вия в сечениях $x = 0$; l (l – длина стержня) в перемещениях имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \ (k = 1, 2). \qquad (3)$$

Решение задачи. Решение системы дифференциальных уравнений (2) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (3):

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \ u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m} \cos\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \\ w_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right), \ w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

После подстановки перемещений (4) и нагрузки в систему (2) получим систему линейных алгебраических уравнений, решая которую любым из стандартных методов, получим коэффициенты $U_{1m}, U_{2m}, W_{1m}, W_{2m}$ разложения в ряд искомых перемещений.

Частные случаи. В качестве примера рассматривается изгиб трехслойного стержня под действием равномерно распределенных и сосредоточенных нагрузок, приложенных к внешней плоскости первого слоя:

1. На стержень действует локальная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная до сечения $x = b \le l$. Ее можно представить в аналитическом виде с помощью функции Хевисайда $H_0(x)$.

2. На стержень действует погонная поперечная сила $Q_0 = \text{const}$, приложенная в сечении на расстоянии a от начала координат.

3. На трехслойный стержень в сечении $x = a$ действуют поперечный момент интенсивности $M_0 = \text{const}$.

Проведен численный анализ полученных решений.

БИФУРКАЦИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КРУЧЕНИИ

Корчевская Е. А.
УО «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова»
Беларусь, г. Витебск, Московский пр., 33
Korchevskaya.Elena@tut.by

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку длины L, состоящую из N изотропных слоев, характеризующихся толщиной h_k, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k и коэффициентом Пуассона ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N$. В качестве исходных используем уравнения, основанные на гипотезах, сформулированных Э. И. Григолюком и Г. М. Куликовым [1]:

$$\frac{Eh^3\eta_3}{12(1-\nu^2)}\left(1 - \frac{\theta h^2}{b}\Delta\right)\Delta^2\chi^* + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 F^*}{\partial \alpha_1^2} - 2T_{12}^0 \frac{\partial^2 W^*}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta^2 F^* = \frac{Eh}{R_2}\frac{\partial^2 W^*}{\partial \alpha_1^2}, W^* = \left(1 - \frac{h^2}{b}\Delta\right)\chi^*.$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат α_1, α_2; E, ν, ρ – осредненные модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала соответственно; h – толщина оболочки; F^*, χ^* – функции напряжений и перемещений; W^* – нормальный прогиб; T_{12}^0 – усилие сдвига, вызванное кручением оболочки; R_2 – радиус кривизны; параметры η_3, θ, b, определяются по формулам [1].

Переменность физических и геометрических характеристик материала, из которого изготовлена оболочка, непостоянство радиуса кривизны, зависимость длины оболочки от окружной координаты являются причиной появления на поверхности оболочки «наиболее слабых» областей, которые приводят к сильной локализации форм потери устойчивости.

Для описания локальной бифуркации безмоментного напряженного состояния, используем систему полубезмоментных уравнений слоистых оболочек, записанную в безразмерном виде [1–3]:

$$\begin{gathered}\mu^4\left(1-\mu^3\tau\Delta\right)\Delta^2\chi + k(\phi)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \lambda 2\mu t_3^0\frac{\partial^2}{\partial s\partial\phi}\left(\chi - \mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0,\\ \mu^4\Delta^2 F - k(\phi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\chi - \mu^2\kappa\Delta\chi\right) = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $F = F^*/EhR^2\mu^4$, $\chi = \chi^*/R$ – безразмерные функции напряжений и перемещений; Δ – оператор Лапласа в криволинейной системе координат φ, s; $\lambda > 0$ – параметр нагружения, который связан с усилием сдвига $T_{12}{}^0 = \lambda E h \mu^5 t_3^0$; μ – малый параметр, характеризующий относительную толщину оболочки, и имеет вид [2]:

$$\mu^8 = h^2\eta_3 \Big/ \left(12R^2\left(1-\nu^2\right)\right). \tag{3}$$

Здесь τ, κ – параметры, учитывающие осредненные эффекты поперечных сдвигов и вводятся по формулам [2]:

$$K/\pi^2 = \mu^2\kappa,\ K\theta/\pi^2 = \mu^3\tau,\ \kappa, \tau \sim 1 \text{ при } \mu \to 0, \tag{4}$$

При построении основного напряженного состояния с точностью до величины порядка μ^2 при $s = 0$, $s = l(\varphi)$ нужно удовлетворить условиям [4]:

$$F = \chi = 0, \text{ при } s = 0, l(\phi). \tag{5}$$

Задача состоит в определении наименьшего $\lambda > 0$, для которого краевая задача (2), (5) имеет ненулевое решение.

Асимптотическое решение. Считаем, что вследствие переменности геометрических параметров, оболочка теряет устойчивость локально, в окрестности некоторой «наиболее слабой» образующей $\varphi = \varphi_0$.

Согласно методу, предложенному в [4], выполним растяжение масштаба в окрестности линии $\varphi = \varphi_0$:

$$\phi = \phi_0 + \mu^{1/2}\xi. \qquad (6)$$

Решение задачи (2), (5) будем искать в виде [4]:

$$\chi(s, \phi, \mu) = \chi^{**} \exp\left(i\left(\mu^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right)\right),$$

$$F(s, \phi, \mu) = F^{**} \exp\left(i\left(\mu^{-1/2} q\xi + \frac{1}{2} a\xi^2 \right)\right), \qquad (7)$$

$$\chi^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} \chi_j(\xi, s),\ F^{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j/2} f_j(\xi, s),$$

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots, \qquad (8)$$

где $\chi_j(\xi, s)$, $f_j(\xi, s)$ – полиномы по ξ, имеющие достаточное число раз дифференцируемые по s коэффициенты. Параметр q характеризует изменяемость решения в окружном направлении и должен быть вещественным, а мнимая часть числа a, характеризующего скорость затухания амплитуды волн при удалении от линии $\phi = \phi_0$, должна быть положительной: $q > 0$, $\mathrm{Im}(a) > 0$.

Подставим анзатц (7) в систему уравнений (2) и приравняем к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\mu^{1/2}$. В результате получим реккурентную последовательность дифференциальных уравнений и последовательность соответствующих граничных условий из рассмотрения которых находим неизвестные функции $f_j(s, \xi)$, $\chi_j(s, \xi)$ и числа q, a, φ_0 и λ_n.

Литература

1. Григолюк, Э.И. *Многослойные армированные оболочки: расчет пневматических шин*. М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
2. Mikhasev, G. I., Seeger F., Gabbert U. *Comparison of Analytical and Numerical Methods for the Analysis of Vibration of Composite Shell Structures* // Entwicklungsmethoden und Entwicklunsprozesse im Maschinenbau: 5 Magdeburger Maschinenbau-Tage, Berlin: Logos-Verl., 2001. – P. 175 – 183.
3. Korchevskaya E., Mikhasev G., Marinkovich D., Gabbert U. *Buckling and vibrations of composite laminated cylindrical shells under axial load //* Die 6. Magdeburger Maschinenbau–Tage: proceedings of the conference, Magdeburg, 24–26 September 2003. / Otto–von–Guericke– Universität Magdeburg; edited by: R. Kasper [et al.]. – Magdeburg, 2003. – P. 183 – 189.
4. Товстик П. Е. *Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы* М.: Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.