка

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t) \tag{2.2.3}$$

является разделенной разностью первого порядка функции $G_1(\lambda, s)$, построенной по корням характеристического уравнения λ_1 и λ_2. Пусть, например, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Рассмотрим выражение

$$\varphi(t)=\int_0^T \frac{G_1(\lambda_1, s)-G_1(\lambda_2, s)}{\lambda_1-\lambda_2}\, f(t-s)\,ds. \tag{2.2.4}$$

Проведем некоторые преобразования над интегралом, стоящим в правой части равенства (2.2.4):

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right) f(t-s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t\left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right) f(t-s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_t^T\left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right) f(t-s)\,ds = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t\left(\frac{e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right) f(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_t^T\left(\frac{e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right) f(\tau)\,d\tau.$$

Покажем, что $\varphi(t)$ является периодическим решением уравнения (2.2.3). Действительно,

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\int_0^t\left[\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right] f(\tau)\,d\tau+\int_t^T\left[\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right] f(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\int_0^t\left[\frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2(t-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right] f(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_t^T\left[\frac{\lambda_1^2 e^{\lambda_1(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{\lambda_2^2 e^{\lambda_2(t+T-\tau)}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right] f(\tau)\,d\tau\right\}+f(t).$$

Подставив полученные выражения для $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$ в уравнение (2.2.3), получаем требуемый результат.

Пусть далее $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\gamma -$корни характеристического многочлена уравнения (2.1.1) с кратностями $p_1, p_2, ..., p_\gamma$ $\left(p_1 + p_2 + ... + p_\gamma = n\right)$.

Т е о р е м а 1. Функция Грина $G_n(s)$ $T-$периодической краевой задачи для уравнения (2.1.1) имеет вид

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{k=\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{g_{s,1}^{(p_k-m-1)}(\lambda_k)}{m!(p_k-m-1)!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k}, \tag{2.2.5}$$

где

$$G_1(\lambda, s) = g_{s,1}(\lambda) = e^{\lambda s}\left(1 - e^{\lambda T}\right)^{-1}, \;\; q(z) = (z-\lambda_1)^{p_1}(z-\lambda_2)^{p_2}...(z-\lambda_\gamma)^{p_\gamma}, \tag{2.2.6}$$

т.е. является разделенной разностью $n-1-$го порядка функции $g_{s,1}(\lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $G_n(s)$, которая является решением однородного уравнения (2.1.1) и удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} G_n(0) - G_n(T) = 0, \;\; G_n^{(1)}(0) - G_n^{(1)}(T) = 0, ..., \\ G_n^{(n-2)}(0) - G_n^{(n-2)}(T) = 0, \; G_n^{(n-1)}(0) - G_n^{(n-1)}(T) = 1, \end{gathered} \tag{2.2.7}$$

является требуемой функцией Грина. Доказательство этого факта аналогично проведенному для уравнения второго порядка. Покажем, что функция $G_n(s)$, определенная равенством (2.2.5), удовлетворяет условиям (2.2.7).

Действительно,

$$G_n^{(\mu)}(0) = \sum_{k=0}^{k=\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1-e^{\lambda T}} \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k};$$

$$G_n^{(\mu)}(T) = \sum_{k=0}^{k=\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1-e^{\lambda T}} - \lambda^\mu \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\frac{\lambda^\mu}{1-e^{\lambda T}} \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k} -$$

$$- \sum_{k=0}^{k=\gamma} \sum_{m=0}^{p_k-1} \frac{1}{m!(p_k-m-1)!} \left(\lambda^\mu \right)^{(p_k-m-1)} \Big|_{\lambda=\lambda_k} \cdot \frac{d^m}{dz^m} \left[\frac{(z-z_k)^{p_k}}{q(z)} \right] \Big|_{z=\lambda_k}.$$

Выражение, расположенное перед знаком «минус», является значением $G_n^{(\mu)}(0)$, а выражение со знаком «минус» является разделенной разностью $(n-1)$-го порядка функции λ^μ и, следовательно, равно нулю при $0 \le \mu \le n-2$, и равно единице при $\mu = n-1$. Таким образом, условия (2.2.7) выполнены.

Теорема доказана.

Тот факт, что функция Грина является разделенной разностью, позволяет устанавливать в ряде случаев ее неотрицательность. Введем обозначение

$$g_{s,k}(\lambda)=\frac{e^{\lambda s}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^k} \quad (k=1,2,...). \qquad (2.2.8)$$

Лемма 2.4. *Справедливо равенство*

$$g_{s,k}^{(n)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{j=n} c_j g_{s+jT,\,k+n}(\lambda) \qquad (0\le s\le T,\ k=1,2,...) \qquad (2.2.9)$$

с неотрицательными c_j, *где* $g_{s,k}^{(n)}(\lambda)$ – n*-я производная функции* $g_{s,k}(\lambda)$ *по переменной* λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции. При $n=1$ имеем

$$g_{s,k}^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^{2k}}\left[se^{\lambda s}\left(1-e^{\lambda T}\right)^k-ke^{\lambda s}\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k-1}\left(-Te^{\lambda T}\right)\right]=$$

$$=\frac{s\left(e^{\lambda s}-e^{\lambda s}e^{\lambda T}\right)}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k+1}}+\frac{kTe^{\lambda(s+T)}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^{k+1}}=sg_{s,k+1}+(kT-s)g_{s+T,k+1}(\lambda).$$

Проведем шаг индукции; предположив справедливость равенства (2.2.9), получаем

$$g_{s,k}^{(n+1)}(\lambda)=\sum_{j=0}^{j=n} c_j(n)\left\{(s+jT)g_{s+jT,\,k+n+1}(\lambda)+\left[(k+n-j)T-s\right]g_{s+(j+1)T,\,k+n+1}(\lambda)\right\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{j=n} c_j(n)(s+jT)g_{s+jT,\,k+n+1}(\lambda)+\sum_{j=0}^{j=n} c_j(n)\left[(k+n-j)T-s\right]g_{s+(j+1)T,\,k+n+1}(\lambda)=$$

$$=c_0(n)sg_{s,k+n+1}+\sum_{j=0}^{j=n}\left\{c_j(n)(s+jT)+c_{j-1}(n)\left[(k+n-j+1)T-s\right]\right\}g_{s+jT,k+n+1}+$$

$$+c_n(n)(kT-s)g_{s+(n+1)T,k+n+1}(\lambda)=\sum_{j=0}^{j=n+1} c_j(n+1)g_{s+jT,k+n+1}(\lambda).$$

Лемма 2.4 доказана.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0, \qquad (2.2.10)$$

соответствующее дифференциальному уравнению (10.1).

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\gamma$ – *корни характеристического уравнения* (2.1.1) *с кратностями* $p_1,p_2,...,p_\gamma$ $(p_1+p_2+...+p_\gamma=n)$. *Тогда*

a) если $\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_\gamma<0$, *то функция Грина* $G_n(s)$ *неотрицательна;*

b) если $0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_\gamma$ *и* n *четное, то функция Грина неотрицательна;*

c) если $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_\gamma$ *и* n *нечетно, то функция Грина неположительна.*

Доказательство. Так как функция Грина является разделенной разностью $n-1-$го порядка функции $g_{s,1}(\lambda)$ (и в соответствии с известным представлением для разделенной разности)

$$G_n(s)=\frac{g_{s,1}^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!},\quad \xi\in[\lambda_1,\lambda_2],$$

то из равенства (2.2.9) вытекает требуемый результат.

Действительно, функции $g_{s+jT,\,k+n}(\xi)$ положительны при $\xi>0$ и любом $k+n$ и при $\xi>0$ и $k+n$ четном и отрицательны при $\xi>0$ и $k+n$ нечетном.

2.3 Оценки норм периодических решений

Рассмотрим прежде всего случай уравнений второго порядка с действительными коэффициентами

$$\ddot{x}+a\dot{x}+bx=f(t) \tag{2.3.1}$$

Пусть $a_j\ (j=1,2,3)$ обозначают норму интегрального оператора $A\colon \mathrm{B}_T\to \mathrm{B}_T$

$$(Af)(t)=\int_0^T G_2(s)\,f(t-s)\,ds \tag{2.3.2}$$

в каждом из следующих трех случаев: a_1 – корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения действительны и различны; a_2 – число λ является действительным корнем кратности два; a_3 – корни λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными.

Теорема 2.3. *Пусть* $\lambda\notin\left\{\frac{2k\pi i}{T},\ \ k=0,\pm1,\ \pm2\ldots\right\}$, *тогда*

$$a_1=a_2=\frac{1}{|b|}; \tag{2.3.3}$$

если же $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ $(\alpha<0,\ \beta>0)$, *то при выполнении условия* $\beta T=\pi m\ (m=2k,\ k=1,2,\ldots)$

$$a_3=\frac{1+e^{(\alpha/\beta)\pi}}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}; \tag{2.3.4}$$

при выполнении условия $\beta T=\pi m\ (m=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots)$

$$a_3=\frac{\left(1-e^{\alpha T}\right)\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}; \tag{2.3.5}$$

если же $2\pi m + arctg\left(-\frac{h}{d}\right) \le \beta T \le \pi(2m+1) + arctg\left(-\frac{h}{d}\right),$

$$h = e^{\alpha T}\sin\beta T>0,\ d=1-e^{\alpha T}\cos\beta T, \text{то}$$

$$a_3=\frac{2\exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}arctg\left(\frac{e^{\alpha T}\sin\beta T}{1-e^{\alpha T}\cos\beta T}\right)\right]}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-2e^{\alpha T}\cos\beta T+e^{2\alpha T}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{(\alpha/\beta)\pi}\left(1-e^{2(\alpha/\beta)\pi m}\right)}{1-e^{(\alpha/\beta)\pi}}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}; \tag{2.3.6}$$

и наконец, если

$$\pi(2m-1) + arctg\left(-\frac{h}{d}\right) \le \beta T \le 2\pi m + arctg\left(-\frac{h}{d}\right),$$

$$h = e^{\alpha T}\sin\beta T<0,\quad d=1-e^{\alpha T}\cos\beta T,$$

то

$$a_3=\frac{2\exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}arctg\left(\frac{e^{\alpha T}\sin\beta T}{1-e^{\alpha T}\cos\beta T}\right)\right]}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-2e^{\alpha T}\cos\beta T+e^{2\alpha T}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{(\alpha/\beta)\pi m}-1}{e^{(\alpha/\beta)\pi}-1}-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{2.3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $\lambda_1<0<\lambda_2$, тогда $T-$периодическое решение уравнения (1) будет иметь вид

$$\varphi(t)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^T\left(\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}-\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}\right)f(t-s)ds. \tag{2.3.8}$$

Очевидно, что

$$\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}<\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}\quad (0\le s\le T),$$

поэтому

$$a_1=\int_0^T|G_2(s)|ds=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^T\left(\frac{e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(-\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)=-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{|b|}.$$

Далее рассмотрим случай кратного корня. Пусть для определенности $\lambda<0$, тогда

$$\varphi(t)=\frac{1}{1-e^{\lambda T}}\int_0^T\left(s+\frac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right)e^{\lambda s}f(t-s)ds,$$

т.е.

$$a_2=\int_0^T|G_2(s)|ds=\int_0^T G_2(s)ds=\frac{1}{1-e^{\lambda T}}\int_0^T se^{\lambda s}ds+\frac{Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\int_0^T e^{\lambda s}ds=$$

$$=\frac{(\lambda T-1)e^{\lambda T}}{\lambda^2(1-\lambda T)}+\frac{1}{\lambda^2\left(1-e^{\lambda T}\right)}-\frac{Te^{\lambda T}}{\lambda\left(1-e^{\lambda T}\right)}=$$

$$=\frac{\lambda Te^{\lambda T}-e^{\lambda T}+1-\lambda Te^{\lambda T}}{\lambda^2\left(1-e^{\lambda T}\right)}=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{|b|}.$$

В случае комплексно-сопряженных корней

$$G_2(s)=\frac{1}{2\beta i}\left(\frac{e^{\alpha s}e^{i\beta s}}{1-e^{\alpha T}e^{i\beta T}}-\frac{e^{\alpha s}e^{-i\beta s}}{1-e^{\alpha T}e^{-i\beta T}}\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha s}}{2\beta i}\left(\frac{\cos\beta s+i\sin\beta s}{1-e^{\alpha T}\cos\beta T-ie^{\alpha T}\sin\beta T}-\frac{\cos\beta s-i\sin\beta s}{1-e^{\alpha T}\cos\beta T+ie^{\alpha T}\sin\beta T}\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha s}}{\beta c^2}(d\sin\beta s+h\cos\beta s),\tag{2.3.9}$$

где $h=e^{\alpha T}\sin\beta T,\ d=1-e^{\alpha T}\cos\beta T,\ c^2=h^2+d^2.$

Так как $G_2(0)=\dfrac{h}{\beta c^2}$, то знак функции Грина в нуле зависит от знака величины $\sin\beta T$. Определим интервалы знакопостоянства функции Грина. Решив уравнение

$$d\sin\beta s+h\cos\beta s=0,$$

получаем

$$\beta s=arctg\left(-\frac{h}{d}\right)+\pi m\quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Таким образом, в случае $h=0$ функция Грина положительна, если

$$2\pi m<\beta s<(2m+1)\pi\quad (m=0,1,2,...),\tag{2.3.10}$$

и отрицательна, если

$$(2m+1)\pi<\beta s<2(m+1)\pi\quad (m=0,1,2,...),\tag{2.3.11}$$

следовательно при $\beta T=\pi m,\ m=2k\ (k=1,2,...)$

$$a_3=\int_0^T|G_2(s)|ds=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\int_{\frac{\pi n}{\beta}}^{\frac{\pi(n+1)}{\beta}}G_2(s)ds=$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{1}{\beta c^2}\int_{\frac{\pi n}{\beta}}^{\frac{\pi(n+1)}{\beta}}e^{\alpha s}(d\sin\beta s+h\cos\beta s)ds=$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}(-1)^n\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\Big[(\alpha d+\beta h)e^{\alpha s}\sin\beta s+(\alpha h-\beta d)e^{\alpha s}\cos\beta s\Big]\Big|_{\beta s=\pi n}^{\beta s=\pi(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\sum_{n=0}^{m-1}\left(-1\right)^n[(\alpha d+\beta h)e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}\sin\pi\left(n+1\right)+$$

$$+\left(\alpha h-\beta d\right)e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}\cos\pi\left(n+1\right)-$$

$$-\left(\alpha d+\beta h\right)e^{(\alpha/\beta)\pi n}\sin\pi n-\left(\alpha h-\beta d\right)e^{(\alpha/\beta)\pi n}\cos\pi n]=$$

$$=\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\sum_{n=0}^{m-1}\left(-1\right)^n(\alpha h-\beta d)\left[\left(-1\right)^{n+1}e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}-\left(-1\right)^n e^{(\alpha/\beta)\pi n}\right]=$$

$$=\frac{\alpha h-\beta d}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\sum_{n=0}^{m-1}\left(-1\right)^{2n+1}\left[e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}+e^{(\alpha/\beta)\pi n}\right]=$$

$$=\frac{d}{c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\sum_{n=0}^{m-1}\left(-1\right)^{2n+2}\left[e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}+e^{(\alpha/\beta)\pi n}\right]=$$

$$=\frac{d}{c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(\frac{e^{(\alpha/\beta)\pi}-e^{(\alpha/\beta)\pi(m+1)}}{1-e^{(\alpha/\beta)\pi}}+\frac{1-e^{(\alpha/\beta)\pi m}}{1-e^{(\alpha/\beta)\pi}}\right)=$$

$$=\frac{\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi m}\right)}{d\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}=\frac{\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)\left(1-e^{\alpha T}\right)}{\left(1-e^{\alpha T}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}=$$

$$=\frac{1+e^{(\alpha/\beta)\pi}}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)},$$

что совпадает с равенством (2.3.4).

В случае, если $\beta T=\pi m\ \ \left(m=2k+1;\ k=0,1,2,...\right)$, получаем

$$a_3=\int_0^T|\,G_2\left(s\right)|\,ds=a_3=\sum_{n=0}^{m-1}\left(-1\right)^n\int_{\frac{\pi n}{\beta}}^{\frac{\pi(n+1)}{\beta}}G_2\left(s\right)ds=$$

$$=\frac{\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi m}\right)}{d\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}=\frac{\left(1-e^{\alpha T}\right)\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)},$$

что совпадает с равенством (2.3.5).

Рассмотрим далее случай, когда $h=e^{\alpha T}\sin\beta T>0$. В этом случае функция Грина положительна, если

$$0<\beta s<arctg\left(-\frac{h}{d}\right)+\pi,$$

$$2\pi m+arctg\left(-\frac{h}{d}\right)<\beta s<\pi\left(2m+1\right)+arctg\left(-\frac{h}{d}\right),\ m=1,2,...,\qquad(2.3.12)$$

и отрицательна, если

$$\pi\left(2m+1\right)+arctg\left(-\frac{h}{d}\right)<\beta s<2\pi\left(m+1\right)+arctg\left(-\frac{h}{d}\right),\ m=0,1,2,...\ .$$

Пусть для определенности выполнено неравенство (2.3.12), тогда, обозначив $\mu=-\dfrac{h}{d}$, получаем

$$a_3=\int\limits_0^T|G_2(s)|\,ds=\int\limits_0^{\frac{1}{\beta}(\operatorname{arctg}\mu+\pi)}G_2(s)ds+\sum_{n=1}^{2m-1}(-1)^n\int\limits_{\frac{1}{\beta}(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)}^{\frac{1}{\beta}[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu]}G_2(s)ds+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{\beta}(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)}^{T}G_2(s)ds=\frac{1}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[(\alpha d+\beta h)e^{\frac{\alpha}{\beta}(\operatorname{arctg}\mu+\pi)}+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{\beta}(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)}^{T}G_2(s)ds=\frac{1}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[(\alpha d+\beta h)e^{\frac{\alpha}{\beta}(\operatorname{arctg}\mu+\pi)}$$

$$+(\alpha h-\beta d)e^{\frac{\alpha}{\beta}(\operatorname{arctg}\mu+\pi)}\cos(\operatorname{arctg}\mu+\pi)-(\alpha h-\beta d)\Big]+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\sum_{n=1}^{n=2m-1}(-1)^n\Big\{(\alpha d+\beta h)e^{\frac{\alpha}{\beta}[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu]}\sin[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu]+$$

$$+(\alpha h-\beta d)e^{\frac{\alpha}{\beta}[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu]}\cos[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu]-$$

$$-(\alpha d+\beta h)e^{(\alpha/\beta)(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)}\sin(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)-$$

$$-(\alpha h-\beta d)e^{(\alpha/\beta)(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)}\cos(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)\}+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}[(\alpha d+\beta h)e^{\alpha T}\sin\beta T\ +(\alpha h-\beta d)e^{\alpha T}\cos\beta T-$$

$$-(\alpha d+\beta h)e^{(\alpha/\beta)(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)}\sin(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)-$$

$$-(\alpha h-\beta d)e^{(\alpha/\beta)(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)}\cos(2\pi m+\operatorname{arctg}\mu)]=$$

$$=\frac{e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\{(\alpha d+\beta h)(h/c)e^{(\alpha/\beta)\pi}+(\alpha h-\beta d)(-d/c)e^{(\alpha/\beta)\pi}+$$

$$+\sum_{n=1}^{n=2m-1}(-1)^n[(\alpha d+\beta h)e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}\frac{h}{c}(-1)^n+(\alpha h-\beta d)e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}(-1)^{n+1}\frac{d}{c}-$$

$$-(\alpha d+\beta h)e^{(\alpha/\beta)\pi n}\frac{h}{c}(-1)^{n+1}-(\alpha h-\beta d)e^{(\alpha/\beta)\pi n}(-1)^n\frac{d}{c}]-$$

$$-(\alpha d+\beta h)e^{2(\alpha/\beta)\pi m}\left(-\frac{h}{c}\right)-(\alpha h-\beta d)e^{2(\alpha/\beta)\pi m}\frac{d}{c}\}+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\Big[(\alpha d+\beta h)h+(\alpha h-\beta d)e^{\alpha T}\cos\beta T-(\alpha h-\beta d)\Big]=$$

$$=\frac{e^{(\alpha/\beta)\operatorname{arctg}\mu}}{\beta c^2(\alpha^2+\beta^2)}\left\{\beta ce^{(\alpha/\beta)\pi}+\beta c\sum_{n=1}^{n=2m-1}\Big[e^{(\alpha/\beta)\pi(n+1)}+e^{(\alpha/\beta)\pi n}\Big]+\beta ce^{2(\alpha/\beta)\pi m}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[\left(\alpha d+\beta h\right)h-\left(\alpha h-\beta d\right)d\right]=$$

$$=\frac{2e^{(\alpha/\beta)\operatorname{arctg}\mu}e^{(\alpha/\beta)\pi}\left(1-e^{2(\alpha/\beta)\pi m}\right)}{c\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}=$$

$$=\frac{2\exp\left[\left(\alpha/\beta\right)\operatorname{arctg}\left(-\frac{e^{\alpha T}\sin\beta T}{1-e^{\alpha T}\cos\beta T}\right)\right]e^{(\alpha/\beta)\pi}\left(1-e^{2(\alpha/\beta)\pi m}\right)}{\left(1-2e^{\alpha T}\cos\beta T+e^{2\alpha T}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}+\frac{1}{\alpha^2+\beta^2},$$

что совпадает с равенством (2.3.6).

Пусть, далее, $h=e^{\alpha T}\sin\beta T<0$ и

$$\pi(2m-1)+\operatorname{arctg}\left(-\frac{h}{d}\right)\le\beta T\le 2\pi m+\operatorname{arctg}\left(-\frac{h}{d}\right),$$

тогда

$$a_3=-\int\limits_0^{\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\mu}G_2(s)ds+\sum_{n=0}^{n=2m-2}(-1)^n\int\limits_{\beta^{-1}(\pi n+\operatorname{arctg}\mu)}^{\beta^{-1}\left[\pi(n+1)+\operatorname{arctg}\mu\right]}G_2(s)ds-\int\limits_{\beta^{-1}\left[\pi(2m-1)+\operatorname{arctg}\mu\right]}^{T}G_2(s)=$$

$$=\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\{-\left(\alpha d+\beta h\right)e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}\left(-h/c\right)-$$

$$-\left(\alpha h-\beta d\right)e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}\left(d/c\right)+\left(\alpha h-\beta d\right)+$$

$$+\beta c\sum_{n=0}^{n=2m-2}\left(e^{\pi(\alpha/\beta)(n+1)}+e^{\pi(\alpha/\beta)n}\right)e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}-\left(\alpha d+\beta h\right)e^{\alpha T}\sin\beta T-$$

$$-\left(\alpha h-\beta d\right)e^{\alpha T}\cos\beta T+\left(\alpha d+\beta h\right)e^{\pi(\alpha/\beta)(2m-1)}e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}\left(h/c\right)+$$

$$+\left(\alpha h-\beta d\right)e^{(\alpha/\beta)\pi(2m-1)}e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}\left(-d/c\right)\}=$$

$$=\frac{e^{(\alpha/\beta)arctg\mu}}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left\{\beta c+\beta c\cdot\frac{e^{2(\alpha/\beta)\pi m}-e^{(\alpha/\beta)\pi}+e^{(\alpha/\beta)\pi(2m+1)}-1}{e^{(\alpha/\beta)\pi}-1}+\beta c e^{(\alpha/\beta)\pi(2m-1)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[-\left(\alpha d+\beta h\right)+\left(\alpha h-\beta d\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}arctg\mu}\left(e^{\frac{2\alpha\pi m}{\beta}}-1\right)}{c\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}-1\right)}-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2},$$

что совпадает с доказываемым равенством (2.3.7).

Теорема 2.3 доказана.

Заметим, что в условиях доказанной теоремы производная $T-$периодического решения φ уравнения (2.3.1) определяется равенством

$$\dot{\varphi}(t)=\int_0^T \dot{G}(s)\, f(t-s)\,ds \equiv (A_1 f)(t). \qquad (2.3.13)$$

Действительно,

$$\dot{\varphi}(t)=\int_0^T G_2(s)\,\dot{f}(t-s)\,ds=-G_2(s)\,f(t-s)\Big|_0^T+\int_0^T \dot{G}_2(s)\,f(t-s)\,ds=\int_0^T \dot{G}_2(s)\,f(t-s)\,ds.$$

Пусть $b_j\ (j=1,2,3)$ обозначает норму интегрального оператора $A_1: \mathrm{B}_T \to \mathrm{B}_T$ в каждом из следующих случаев: b_1 – корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 вещественны и различны, $b_2 -\ \lambda$ является корнем кратности два, $b_3 -$ корни λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными.

Теорема 2.4. *Пусть*

$$\lambda \notin \left\{ \frac{2k\pi i}{T},\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2... \right\}, \qquad (2.3.14)$$

тогда

$$b_1=\left[(\lambda_2-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)\right]^{-1}\left\{1+e^{\lambda_1 T}-2\left[\frac{\lambda_1\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)}{\lambda_2\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}\right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\right\}+$$

$$+\left[(\lambda_2-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)\right]^{-1}\left\{2\left[\frac{\lambda_1\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)}{\lambda_2\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}-1-e^{\lambda_2 T}\right\}\ (\lambda_1<\lambda_2<0); \qquad (2.3.15)$$

$$b_2=-\frac{2}{\lambda\left(1-e^{\lambda T}\right)}\cdot \exp\left(-1-\frac{\lambda T e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right)-\frac{2Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\ (\lambda<0), \qquad (2.3.16)$$

$$b_3=\frac{2\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}arctg\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)},\ \textit{если}\ \beta T=\pi m,\ m=2k\ (k=1,2,...), \qquad (2.3.17)$$

$$b_3=\frac{2\left(1-e^{\alpha T}\right)\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}arctg\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)},\ \text{если}\ \beta T=\pi m,\ m=2k+1\ (k=0,1,2,...), \qquad (2.3.18)$$

$$b_3=\frac{2\left(1-e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi(m+1)}\right)\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}arctg\,\mu_1\right)}{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)}+(-1)^{m+1}\frac{h}{\beta c^2}-\frac{h}{\beta c^2}, \qquad (2.3.19)$$

если $d\beta + h\alpha > 0,\ h\beta - d\alpha > 0,\ \mu_1 = \dfrac{d\beta + h\alpha}{h\beta - d\alpha},$ *а число* m *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{arctg}\mu_1 + \pi m < \beta T < \operatorname{arctg}\mu_1 + \pi(m+1),\ h = e^{\alpha T}\sin\beta T,\ d = 1 - e^{\alpha T}\cos\beta T,$$

$$b_3 = \frac{2de^{\frac{\pi\alpha}{2\beta}}\left[1 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}(m+1)}\right]}{\beta c^2\left(1 - e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)} - \frac{h}{\beta c^2} + \frac{(-1)^{m+1}h}{\beta c^2}, \tag{2.3.20}$$

если $h\beta - d\alpha = 0$ *и число* βT *удовлетворяет неравенству*

$\dfrac{\pi}{2} + \pi m < \beta T < \dfrac{\pi}{2} + \pi(m+1)$ *при некотором* $m = 0,1,2,...,\ c^2 = h^2 + d^2.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0,$ тогда функция $\dot{G}_2(s)$ имеет вид

$$\dot{G}_2(s) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}}\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что $\dot{G}(s) \geq 0$ при всех $0 \leq s \leq s_*,$ где

$$s_* = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \ln\frac{\lambda_1\left(1 - e^{\lambda_2 T}\right)}{\lambda_2\left(1 - e^{\lambda_1 T}\right)}, \tag{2.3.21}$$

и $\dot{G}_2(s) \leq 0$ при всех $s_* \leq s \leq T.$ Действительно, $\dot{G}(0)$ представляет собой разделенную разность функции $\dfrac{\lambda}{1 - e^{\lambda T}}$, построенную по точкам $\lambda_1, \lambda_2,$ т.е. равна производной этой функции в некоторой точке $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2].$ Так как

$$\left(\frac{\lambda}{1 - e^{\lambda T}}\right)'_\lambda = \frac{1 + (\lambda T - 1)e^{\lambda T}}{\left(1 - e^{\lambda T}\right)^2},$$

то неотрицательность последнего выражения будет установлена, если мы докажем неравенство

$$\tau(\lambda) := 1 + (\lambda T - 1)e^{\lambda T} \geq 0 \quad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < 0).$$

Для доказательства последнего неравенства заметим, что

$$\tau(0) = 0,\ \tau'(\lambda) = Te^{\lambda T} + \lambda T^2 e^{\lambda T} - Te^{\lambda T} = \lambda T^2 e^{\lambda T} < 0,$$

т.е. при $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < 0$ функция $\tau(\lambda)$ положительна. Далее найдем точку $s_*,$ в которой $\dot{G}(s_*) = 0.$ Решив уравнение

$$\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 s}}{1 - e^{\lambda_2 T}} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 s}}{1 - e^{\lambda_1 T}},$$

получаем, что s_* определяется равенством (2.3.21). Найдем далее знак числа

$\dot{G}_2(T)$. Так как $\dot{G}_2(T)$является разделенной разностью $[\lambda_1,\lambda_2]$ функции $\dfrac{\lambda e^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}$, то

$$\dot{G}_2(T)=\frac{\left(e^{\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}\right)\left(1-e^{\lambda T}\right)-\lambda e^{\lambda T}\left(-Te^{\lambda T}\right)}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\lambda T}-e^{2\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}=\frac{e^{\lambda T}\left(1-e^{\lambda T}+\lambda T\right)}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}$$

при некотором λ $(\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2<0)$. Знак последнего выражения определяется множителем $k(\lambda):=1-e^{\lambda T}+\lambda T.$

Так как $\kappa(0)=0, \dot{\kappa}(\lambda)=T\left(1-e^{\lambda T}\right)>0$ $(\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2<0)$, то $\kappa(\lambda)<0$ при $\lambda<0,$ т.е. $\dot{G}_2(T)<0.$ Таким образом,

$$b_1=\int_0^T\left|\dot{G}_2(s)\right|ds=\int_0^{s_*}\dot{G}_2(s)ds-\int_{s_*}^T\dot{G}_2(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{e^{\lambda_2 s_*}-1}{1-e^{\lambda_2 T}}-\frac{e^{\lambda_1 s_*}-1}{1-e^{\lambda_1 T}}+\frac{e^{\lambda_1 T}-e^{\lambda_1 s_*}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{e^{\lambda_2 T}-e^{\lambda_2 s_*}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}\left\{1+e^{\lambda_1 T}-2\left[\frac{\lambda_1\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)}{\lambda_2\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}\right]^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)}\left\{2\left[\frac{\lambda_1\left(1-e^{\lambda_2 T}\right)}{\lambda_2\left(1-e^{\lambda_1 T}\right)}\right]^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}-1-e^{\lambda_2 T}\right\}.$$

Отметим, что предел при $T\to\infty$ полученного выражения совпадает с формулой (5) работы [9] , т. е. равен

$$2\left|\lambda_1\right|^{\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|-|\lambda_1|}}\cdot\left|\lambda_2\right|^{\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|-|\lambda_2|}}. \qquad (2.3.22)$$

В случае вещественного кратного корня функция Грина $G_2(s)$ имеет вид

$$G_2(s)=\frac{se^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}+\frac{Te^{\lambda T}e^{\lambda s}}{(1-e^{\lambda T})^2}$$

и, следовательно,

$$\dot{G}_2(s)=\frac{1-e^{\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\cdot e^{\lambda s}+\frac{\lambda se^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}=\frac{1-e^{\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}+\lambda s\left(1-e^{\lambda T}\right)e^{\lambda s}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2},$$

т.е. знак функции $\dot{G}(s)$ определяется множителем

$$g(\lambda,s):=1-e^{\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}+\lambda s\left(1-e^{\lambda T}\right),$$

который (т. к. $\lambda<0$) очевидным образом убывает при возрастании $s(0\le s\le T)$. Так как $g(\lambda,0)=1-e^{\lambda T}+\lambda Te^{\lambda T}>0$ и $g(\lambda,s_*)=0,$ где

$$s_*=-\frac{1}{\lambda}-\frac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}},$$

причем $0<s_*<T$ и $g(\lambda,T)=1-e^{\lambda T}+\lambda T<0,$ то

$$b_2=\int_0^{s_*}\dot{G}_2(s)ds-\int_{s_*}^{T}\dot{G}_2(s)ds=\left.\frac{se^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}+\frac{Te^{\lambda T}e^{\lambda s}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\right|_0^{-\frac{1}{\lambda}-\frac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}-$$

$$-\left.\frac{se^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}-\frac{Te^{\lambda T}e^{\lambda s}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\right|_{-\frac{1}{\lambda}-\frac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}^{T}=\frac{2}{1-e^{\lambda T}}\left(-\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda T}{1-e^{\lambda T}}\right)e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}+$$

$$+\frac{2Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\cdot e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}-\frac{Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}-\frac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}-\frac{Te^{2\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}=$$

$$=\frac{-1+e^{\lambda T}-\lambda Te^{\lambda T}}{\lambda\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\cdot 2e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}+\frac{2Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\cdot e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}-\frac{Te^{\lambda T}-Te^{2\lambda T}+Te^{\lambda T}+Te^{2\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(e^{\lambda T}-1\right)}{\lambda\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\cdot e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}-\frac{2Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}=-\frac{2}{\lambda\left(1-e^{\lambda T}\right)}\cdot e^{-1-\frac{\lambda Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}}-\frac{2Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2},$$

что совпадает с равенством (2.3.16).

Рассмотрим далее случай, когда характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $\alpha\pm i\beta(\alpha<0,\ \beta>0)$; пусть $\beta T=\pi m,$ $m=2k(k=1,2,...),$ тогда

$$\dot{G}(s)=\frac{\alpha}{\beta\left(1-e^{\alpha T}\right)}\cdot e^{\alpha s}\sin\beta s+\frac{1}{1-e^{\alpha T}}\cdot e^{\alpha s}\cos\beta s.$$

Учитывая интервалы знакопостоянства функции $\dot{G}_2(s)$

$$\operatorname{arctg}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+\pi n<\beta s<\operatorname{arctg}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+\pi(n+1)$$

и обозначив $\operatorname{arctg}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\gamma,$ получаем

$$\int_0^T\left|\dot{G}_2(s)\right|ds=\int_0^{\frac{\gamma}{\beta}}\dot{G}_2(s)ds+\sum_{n=0}^{n=m-2}(-1)^{n+1}\int_{\beta^{-1}(\gamma+\pi n)}^{\beta^{-1}[\gamma+\pi(n+1)]}\dot{G}_2(s)ds+\int_{\beta^{-1}[\gamma+\pi(m-1)]}^{\beta^{-1}\pi m}\dot{G}_2(s)ds=$$

$$=\frac{1}{\beta d}\left\{e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}\sin\gamma+\sum_{n=0}^{n=m-2}(-1)^{n+1}\left[e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}\cdot e^{\frac{\alpha\pi(n+1)}{\beta}}\sin\left[\gamma+\pi(n+1)\right]-e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}\cdot e^{\frac{\alpha\pi n}{\beta}}\sin(\gamma+\pi n)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta d}\left\{e^{\frac{\alpha\pi m}{\beta}}\sin\pi m-e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}\cdot e^{\frac{\alpha\pi(m-1)}{\beta}}\sin\left[\gamma+\pi(m-1)\right]\right\}=$$

что совпадает с правой частью доказываемого равенства (2.3.17).

Пусть далее, $\beta T=\pi m, m=2k+1\ (k=0,1,2,...)$.В этом случае

$$\int_0^T\left|\dot G_2(s)ds\right|=\int_0^{\frac{\gamma}{\beta}}\dot G_2(s)ds+\sum_{n=0}^{n=m-2}(-1)^{n+1}\int_{\beta^{-1}(\gamma+\pi n)}^{\beta^{-1}[\gamma+\pi(n+1)]}\dot G_2(s)ds-\int_{\beta^{-1}[\gamma+\pi(m-1)]}^{\beta^{-1}\pi m}\dot G(s)ds=$$

$$=\frac{e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}}{d\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[1+\sum_{n=0}^{n=m-2}e^{\frac{\alpha\pi(n+1)}{\beta}}+e^{\frac{\alpha\pi n}{\beta}}+e^{\frac{\alpha\pi(m-1)}{\beta}}\right]=$$

$$=\frac{e^{\frac{\alpha\gamma}{\beta}}}{d\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{2\left(e^{\frac{\alpha\pi m}{\beta}}-1\right)}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}-1}=\frac{2e^{\frac{\alpha}{\beta}arctg\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|}\left(1-e^{\alpha T}\right)}{\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

что совпадает с равенством (2.3.18).

Переходим к рассмотрению общего случая. Так как

$$\dot G_2(s)=\frac{1}{\beta c^2}\left[(d\alpha-h\beta)e^{\alpha s}\sin\beta s+(d\beta+h\alpha)e^{\alpha s}\cos\beta s\right],$$

то интервалами знакопостоянства функции $\dot G_2(s)$ являются интервалы

$$\operatorname{arctg}\mu_1+\pi n<\beta s<\operatorname{arctg}\mu_1+\pi(n+1),\ n=0,\pm1,\pm2,...,$$

где $\mu_1=\dfrac{h\alpha+d\beta}{h\beta-d\alpha}$.

Рассмотрим случай, когда $\dot G_2(0)=\dfrac{d\beta+h\alpha}{\beta c^2}>0,\quad \mu_1>0.$

Тогда

$$b_3=\int_0^T\left|\dot G_2(s)\right|ds=\int_0^{\beta^{-1}\operatorname{arctg}\mu_1}\dot G_2(s)ds+\sum_{j=0}^{j=m-1}(-1)^{j+1}\int_{\beta^{-1}(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi j)}^{\beta^{-1}[\operatorname{arctg}\mu_1+\pi(j+1)]}\dot G_2(s)ds+$$

$$+(-1)^{m+1}\int_{\beta^{-1}(arctg\mu_1+\pi m)}^{T}\dot G(s)ds=\frac{1}{\beta c^2}\left[de^{\frac{\alpha}{\beta}arctg\mu_1}\sin(arctg\mu_1)+he^{\frac{\alpha}{\beta}arctg\mu_1}\cos(arctg\mu_1)-h\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2}\left\{\sum_{j=0}^{j=m-1}(-1)^{j+1}e^{\frac{\alpha}{\beta}[arctg\mu_1+\pi(j+1)]}\left[d\sin[arctg\mu_1+\pi(j+1)]+h\cos[arctg\mu_1+\pi(j+1)]\right]\right\}-$$

$$-\left\{\sum_{j=0}^{j=m-1}(-1)^{j+1}e^{\frac{\alpha}{\beta}(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi j)}\left[d\sin(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi j)+h\cos(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi j)\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{\beta c^2}\left\{(-1)^{m+1}\left[e^{\alpha T}(d\sin\beta T+h\cos\beta T)\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{\beta c^2}\left[e^{\frac{\alpha}{\beta}(arctg\,\mu_1)}\left(d\sin\left(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi m\right)+h\cos\left(\operatorname{arctg}\mu_1+\pi m\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\mu_1}\left\{1+\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}\pi(m+1)}-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}-1}+\frac{e^{\frac{\alpha\pi m}{\beta}}-1}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}-1}+e^{\frac{\alpha\pi m}{\beta}}\right\}+(-1)^{m+1}\frac{h}{\beta c^2}-\frac{h}{\beta c^2}=$$

$$=\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\mu_1}\cdot\frac{2\left(e^{\frac{\alpha\pi(m+1)}{\beta}}-1\right)}{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}-1}+(-1)^{m+1}\frac{h}{\beta c^2}-\frac{h}{\beta c^2}.$$

2.4 Спектральная оптимизация нормы периодического решения

В этом разделе мы исследуем зависимость норм T-периодического решения и его производной от расположения корней характеристического уравнения. Рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.5. *Для любых* $s,\tau: 0<s,\tau<1$ *справедливо неравенство*

$$s^{1-\tau}\left(1-s^{2\tau}\right)<\tau\left(1-s^2\right). \tag{2.4.1}$$

Доказательство. При фиксированном s рассмотрим левую часть неравенства (2.4.1) как функцию от τ: $\varphi(\tau)=s^{1-\tau}\left(1-s^{2\tau}\right)$. Так как

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}=s^{1-\tau}\left(1-s^{2\tau}\right)\cdot\ln^2 s>0,$$

то φ строго выпукла. Правая часть неравенства (2.4.1) при $\tau\in[0,1]$ представляет собой хорду, соединяющую точки $(0,\varphi(0))$ и $(1,\varphi(1))$, и в силу строгой выпуклости φ обеспечивает выполнение неравенства (2.4.1).

Лемма 2.6. *При любых* $s:0<s<1$ *и* $\gamma>1/2$ *выполняется неравенство*

$$\ln s>\gamma\left(s-\frac{1}{s}\right). \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Для функции $h(s)=\gamma\left(s^2-1\right)-s\ln s$ производная $h'(s)=2\gamma s-\ln s-1$ строго выпукла на интервале $(0,1)$ и в единственной стационарной точке $s_*=1/2\gamma$ выполняется неравенство $h'(s_*)=\ln 2\gamma>0$.

Следовательно, $h'(s)>0$ и, таким образом, $h(s)$ возрастает на $(0,1)$. Так как $h(1)=0$, то $h(s)<0$ для всех $s\in(0,1)$, что и доказывает неравенство (2.4.2).

Лемма 2.7. *Для всех* $s\in(0,1)$ *функция* $f(s)=\kappa\left(\ln s+\dfrac{1-s^2}{s}\right)+\ln^3 s$, *где* $\kappa>3$, *принимает положительные значения.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция

$$g(s)=\frac{d^2}{ds^2}\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]$$

в интервале $(0,1)$ отрицательна, так как

$$\frac{d}{ds}f(s)=\kappa\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-1\right)+\frac{3}{s}\ln^2 s,\qquad s^2\frac{d}{ds}f(s)=\kappa\left(s-1-s^2\right)+3s\ln^2 s,$$

$$\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]=\kappa(1-2s)+3\ln^2 s+6\ln s,\ \frac{d^2}{ds^2}\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]=-2\kappa+\frac{6}{s}\ln s+\frac{6}{s},$$

$$s\frac{d^2}{ds^2}\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]=-2\kappa s+6\ln s+6,\ g(1)=-2\kappa+6<0,\ \lim_{s\to 0}g(s)=-\infty,$$

кроме того, в единственной стационарной точке $s_*=3/\kappa$ функция g принимает отрицательное значение

$$g(s_*)=-2\kappa\cdot\frac{3}{\kappa}+6\ln\left(\frac{3}{\kappa}\right)+6=6\ln\left(\frac{3}{\kappa}\right)<0.$$

Итак, $g(s)<0\quad(0<s<1)$, т. е. $\dfrac{d^2}{ds^2}\left[s^2\dfrac{d}{ds}f(s)\right]<0\ (0<s<1)$, а значит, функция $s^2f'(s)=\kappa\left(-s^2+s-1\right)+3s\ln^2 s$ является строго выпуклой на интервале $(0,1)$, а уравнение

$$\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]=0$$

должно иметь на $(0,1)$ единственное решение $\hat{s}$: $\kappa(1-2)\hat{s}+3\ln^2\hat{s}+6\ln\hat{s}=0$. В точке $\hat{s}$ в силу леммы 2.6

$$\left[s^2\frac{d}{ds}f(s)\right]\Big|_{s=\hat{s}}=\kappa\left(\hat{s}-1-\hat{s}^2\right)+3\hat{s}\ln^2\hat{s}=\kappa\hat{s}-\kappa-\kappa\hat{s}^2+\hat{s}\left(-\kappa+2\kappa\hat{s}-6\ln\hat{s}\right)=$$

$$=6\left[\frac{\kappa}{6}\left(\hat{s}^2-1\right)-\hat{s}\ln\hat{s}\right]=6h\left(\hat{s}\right)<0,$$

и, следовательно, для любого $s\in(0,1)$ $s^2 f'(s)<0$. Отсюда, в свою очередь, получаем, что функция $f(s)$ убывает на $(0,1)$, а поскольку $f(1)=0$, то $f(s)>0$ $(0<s<1)$.

Введем теперь в рассмотрение две функции

$$A(s,\tau)=\frac{\left(1+s^{\tau}\right)(1-s)}{\left(1-s^{\tau}\right)(1+s)}, \tag{2.4.3}$$

$$B(s,\tau)=\frac{1-s^{\tau}}{1+s^{\tau}}\left(a+\frac{b\ln^2 s}{\tau^2}\right), \tag{2.4.4}$$

в которых $0<s,\tau<1$, а a и b – фиксированные положительные константы, причем $\ln^2 s>3a/b$. Рассмотрим сначала функцию $A(s,\tau)$. Эта функция возрастает по переменной s на интервале $(0,1)$, поскольку знак производной

$$\frac{\partial A}{\partial s}=\frac{2\left[\tau s^{\tau-1}\left(1-s^2\right)-\left(1-s^{2\tau}\right)\right]}{\left[\left(1-s^{\tau}\right)(1+s)\right]^2}$$

совпадает со знаком выражения $\tau s^{\tau-1}\left(1-s^2\right)-1+s^{2\tau}$, которое в силу леммы 2.5 положительно.

Зафиксировав s, рассмотрим теперь зависимость функции $B(s,\tau)$ от τ. С этой целью, положив $p=s^{\tau}$, преобразуем ее к виду

$$B(s,p)=\frac{1-p}{1+p}\left(a+b\frac{\ln^2 s}{\ln^2 p}\right)(s<p<1). \tag{2.4.5}$$

Знак производной

$$\frac{\partial B}{\partial p}=-\frac{2a}{(1+p)^2\ln^3 p}\left[\ln^3 p+\frac{b\ln^2 s}{a}\left(\ln p+\frac{1-p^2}{p}\right)\right]$$

совпадает со знаком выражения

$$\ln^3 p+\frac{b\ln^2 s}{a}\left(\ln p+\frac{1-p^2}{p}\right),$$

которое в силу леммы 2.7 является положительным. Следовательно, при изменении переменной τ от 0 до 1

$$\frac{\partial B}{\partial \tau}=\frac{\partial B}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{\partial B}{\partial p}\cdot s^{\tau}\ln s<0$$

и функция $B(s,\tau)$ по этой переменной убывает.

Вернемся к формуле $a_3=\dfrac{\left(1-e^{\alpha T}\right)\left(1+e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{(\alpha/\beta)\pi}\right)}$; в случае, когда $\beta T=\pi m\left(m=2k+1,\ k=0,1,2,...\right)$. Если положить $e^{\alpha T}=s,\ \tau=\dfrac{1}{m}$, то

$$a_3=\frac{1}{|\lambda|^2}\cdot A(s,\tau), \tag{2.4.6}$$

и в силу вышеизложенного мы можем утверждать, что норма единственного $T-$периодического решения, определяемая формулой (2.4.6), убывает при убывании $\alpha\left(\alpha<0\right)$ и $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}a_3=0.$

Рассмотрим далее зависимость от α и β нормы производной $T-$периодического решения, определяемой формулой

$$b_3=\frac{2\left(1-e^{\alpha T}\right)\exp\left(\dfrac{\alpha}{\beta}arctg\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{\alpha T}\right)\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)}. \tag{2.4.7}$$

Так как знак производной $\dfrac{\partial b_3}{\partial\alpha}$ совпадает со знаком выражения

$$2e^{\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[\frac{1}{\beta}arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\right]\times\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)-$$

$$-2e^{\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[\frac{\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)-(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{\pi}{\beta}\right]=$$

$$=2e^{\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[\frac{1}{\beta}(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\frac{\pi}{\beta}\right]>0$$

при $-\infty<\alpha<0,$ то при убывании α функция b_3 убывает.

Далее, так как знак частной производной $\partial b_3(\alpha,\beta)/\partial\beta$ совпадает со знаком выражения

$$2e^{\frac{\alpha}{\beta}arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[-\frac{\alpha}{\beta^2}arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right]\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)-$$

$$-2e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[\frac{\beta}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)+\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\frac{\alpha\pi}{\beta^2}e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right]=$$

$$=2e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[-\frac{\alpha}{\beta^2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]-$$

$$-2e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}}{\beta}\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)+\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}\frac{\alpha\pi}{\beta^2}\cdot e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right]=$$

$$=2\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{1/2}e^{\frac{\alpha}{\beta}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\left[-\frac{\alpha}{\beta^2}arctg\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\left(1-e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right)-\frac{1}{\beta}+\frac{e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{\beta}-\frac{\alpha\pi e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}}{\beta^2}\right].$$

Аналитическое изучение поведения этой функции связано с громоздкими выкладками, поэтому мы проведем численный эксперимент в Maple:

```
> assume(alpha<0,beta>0); b[3]:=(2*exp((alpha/beta)*arctan(-beta/alpha)))/((alpha^2+beta^2)^(1/2))/(1-exp(alpha*Pi/beta));
```

$$b_3 := \frac{2\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\sim\arctan\left(\frac{\beta\sim}{\alpha\sim}\right)}{\beta\sim}}}{\sqrt{\alpha\sim^2+\beta\sim^2}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sim\pi}{\beta\sim}}\right)}$$

```
> b3beta:=factor(diff(b[3],beta));
```

$$b3beta := -\frac{2\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\sim\arctan\left(\frac{\beta\sim}{\alpha\sim}\right)}{\beta\sim}}\left(\pi\,\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sim\pi}{\beta\sim}}\alpha\sim+\arctan\left(\frac{\beta\sim}{\alpha\sim}\right)\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sim\pi}{\beta\sim}}\alpha\sim-\alpha\sim\arctan\left(\frac{\beta\sim}{\alpha\sim}\right)-\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sim\pi}{\beta\sim}}\beta\sim+\beta\sim\right)}{\sqrt{\alpha\sim^2+\beta\sim^2}\,\beta\sim^2\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\alpha\sim\pi}{\beta\sim}}\right)^2}$$

```
> b33:=subs(alpha=-1,b3beta);
```

$$b33 := -\frac{2\,\mathrm{e}^{\frac{\arctan(-\beta\sim)}{\beta\sim}}\left(-\pi\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\beta\sim}}-\arctan(-\beta\sim)\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\beta\sim}}+\arctan(-\beta\sim)-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\beta\sim}}\beta\sim+\beta\sim\right)}{\sqrt{\beta\sim^2+1}\,\beta\sim^2\left(-1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{\beta\sim}}\right)^2}$$

```
> for j from 1 to 10 do b34:= evalf[6](subs(beta=j, b33)) end do;
```

$b34 := -0.0489999$

$b34 := -0.0110985$

$b34 := -0.00374695$

$b34 := -0.00165815$

$b34 := -0.000868301$

$b34 := -0.000508650$

$b34 := -0.000322613$

$b34 := -0.000217241$

$b34 := -0.000153274$

$b34 := -0.000111792$

```
> b35:=subs(alpha=-1,b[3]);
```

$$b35 := \frac{2\,e^{\frac{\arctan(-\beta\sim)}{\beta\sim}}}{\sqrt{\beta\sim^2+1}\left(1-e^{-\frac{\pi}{\beta\sim}}\right)}$$

```
> for j from 1 to 10 do b36:= evalf[6](subs(beta=j, b35)) end do;
```

$b36 := 0.673915$

$b36 := 0.649144$

$b36 := 0.642558$

$b36 := 0.640041$

$b36 := 0.638835$

$b36 := 0.638168$

$b36 := 0.637764$

$b36 := 0.637495$

$b36 := 0.637313$

$b36 := 0.637185$

2.5 Матричные функции Грина

Пусть R – вещественная прямая, Z и σ – соответственно множества целых чисел и чисел вида

$$\left\{\frac{2k\pi i}{T},\ k\in Z\right\},$$

B_T – банахово пространство определенных на R непрерывных T – периодических функций с supremum-нормой $\|.\|$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t),\\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t)\end{cases} \qquad (2.5.1)$$

с постоянными коэффициентами a_{jk} $(j,k=1,2)$ и функциями $f_j\,(j=1,2)$ из B_T. Если положить

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix},$$

то систему (2.5.1) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\dot{x} = Ax + f(t). \qquad (2.5.2)$$

Известно ([3]), что если спектр $s(A)$ матрицы A не пересекается с множеством $\sigma,$ то при любой $T-$периодической векторной функции f уравнение (2.5.2) (или, что то же самое, система (2.5.1)) имеет единственное $T-$периодическое решение $\varphi.$

Теорема 2.5. *Пусть* $s(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$ *и* $s(A)\bigcap\sigma=\varnothing.$ *Тогда единственное* $T-$*периодическое решение* φ *уравнения* (2.5.1) *допускает следующее представление:*

$$\varphi(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left[G(\lambda_1,s)-G(\lambda_2,s)\right]f(t-s)ds, \tag{2.5.3}$$

если $\lambda_1\neq\lambda_2;$ *и*

$$\varphi(t)=\int_0^T\tilde{G}(\lambda,s)\,f(t-s)ds, \tag{2.5.4}$$

если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda,$ *где матрицы* $G(\lambda,s)$ *и* $\tilde{G}(\lambda,s)$ *имеют вид*

$$G(\lambda,s)=\frac{e^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}\begin{pmatrix}\lambda-a_{22} & a_{12}\\ a_{21} & \lambda-a_{11}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{G}(\lambda,s)=\frac{e^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}\begin{pmatrix}1+(\lambda-a_{22})\left(s+\dfrac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right) & a_{12}\left(s+\dfrac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right)\\ a_{21}\left(s+\dfrac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right) & 1+(\lambda-a_{11})\left(s+\dfrac{Te^{\lambda T}}{1-e^{\lambda T}}\right)\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем, что функция φ (ее $T-$ периодичность очевидна) является решением уравнения (2.5.2). В самом деле, полагая (в случае $\lambda_1\neq\lambda_2$)

$$\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)=\frac{G(\lambda_1,s)-G(\lambda_2,s)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

будем иметь

$$\varphi(t)=\int_0^t\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\,f(t-s)ds+\int_t^T\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\,f(t+T-s)ds=$$

$$=\int_0^t\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;t-\tau)\,f(\tau)d\tau+\int_t^T\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;t+T-\tau)\,f(\tau)d\tau,$$

а тогда

$$\dot{\varphi}(t)=\int_0^t\dot{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2;t-\tau)\,f(\tau)d\tau+\int_t^T\dot{\Gamma}(\lambda_1,\lambda_2;t+T-\tau)\,f(\tau)d\tau+$$

$$+\left[\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;0)-\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;0)\right]f(t)=\int_0^t A\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;t-\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\int_t^T A\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;t+T-\tau)f(\tau)d\tau+f(t)=A\varphi(t)+f(t).$$

Аналогично доказывается, что и формула (2.5.4) дает решение уравнения (2.5.2).

Матричную функцию $\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)$ $(0\le s\le T)$ в случае различных собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы *A*, а в случае кратного собственного значения – матричную функцию $\tilde{G}(\lambda, s)$, естественно назвать *матричной функцией Грина второго порядка* $T-$периодической задачи для уравнения (2.5.2).

Если *ввести обозначение* $\kappa(\lambda,s)=\dfrac{e^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}$, то нетрудно видеть, что матрица $G(\lambda,s)$ и матрица $\tilde{G}(\lambda,s)$ связаны следующим соотношением

$$\tilde{G}(\lambda,s)=\kappa(\lambda,s)\left\{I+\left[s+T\kappa(\lambda,s)\right]G(\lambda,s)\right\},$$

где $I-$ единичная матрица.

Далее рассмотрим вопрос о неотрицательности матриц Γ и $\tilde{G}$. Под неотрицательной мы понимаем матрицу, все элементы которой неотрицательны.

Теорема 2.6. *Если собственные значения матрицы* A *отрицательны, а ее внедиагональные элементы* a_{12} *и* a_{21} *неотрицательны, то матрицы* $\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)$ *и* $\tilde{G}(\lambda,s)$ $(0\le s\le T)$ *неотрицательны при всех* $s\in[0,T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для случая $\lambda_1\ne\lambda_2$. Так как

$$\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}<0,\ \lambda_1\lambda_2=\det A>0,\ a_{21}a_{12}\ge 0,$$

то $a_{11}a_{22}>0$, а значит $a_{11}<0$ и $a_{22}<0$. Пусть для определенности $\lambda_1<\lambda_2$ и $a_{11}\le a_{22}$. Тогда

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4\det A}\right]=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{21}a_{12}}\right]\le$$

$$\le\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+|a_{22}-a_{11}|)\le\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{21}a_{12}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2-4\det A}\right]=\lambda_1.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы установили неравенства

$$\lambda_2 \le a_{11} \le a_{22} \le \lambda_1,$$

из которых очевидным образом следует неотрицательность матрицы $\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)$ с элементами

$$\left[\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\right]_{11} = \frac{\lambda_1\kappa(\lambda_1,s)-\lambda_2\kappa(\lambda_2,s)-a_{22}\left[\kappa(\lambda_1,s)-\kappa(\lambda_2,s)\right]}{\lambda_1-\lambda_2} =$$

$$= \frac{(\lambda_1-a_{22})\kappa(\lambda_1,s)-(\lambda_2-a_{22})\kappa(\lambda_2,s)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$\left[\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\right]_{12} = \frac{a_{12}\left[\kappa(\lambda_1,s)-\kappa(\lambda_2,s)\right]}{\lambda_1-\lambda_2};$$

$$\left[\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\right]_{21} = \frac{a_{21}\left[\kappa(\lambda_1,s)-\kappa(\lambda_2,s)\right]}{\lambda_1-\lambda_2};$$

$$\left[\Gamma(\lambda_1,\lambda_2;s)\right]_{22} = \frac{\lambda_1\kappa(\lambda_1,s)-\lambda_2\kappa(\lambda_2,s)-a_{11}\left[\kappa(\lambda_1,s)-\kappa(\lambda_2,s)\right]}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Неотрицательность матрицы $\tilde{G}(\lambda,s)$ доказывается аналогичным образом.

Далее вычислим норму интегрального оператора Н, порожденного правой частью равенств (2.5.3) и (2.5.4), т.е.

$$\varphi = \mathrm{H}f, \tag{2.5.5}$$

и действующем в банаховом пространстве непрерывных T-периодических векторных функций $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ с нормой $|||\, f \,||| := \max\{\| f_1 \|, \| f_2 \|\}$.

Теорема 2.7. При выполнении условий теоремы 2.6 для нормы $|||\, H \,|||$ оператора H имеют место равенства

$$|||\, H \,||| = \begin{cases} \dfrac{1}{\det A}\max\{a_{12}-a_{22},\, a_{21}-a_{11}\}, \text{\textit{если}}\, \lambda_1 \ne \lambda_2, \\ \dfrac{1}{\det A}\max\left\{a_{21}-\sqrt{\det A};\, a_{12}-\sqrt{\det A}\right\}, \text{\textit{если}}\, \lambda_1=\lambda_2=\lambda. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_1 \ne \lambda_2$ и $\varphi = \mathrm{H}f$, тогда последнее равенство в координатной форме примет вид

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left[\frac{(\lambda_1-a_{22})e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{(\lambda_2-a_{22})e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]f_1(t-s)ds+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left[\frac{a_{12}e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{a_{12}e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]f_2(t-s)ds; \qquad (2.5.6)$$

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left[\frac{a_{21}e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{a_{21}e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]f_1(t-s)ds+$$

$$+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^T\left[\frac{(\lambda_1-a_{11})e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{(\lambda_2-a_{11})e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]f_2(t-s)ds. \qquad (2.5.7)$$

Из равенств (2.5.6) и (2.5.7) вытекает, что $|||H|||=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\max\{b_1,b_2\}$, где

$$b_1=\int_0^T\left[\frac{(\lambda_1-a_{22})e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{(\lambda_2-a_{22})e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]ds+\int_0^T\left[\frac{a_{12}e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{a_{12}e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]ds;$$

$$b_2=\int_0^T\left[\frac{a_{21}e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{a_{21}e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]ds+\int_0^T\left[\frac{(\lambda_1-a_{11})e^{\lambda_1 s}}{1-e^{\lambda_1 T}}-\frac{(\lambda_2-a_{11})e^{\lambda_2 s}}{1-e^{\lambda_2 T}}\right]ds.$$

Находя интегралы, расположенные в правой части последнего равенства, получим требуемый результат. В случае кратного корня из условий теоремы следует, что $\lambda=a_{11}=a_{22}$ и, по крайней мере, одно из чисел a_{12} или a_{21} обращается в нуль. Предположим, что $a_{12}=0$. Тогда $|||H|||=\max\{c_1,c_2\}$, где $c_1=\int_0^T\frac{e^{\lambda s}}{1-e^{\lambda T}}ds$;

$$c_2=\int_0^T\left\{\left[\frac{s}{1-e^{\lambda T}}+\frac{Te^{\lambda T}}{\left(1-e^{\lambda T}\right)^2}\right]a_{21}e^{\lambda s}+\frac{s}{1-e^{\lambda T}}\right\}ds.$$

Таким образом, $|||H|||=\frac{a_{21}}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda}$.

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ – 1

Найти оригиналы по заданному изображению $F(p)=1/g(p)$:

1.1. $g(p)=p^2-4p+3$;
1.2. $g(p)=p^2-5p+6$;
1.3. $g(p)=p^2-7p+12$;
1.4. $g(p)=p^2-9p+20$;
1.5. $g(p)=p^2-8p+15$;
1.6. $g(p)=p^2-11p+30$;
1.7. $g(p)=p^2-7p+10$;
1.8. $g(p)=p^2-8p+12$;
1.9. $g(p)=p^2-9p+18$;
1.10. $g(p)=p^2-10p+24$;
1.11. $g(p)=p^2-8p+7$;
1.12. $g(p)=p^2-9p+14$;
1.13. $g(p)=p^2-10p+21$;
1.14. $g(p)=p^2-11p+28$;
1.15. $g(p)=p^2-12p+35$.

ИДЗ – 2

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях: $x(0)=x'(0)=0$.

2.1. $x''-4x'+3x=\sin t$;
2.2. $x''-5x'+6x=\cos t$;
2.3. $x''-7x'+12x=\sin 2t$;
2.4. $x''-8x'+15x=\cos 2t$;
2.5. $x''-9x'+20x=\sin 3t$;
2.6. $x''-11x'+30x=\cos 3t$;
2.7. $x''-7x'+10x=\sin 4t$;
2.8. $x''-8x'+12x=\sin 5t$;
2.9. $x''-9x'+18x=\cos 5t$;
2.10. $x''-10x'+24x=\sin 6t$;
2.11. $x''-8x'+7x=\cos 6t$;
2.12. $x''-9x'+14x=\sin 7t$;
2.13. $x''-10x'+21x=\cos 7t$;
2.14. $x''-11x'+28x=\sin 8t$;
2.15. $x''-13x'+42x=\cos 8t$.

ИДЗ – 3

Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях: $x(0)=2,\ x'(0)=3$:

3.1. $x''-4x'+3x=\sin t$;
3.2. $x''-5x'+6x=\cos t$;
3.3. $x''-7x'+12x=\sin 2t$;
3.4. $x''-8x'+15x=\cos 2t$;
3.5. $x''-9x'+20x=\sin 3t$;
3.6. $x''-11x'+30x=\cos 3t$;
3.7. $x''-7x'+10x=\sin 4t$;
3.8. $x''-8x'+12x=\sin 5t$;
3.9. $x''-9x'+18x=\cos 5t$;
3.10. $x''-10x'+24x=\sin 6t$;
3.11. $x''-8x'+7x=\cos 6t$;
3.12. $x''-9x'+14x=\sin 7t$;
3.13. $x''-10x'+21x=\cos 7t$;
3.14. $x''-11x'+28x=\sin 8t$;
3.15. $x''-13x'+42x=\cos 8t$.

Ответы на некоторые задания:

```
> de1:=diff(x(t),t$2)-4*diff(x(t),t)+3*x(t)-sin(t);
```

$$de1 := \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 4\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + 3x(t) - \sin(t)$$

```
> dsolve({de1,x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t), method=laplace);
```

$$x(t) = \frac{1}{5}\cos(t) + \frac{1}{10}\sin(t) - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{20}e^{3t}$$

```
> de2:=diff(x(t),t$2)-5*diff(x(t),t)+6*x(t)-cos(t);
```

$$de2 := \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 5\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + 6x(t) - \cos(t)$$

```
> dsolve({de2,x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t), method=laplace);
```

$$x(t) = \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t) - \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{3}{10}e^{3t}$$

```
> de3:=diff(x(t),t$2)-7*diff(x(t),t)+12*x(t)-sin(2*t);
```

$$de3 := \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 7\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + 12x(t) - \sin(2t)$$

```
> x3:=dsolve({de3,x(0)=0,D(x)(0)=1},x(t), method=laplace);
```

$$x3 := x(t) = \frac{11}{10}e^{4t} - \frac{15}{13}e^{3t} + \frac{7}{130}\cos(2t) + \frac{2}{65}\sin(2t)$$

ИДЗ – 4

Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y'' = a_{21}x + a_{22}y, \ x(0) = y(0) = 0, \ x'(0) = y'(0) = 1; \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

4.1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; 4.3. $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$; 4.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$; 4.5. $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$; 4.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$; 4.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4.8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; 4.9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$; 4.10. $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$; 4.11. $A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; 4.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$; 4.13. $A = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$; 4.14. $A = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; 4.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

ИДЗ – 5

Решить интегральные уравнения (***ответы*** приведены ***справа!***):

5.1. $\varphi(x) = \sin x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\text{sh}x + \frac{1}{2}\sin x.$

5.2. $\varphi(x) = x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{3}\left(e^x - e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{3}e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

5.3. $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=x+\frac{1}{6}x^3.$

5.4. $\varphi(x)=\cos x+\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=\frac{2}{5}e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$

5.5. $\varphi(x)=1+x+\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt;\quad \varphi(x)=2+x-e^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

5.6. $6.\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+\int\limits_0^x (x-t)e^{x-t}\varphi(t)dt;\quad \varphi(x)=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{16}e^{2x}.$

5.7. $\varphi(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt;\quad \varphi(x)=\frac{e^{-x}}{2}+\frac{e^x}{6}+\frac{1}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$

5.8. $\varphi(x)=x+2\int\limits_0^x \left[(x-t)-\sin(x-t)\right]\varphi(t)dt;\quad \varphi(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-e^{-x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x\right).$

5.9. $\varphi(x)=\sin x+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=xe^x.$

5.10. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x \left[3+6(x-t)-4(x-t)^2\right]\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=e^x.$

5.11. $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\int\limits_0^x \varphi(t)\sin 2(x-t)dt;\qquad \varphi(x)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x.$

5.12. $\varphi(x)=e^x-2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=\operatorname{ch}x-xe^{-x}.$

5.13. $\varphi(x)=1+\frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x+\cos x).$

5.14. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt;\qquad \varphi(x)=x-\frac{1}{6}x^3.$

5.15. $\varphi(x)=shx-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)dt;\quad \varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x.$

Аналогично решаются интегральные уравнения Вольтерра первого рода с ядром $k(x,t)$, зависящим только от разности $x-t$, т. е. уравнения вида

$$\int\limits_0^x k(x-t)\varphi(t)dt=f(x), \qquad (*)$$

где $f(x)$ – известная функция, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Пусть $f(x) \risingdotseq F(p)$; $k(x) \risingdotseq K(p)$; $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (*) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, получаем

$$K(p)\cdot\Phi(p)=F(p), \text{ т. е. } \Phi(p)=\frac{F(p)}{K(p)}.$$

Оригинал для $\Phi(p)$ будет решением $\varphi(x)$ интегрального уравнения (*).

Указанный метод решения интегральных уравнений приложим также к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)dt \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Применяя к обеим частям такой системы преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\sum_{j=1}^{n}K_{ij}(p)\Phi_j(p) \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Решая последнюю систему уравнений, линейную относительно изображений $\Phi_i(p)$, находим $\Phi_i(p)$ $(i=1,2,\dots,n)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений.

Пример. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x)=x+\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=1+\int_0^x sh(x-t)\varphi_1(t)dt-\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

Решение. Переходя к изображениям, получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p+1}\Phi_1(p)+\frac{1}{p^2}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2-1}\Phi_1(p)-\frac{1}{p-1}\Phi_2(p); \end{cases}$$

откуда

$$\Phi_1(p)=\frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad \Phi_2(p)=\frac{p^3-p^2+1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}.$$

Далее найдем оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$. Применяя Maple, получаем

```
> Phi1:=((p^2+p-1)/((p)*(p-1)*(p^2+1)));
```

$$\Phi 1 := \frac{p^2+p-1}{p\,(p-1)\,(p^2+1)}$$

```
> Phi11:=convert(Phi1,parfrac,p);
```

$$\Phi 11 := \frac{1}{2\,(p-1)}+\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\,\frac{-3\,p+1}{p^2+1}$$

```
> Phi2:=((p^3-p^2+1)/((p-1)*(p+1)*(p^2+1)));
```

$$\Phi 2 := \frac{p^3 - p^2 + 1}{(p-1)\,(p+1)\,\left(p^2+1\right)}$$

```
> Phi21:=convert(Phi2,parfrac,p);
```

$$\Phi 21 := \frac{1}{4\,(p-1)} + \frac{1}{4\,(p+1)} + \frac{1}{2}\,\frac{p-2}{p^2+1}$$

```
> phi1:=invlaplace(Phi11,p,x);
```

$$\phi 1 := \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x\sim} + 1 - \frac{3}{2}\cos(x\sim) + \frac{1}{2}\sin(x\sim)$$

```
> phi2:=invlaplace(Phi21,p,x);
```

$$\phi 2 := \frac{1}{2}\cosh(x\sim) + \frac{1}{2}\cos(x\sim) - \sin(x\sim)$$

ИДЗ – 6

Решить системы интегральных уравнений:

1. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=1-2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=4x-\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt+4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^x+\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt-\int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=-x-\int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=x+\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^x-\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt+4\int\limits_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int\limits_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=2-\int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt-4\int\limits_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int\limits_0^x \varphi_1(t)dt-\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=1-3\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=x-\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+5\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=2e^x+\int_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=-x-\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=5x+\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{7(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=e^{3x}-\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1-\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+7\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=3-7\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt-5\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=1-2\int_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=5-4\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=x-3\int_0^x \varphi_1(t)\,dt+5\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \varphi_1(x)=2e^x+5\int_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x)=-3x-\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt+\int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^{3x}-6\int_0^x\varphi_1(t)dt+4\int_0^x e^{(x-t)}\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=x-\int_0^x e^{-(x-t)}\varphi_1(t)dt+7\int_0^x\varphi_2(t)dt.\end{cases}$$

14. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=3-7\int_0^x(x-t)\varphi_1(t)dt-15\int_0^x\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=1-12\int_0^x\varphi_1(t)dt-\int_0^x(x-t)\varphi_2(t)dt.\end{cases}$$

15. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=2e^x+15\int_0^x\varphi_1(t)dt-\int_0^x e^{3(x-t)}\varphi_2(t)dt,\\ \varphi_2(x)=-13x-\int_0^x(x-t)\varphi_1(t)dt+\int_0^x\varphi_2(t)dt.\end{cases}$$

ИДЗ – 7
Текстовые задачи

1. Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$, пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t=0$ частица находится на расстоянии x_0 от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2=\lambda^2-\mu^2$, то смещение частицы определяется выражением $x(t)=\frac{e^{-\mu t}}{n}\left[nx_0\cos nt+(v_0+\mu x_0)\sin nt\right]$.

2. Частица массы m может совершать малые колебания относительно положения равновесия и находится под действием восстанавливающей силы mn^2x, пропорциональной смещению. Она выводится из состояния покоя постоянной силой F, действующей в течение времени T. Показать, что амплитуда колебания равна $\frac{2F}{mn^2}\sin\frac{nT}{2}$ при $t>T$.

3. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия малыми отклонениями точки подвеса в горизонтальном направлении. Показать, что если точка подвеса переместилась на расстояние a, то отклонение маятника равно $a(1-\cos nt)$, $n^2=g/l$.

4. Частица брошена вертикально вверх со скоростью v_0. На нее действует сила тяжести и сила сопротивления $2kmv$. Показать, что в момент времени t она будет находиться на расстоянии $-\dfrac{gt}{2k}+\dfrac{g+2kv_0}{4k^2}\left(1-e^{-2kt}\right)$ от точки бросания.

5. Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a дин в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость v_0 = 10 см/с. Зная, что начальная величина силы $F_0=4$ дн и что на расстоянии 450 см от начала координат скорость v=105 см/с, определить значение величины a.

6. Материальная точка массы m движется прямолинейно, отталкиваясь от начала координат с силой $F=4mx$, прямо пропорциональной расстоянию. На точку действует сопротивление среды $R=3mv$. В начальный момент расстояние от начала равно 1, а скорость равна нулю. Найти закон движения точки.

7. Тяжелая точка массы m падает в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости. Определить наибольшую скорость точки, если при v =1 м/с сила сопротивления равна одной трети веса точки и начальная скорость $v_0=0$.

8. Материальная точка массы m движется в среде, сопротивление которой прямо пропорционально первой степени скорости (коэффициент пропорциональности k). Какое расстояние пройдет точка до остановки, если ей сообщена начальная скорость v_0 и, кроме силы сопротивления, никаких других сил нет?

9. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины $2l$ лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определить закон движения цепочки во время ее соскальзывания со стола и найти время соскальзывания.

10. Точка массы m находится на прямой, проходящей через два центра A и B, расстояние между которыми $2d$. Центры притягивают точку с силами, прямо пропорциональными расстоянию до центра; коэффициент пропорциональности mk^2 одинаков для обоих центров. В начальный момент точка находится на расстоянии a от середины O отрезка AB, не имея начальной скорости. Определить закон движения точки.

11. Неподвижный центр O притягивает точку массы m с силой $F=\mu mr$, где $r-$расстояние точки от этого центра и $\mu-$постоянный

коэффициент. В начальный момент $r = a$ и скорость $v = 0$. Через сколько времени точка достигнет центра O.

12. Лодке сообщена начальная скорость $v_0 = 6$ м/с. Через 69 с после начала движения эта скорость уменьшается вдвое. Найти закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

13. Материальная точка массы $m = 2$ совершает прямолинейные колебания по оси Ox под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию точки от начала координат(коэффициент пропорциональности равен 8), и возмущающей силы $F = 4\cos t$. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x = 0$ и $v = 0$.

14. Определить движение материальной точки массы m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию и равной $k^2 m$ на расстоянии, равном единице длины.

В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра O и имела скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение с центром O.

15. Определить движение материальной точки массы m, отталкиваемой от неподвижного центра O силой, прямо пропорциональной расстоянию и равной $k^2 m$ на расстоянии, равном единице длины.

В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра O и имела скорость v_0, перпендикулярную к прямой, соединяющей начальное положение с центром O.

Некоторые полезные формулы

1. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1)$;

2. $\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x)$;

3. $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$;

4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$;

5. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$;

6. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$;

7. $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

8. $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

9. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

10. $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

11. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$.

Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал	Изображение
1	1	$1/p$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
10	$e^{at} sh\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$

11	$e^{at}\mathrm{ch}\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
12	t^n (. n -целое)	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+w^2)^2}$
14	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$t\,\mathrm{sh}\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2-w^2)^2}$
16	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
17	$t\,\mathrm{ch}\omega t$	$\dfrac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$e^{at}t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(p-a)}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
19	$e^{at}t\cos\omega t$	$\dfrac{(p-a)^2-\omega^2}{((p-a)^2+\omega^2)^2}$
20	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$
21	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\omega tch\omega t-sh\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2}$
22	$\sin(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
23	$\cos(\omega t\pm\varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
24	$t^2\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(3p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}$
25	$t^3\sin\omega t$	$\dfrac{24p\omega(p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^4}$
26	$t^4\sin\omega t$	$\dfrac{24\omega(5p^4-10p^2\omega^2+\omega^4)}{(p^2+\omega^2)^5}$

Литература

1. Бицадзе, А. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. Бицадзе. − М.: Наука, 1984. – 320 с.

2. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. − М.: Наука, 1981. − 720 с.

3. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

4. Жевняк, Р.М. Высшая математика. Часть IY / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 240 с.

5. Иосида, К. Операционное исчисление / К. Иосида; под ред. Я.В. Радыно. – Минск: Университетское, 1989. − 186 с.

6. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. − М.: Наука, 1971. − 256 с.

7. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. − М.: Наука, 1973. − 736 с.

8. Натансон, И. Теория функций вещественной переменной / И. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

9. Перов, А. Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциального уравнения $dx/dt = f(t,x)$ / А. Перов // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 132, № 3. – С. 531–534.

10. Штокало, И.З. Операционное исчисление / И.З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1972. – 303 с.

Учебное издание

ТРУБНИКОВ Юрий Валентинович
ЧЕРНЯВСКИЙ Михаил Михайлович

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
МЕТОДЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
И ФУНКЦИЙ ГРИНА**

Курс лекций

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 21.08.2024. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 5,98. Тираж 30 экз. Заказ 111.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.