Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73
С90

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 20.12.2023.

Авторы: доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Т.Л. Сурин;** доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **Ж.В. Иванова**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры математики и компьютерной безопасности
ПГУ имени Евфросинии Полоцкой,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.А. Козлов*

Сурин, Т.Л.
С90 Сборник заданий для лабораторных работ по дополнительным главам высшей математики : методические рекомендации / Т.Л. Сурин, Ж.В. Иванова. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 51 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Дополнительные главы высшей математики» для студентов факультета математики и информационных технологий специальности «информационные системы и технологии (в здравоохранении)». Содержит задания для лабораторных работ, приведены примеры решения наиболее типичных задач. Может быть полезно студентам специальности «программная инженерия» (дисциплина «Современные главы высшей математики»), а также других специальностей, изучающих высшую математику.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации предназначены для проведения лабораторных занятий и организации самостоятельной работы студентов второго курса математического факультета специальности «информационные системы и технологии (в здравоохранении)», изучающих дисциплину «Дополнительные главы высшей математики».

Учебное издание охватывает разделы, посвященные дифференциальным уравнениям, системам дифференциальных уравнений и криволинейным интегралам. Весь материал разбит на 16 параграфов, что в среднем соответствует количеству часов, предусмотренных учебной программой на проведение лабораторных занятий по данной дисциплине. Каждый параграф состоит из 3 пунктов. В пункте I – «Контрольные вопросы и задания» – содержатся вопросы по теоретическому материалу. Цель – помочь студенту самостоятельно разобраться в теоретическом материале, выделить наиболее важные места, без которых невозможно осмысленное решение задач. В пункте II – «Примеры решения задач» – разобраны наиболее типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. Эти два пункта студенты должны разобрать самостоятельно при подготовке к занятию по данной теме. В пункте III приведены задания для лабораторных работ.

Издание может быть полезно студентам специальности «программная инженерия» (дисциплина «Современные главы высшей математики»), а также других специальностей, изучающих высшую математику.

1. Основные понятия.
Решение дифференциального уравнения.
Изоклины

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется порядком уравнения?
3. Дайте определение решения дифференциального уравнения.
4. Какое уравнение называется простейшим дифференциальным уравнением первого порядка и как записать его решение?
5. Что называется общим решением уравнения?
6. Что такое интегральная кривая ОДУ?
7. Дайте понятие поля направлений.
8. Что называется изоклиной?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ является решением уравнения $yy'' = (y')^2$.

Решение. Функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем y' и y'': $y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}$, $y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}$. Найденные значения подставим в уравнение:

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} = (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2 .$$

Получили тождество. Значит, данная функция является решением уравнения.

***Пример* 2.** Найти решение уравнения $y' = 2x$.

Решение. Его общее решение есть функция $y = x^2 + C$, которая задана на всей плоскости Oxy. Так как при подстановке этой функции и ее производной в уравнение получаем тождество.

***Пример* 3.** Найти поле направлений уравнения $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$ и приблизительно изобразить интегральные кривые.

Данное уравнение задано всюду, кроме точки $(0, 0)$. Пусть функция $y = y\,(x,\, C)$ является общим решением дифференциального уравнения. Эта функция задает семейство интегральных кривых на плоскости. Тогда

$\frac{dy}{dx} = k$ – угловой коэффициент касательных к данным кривым, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{y}{x}$. Рассматриваем различные значения угла α.

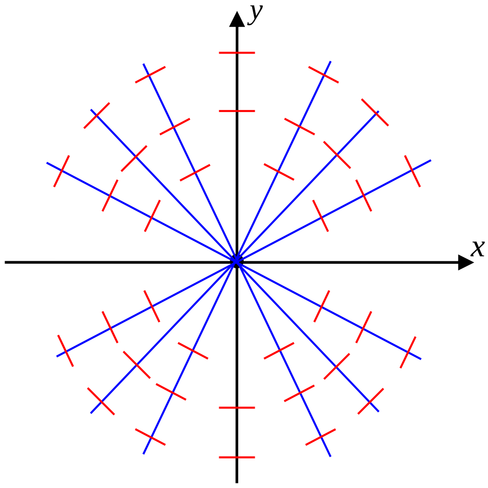

Рис. 1

1) $-\frac{y}{x} = 0$, $y = 0$, $(x \neq 0)$, $\alpha = 0$;

2) $-\frac{y}{x} = 1$, $y = -x$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

3) $-\frac{y}{x} = -1$, $y = x$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$;

4) $-\frac{y}{x} = -2$, $y = 2x$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$;

5) $-\frac{y}{x} = 2$, $y = -2x$, $\alpha = -\operatorname{arctg} 2$.

Все эти значения изображены на рисунке 1. Из рисунка можно заметить, что интегральные кривые – это окружности $x^2 + y^2 = C$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Показать, что функции $y = y(x)$, зависящие от произвольных постоянных, являются решениями соответствующих уравнений. Указать максимальный интервал, на котором задано это решение.

1. $y = Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}}$; $\qquad y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.
2. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$; $\qquad y'' + 4y = 0$.
3. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x/4$; $\qquad y'' + 4y = x$.
4. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + e^{2x}$; $\qquad y'' + 4y = 8e^{2x}$.
5. $y = x + C\sqrt{1+x^2}$; $\qquad (xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0$.

Составить дифференциальные уравнения семейства кривых.

6. $x^2 + y^2 - Cx = 0$. $\qquad$ 7. $y = \sin x + C\cos x$.

8. $y = e^{Cx}$. $\qquad$ 9. $y = Cx^3$.

Проинтегрировать простейшие уравнения.

10. $y' = \dfrac{x^3}{x^4+2}$.

11. $y' = x \cdot \cos x$.

12. $y' = \dfrac{\ln^2 x + 1}{x}$.

13. $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + 1}$.

14. $y' = \operatorname{arctg} x$.

15. $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x}$.

16. $y' = e^x \cos x$

С помощью изоклин начертить (приближенно) решения данных уравнений.

17. $y' = \dfrac{y}{x}$;

18. $y' = \dfrac{x}{y}$;

19. $y' = \dfrac{2y}{x}$;

20. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2. Уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными

I. Контрольные вопросы и задания

1. Уравнение какого вида называется дифференциальным уравнением с разделёнными переменными?
2. Каким образом можно записать общий интеграл уравнения с разделёнными переменными?
3. Уравнение какого вида называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
4. Как найти общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения

$$e^{-x^2} dx + \frac{1}{y} dy = 0 \quad (y > 0).$$

Решение. Общий интеграл уравнения

$$\int_0^x e^{-x^2} dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy = C \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-x^2} dx + \ln y = C.$$

Общее решение имеет вид $y = e^{C - \int\limits_0^x e^{-x^2} dx}$.

Для того, чтобы найти частное решение уравнения, необходимо задать начальное условие задачи. Пусть дано начальное условие: $y(0) = 1$. Найдем значение постоянной C из равенства

$$\int\limits_0^0 e^{-x^2}\, dx \; + \; \ln 1 = C \quad \text{или} \quad C = 0.$$

Тогда, решение задачи Коши можно будет найти из равенства

$$\int\limits_0^x e^{-x^2}\, dx \; + \; \ln y = 0 \text{ или } y = e^{-\int\limits_0^x e^{-x^2} dx}.$$

***Пример* 2**. Найти общий интеграл уравнения $(1 + y)dy = x^2 dx$.

Решение. Проинтегрируем уравнение $\int (1+y)dy = \int x^2 dx + C$,

следовательно, общий интеграл уравнения имеет вид $y + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} + C$.

***Пример* 3.** Найти общий интеграл уравнения

$$2x\sqrt{y}dx \; + \; (1 - x^2)dy = 0 \;\; (y \geq 0).$$

Решение. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{2x}{1-x^2}dx \; + \; \frac{dy}{\sqrt{y}} \; = \; 0, \;\; (1 - \; x^2 \neq 0, \sqrt{y} \neq 0).$$

$$\int \frac{2x}{1-x^2}dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C.$$

Общий интеграл:

$$-\ln|1-x^2| + 2\sqrt{y} = C.$$

Мы делили на $1-x^2$. Поэтому следует отдельно рассмотреть случай $1-x^2=0$. Получаем решения $x=1$ и $x=-1$ ($y \neq 0$). Проверьте самостоятельно подстановкой, что это действительно решения уравнения. Кроме этого, решением является функция $y = 0$ ($x \neq 1$, $x \neq -1$). Это решение является особым.

В тех точках, где $2x\sqrt{y} = 1 - x^2 = 0$ поле направлений не определено. Это точки $(1, 0)$ и $(–1, 0)$. Это существенно особые точки. К ним примыкают решения $y=0$, $x=1$ и $x=-1$. Тем не менее, решения через эти точки не проходят.

Предположим, что поставлено условие: найти интегральную кривую, которая проходит через точку $M(0, 1)$. Подставляем в общий интеграл $x=0$ и $y=1$. Найдём $C=2$. Из равенства

$$-\ln|1-x^2|+2\sqrt{y}=2$$

можно получить решение в явном виде:

$$2\sqrt{y}=2+\ln|1-x^2| \quad \Leftrightarrow \quad y=\left(1+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right)^2.$$

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения:

1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0;\qquad y(0)=1.$
2. $xy'+y=y^2;\qquad y(1)=0.5.$
3. $y'\operatorname{ctg}x+y=2;\qquad y(0)=-1.$
4. $y'=y\cos x;\qquad y(0)=1.$
5. $y'=e^{x-y}.$
6. $y'-xy^2=2xy.$
7. $2x^2yy'+y^2=2.$
8. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^y dy)-(1+y)dy=0.$
9. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$
10. $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0.$
11. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$
12. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$
13. $\sqrt{4+y^2}\,dx-ydy=x^2ydy.$
14. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$
15. $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$.
16. $(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0.$
17. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$.
18. $y(4+e^x)dy-e^x dx=0.$
19. $\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0.$
20. $(xy^2-y^2+x-1)dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2)dy=0/$

3. Однородные уравнения

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение однородной функции степени m.
2. Уравнение какого вида называется однородным?
3. Как найти решение однородного уравнения?

4. В каком случае является однородным уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

Решение. Покажем, что данное уравнение является однородным. Находим

$$P(tx, ty) = (ty)^2 - 2tx\,ty = t^2(y^2 - 2xy) = t^2 P(x, y),$$
$$Q(tx, ty) = (tx)^2 = t^2 x^2 = t^2 Q(x, y).$$

Так как функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными одной и той же степени, то рассматриваемое уравнение является однородным.

Сделаем подстановку $y = ux$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $dy = u\,dx + x\,du$. Подставим $u = u(x)$ и dy в уравнение:

$$((ux)^2 - 2xux)dx + x^2(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Пусть $x \neq 0$, сократим полученное равенство на x^2. Получаем

$$(u^2 - 2u)dx + (u\,dx + x\,du) = 0, \text{ или } (u^2 - u)dx + x\,du = 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение, получаем

$$\ln|x| + \ln\frac{|y-x|}{|y|} = \ln|C| \quad \text{или} \quad \frac{x(y-x)}{y} = C.$$

Это общий интеграл уравнения. Решение $x = 0$ $(y \neq 0)$ является частным решением.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на x, получим

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 + x^2} + y}{x} \text{ или } y' = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + \frac{y}{x},$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} + \frac{y}{x}.$$

Так как

$$f(tx,ty)=\sqrt{\left(\frac{ty}{tx}\right)^2+1}+\frac{ty}{tx}=f(x,y),$$

то уравнение является однородным. Сделаем подстановку $y=ux$, где u – новая искомая функция. Тогда $y'=u'x+u$. Получим

$$u'x+u=\sqrt{u^2+1}+u \qquad \text{или} \qquad u'x=\sqrt{u^2+1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив их, получим

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\frac{dx}{x}\ \ (x\neq 0); \qquad \int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{dx}{x}+C_1, \quad C_1\in R;$$

$$\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|=\ln|x|+C_1; \qquad u+\sqrt{u^2+1}=\pm e^{C_1}x;$$

$$u+\sqrt{u^2+1}=Cx \ \ \left(C=\pm e^{C_1},\ \ C\in R\setminus\{0\}\right);$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=Cx; \qquad \sqrt{x^2+y^2}+y=Cx^2.$$

Это общий интеграл уравнения. Проверим, не потеряли ли мы решение $x=0$. Подставляя в уравнение, получаем:

$$0=\sqrt{y^2}+y; \qquad 0=|y|+y.$$

Если $y\leq 0$ то $0\equiv 0$, т.е. $x=0$ является решением уравнения в полуплоскости $y\leq 0$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение или общий интеграл уравнения.

1. $y'=\dfrac{y^2-x^2}{xy}$.
2. $y'=\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+\dfrac{x}{y}$.
3. $y'=\dfrac{xy}{x^2}+7$.
4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+3x^2}{x^2}$.
5. $y'=\dfrac{y}{x}+5$.
6. $x^2dy=(y^2-xy+x^2)dx$.
7. $y'=\dfrac{x^2y}{x^3}-3$.
8. $y'=\dfrac{3xy-4x^2}{x^2}$.
9. $x^2y'+y^2+xy+x^2=0$.
10. $(x^2+y^2)dx=2xydy$.

11. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

12. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$

13. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

14. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

15. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

16. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}$.

17. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

18. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

19. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

20. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

4. Линейные уравнения

I. Контрольные вопросы и задания

1. Уравнение какого вида называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
2. В каком случае оно называется линейным однородным, а в каком линейным неоднородным?
3. Как записать решение однородного уравнения?
4. Как найти решение неоднородного уравнения а) методом Лагранжа; б) методом Бернулли?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти решение дифференциального уравнения

$$x^2 y' - y = x^2 e^{x - \frac{1}{x}}.$$

Решение. Это линейное уравнение относительно y. Рассмотрим вначале однородное линейное уравнение $x^2 y' - y = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив их, получим

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2} = 0; \qquad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x^2} = C_1 ;$$

$$\ln|y| + \frac{1}{x} = C_1; \qquad |y| = e^{C_1 - \frac{1}{x}} = e^{C_1} e^{-\frac{1}{x}} ;$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{x}} \quad \left(C = \pm e^{C_1}; C \in R \setminus \{0\}\right).$$

Частное решение неоднородного линейного уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), т.е. положим $y = C(x)e^{-\frac{1}{x}}$, тогда $y' = C'(x)e^{-\frac{1}{x}} + C(x)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

Подставим это в уравнение.

$$x^2\left(C'(x)e^{-\frac{1}{x}} + C(x)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right) - C(x)e^{-\frac{1}{x}} = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}.$$

$$C'(x) = e^x; \qquad C(x) = \int e^x dx + C; \qquad C(x) = e^x + C.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = \left(e^x + C\right)e^{-\frac{1}{x}} = Ce^{-\frac{1}{x}} + e^{x-\frac{1}{x}}.$$

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = 2xe^x \ (x \neq 0).$$

Решение. Делаем замену $y = u \cdot v,\ y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{uv}{x} = 2xe^x, \quad u' \cdot v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 2xe^x.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = 2xe^x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим одно из решений.

$$v' - \frac{v}{x} = 0, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\ln|v| = \ln(|x||C|), \quad v = Cx.$$

В качестве C берём любое число, например 1, т.е. нас устраивает решение $v = x$. Теперь для нахождения функции $u(x)$ мы используем второе уравнение, где $v = x$. Получаем уравнение

$$u' \cdot x = 2xe^x, \quad u' = 2e^x, \quad u = 2\int e^x dx, \quad u = 2e^x + C.$$

Находим общее решение $y = u \cdot v = x(2e^x + C)$.

***Ответ*:** $y = x(2e^x + C)$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $\left(2xe^{x^2}+2xy\right)dx-dy=0; \quad y(0)=0.$

2. $(2x-y^2)y'=2y.$

3. $yx'+x\sin y=y^2$.

4. $(2e^y-x)y'=2y.$

5. $(2x+y)dy=ydx+4\ln ydy.$

6. $dy+\left(ytgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)dx=0.$

7. $2\left(x^4+y\right)dx-xdy=0.$

8. $y'+2xy=e^x.$

9. $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}$.

10. $y'+\dfrac{y}{2x}=x^2; \quad y(1)=1.$

11. $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}e^x; \quad y(1)=e.$

12. $y'+\dfrac{y}{x}=3x; \quad y(1)=1.$

13. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{12}{x^3}; \quad y(1)=4.$

14. $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x; \quad y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}.$

15. $y'+\dfrac{2}{x}y=x^3; \quad y(1)=\dfrac{-5}{6}.$

16. $y'+ytgx=\cos^2 x$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.$

17. $x(x-1)y'+y=x^2+2x-1; \quad y(2)=4.$

18. $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x; \quad y(0)=0.$

19 $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x; \quad y(-1)=\dfrac{3}{2}.$

20. $y'-\dfrac{1}{x+1}=e^x(x+1); \quad y(0)=1.$

5. Уравнение Бернулли

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Уравнение какого вида называется уравнением Бернулли?
2. Какой подстановкой решается уравнение Бернулли?
3. Как найти решение этого уравнения методом Бернулли?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Решение. Разделим обе части уравнения на *x*: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$. Это уравнение Бернулли. Здесь $p(x) = -\frac{4}{x}$, $q(x) = x$, $n = \frac{1}{2}$. Преобразуем уравнение, разделив его на $\sqrt{y}$: $\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$.

Положим $z = \sqrt{y}$, тогда $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, $\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$. Следовательно, $2z' - \frac{4}{x}z = x$ или $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$. Отсюда

$$z = Ce^{\int \frac{2}{x}dx} + e^{\int \frac{2}{x}dx}\int \frac{x}{2}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx$$

или

$$z = Cx^2 + x^2\int \frac{dx}{2x} = Cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|$$

$$y = z^2 = \left(Cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|\right)^2,$$

$y = 0$ – особое решение.

***Пример* 2.** Найти общее решение уравнения

$$y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}.$$

Решение. Для данного уравнения $n = \frac{1}{2}$. Решим его методом Бернулли, с помощью подстановки: $y = u\cdot v$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

$$u'\cdot v + u\cdot v' + 2e^x u\cdot v = 2e^x\sqrt{y}.$$

$$u'\cdot v + u(v' + 2e^x v) = 2e^x\sqrt{y}.$$

Приравниваем скобку к нулю и решаем получившееся уравнение:

$$\frac{dv}{dx} = -2e^x v, \qquad \frac{dv}{v} = -2e^x dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int e^x dx, \qquad \ln|v| = -2e^x.$$

Произвольную константу считаем равной 0, поскольку нас интересует только одно частное решение $v = e^{-2e^x}$.

Теперь получаем новое уравнение

$$u'\cdot e^{-2e^x}=2e^x\sqrt{y} \quad\Leftrightarrow\quad u'=2e^x e^{2e^x}\sqrt{ue^{-2e^x}}\ .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{\sqrt{u}}=2e^x e^{e^x}; \qquad 2\sqrt{u}=2e^x e^{e^x}+C_1; \qquad u=(e^x e^{e^x}+C)^2.$$

Ответ: $y=u\cdot v=e^{-2e^x}(e^x e^{e^x}+C)^2$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение (общий интеграл) или частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=x\sqrt{y}$.

2. $y'=x^3y^3-xy$.

3. $y'+2xy=2x^3y^3$.

4. $xy'+y=y^2\ln x;\quad y(1)=1$.

5. $3y^2y'+y^3+x=0$.

6. $y'-y=xy^2;\quad y(0)=0$.

7. $xy'-y=y^2;\quad y(0)=0$.

8. $xy'+y=xy^2;\quad y(0)=0$.

9. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$.

10. $3(xy'+y)=y^2\ln x;\quad y(1)=3$.

11. $xy'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x;\quad y(1)=1$.

12. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2};\quad y(0)=-1$.

13. $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2;\quad y(0)=2$.

14. $3(xy'+y)=xy^2;\quad y(1)=3$.

15. $y'+2xy=2x^3y^3;\quad y(0)=\sqrt{2}$.

16. $y'-y=2xy^2;\quad y(0)=\dfrac{1}{2}$.

17. $xy'+y=xy^2\ln x;\quad y(1)=1$.

18. $y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{\frac{2}{3}};\quad y(0)=0$.

19. $2y'+3\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1};\quad y(0)=1$.

20. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x);\quad y(0)=1$.

6. Уравнения в полных дифференциалах

I. Контрольные вопросы и задания

1. Уравнение какого вида называется уравнением в полных дифференциалах?

2. Какая функция является общим интегралом уравнения в полных дифференциалах и как ее восстановить?

3. Как найти решение этого уравнения с помощью криволинейного интеграла?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение уравнения

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$$

***Решение*.** $P(x, y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1$; $Q(x, y)=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого найдем

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2-y^2\right)^3}}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2-y^2\right)^3}} \text{ т.е. } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Тогда существует функция $u = u(x, y)$ такая, что

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x, y),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y).\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}.\end{cases}$$

Функцию $u(x, y)$ можно найти интегрируя второе уравнение системы

$$u(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx = \sqrt{x^2-y^2}-x+C(y),$$

где $C(y)$ некоторая функция, зависящая только от y. Дифференцируя полученное равенство по y и приравнивая коэффициент при dy, получим

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}+C'(y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

откуда $C'(y)=0$, а тогда $C(y)=C_1$,

$$u(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}-x+C_1.$$

Полагая $u(x,y)=C$, найдем общий интеграл: $\sqrt{x^2-y^2}-x=C$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $x\left(2x^2+y^2\right)+y(x^2+2y^2)y'=0.$
2. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0; \quad y(1)=1.$
3. $\left(4y^2-6x^3\right)ydy+\left(2-9xy^2\right)xdx=0.$
4. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0.$
5. $\left(y^2+y\sec^2 x\right)dx+(2xy+tgx)dy=0.$
6. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0.$
7. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0.$
8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+e^x\right)dx-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=0.$
9. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0.$
10. $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0.$
11. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0.$
12. $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0.$
13. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{1}{x}dy=0.$
14. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0.$
15. $\left(10xy-\dfrac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\dfrac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0.$

16. $\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy+\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx=0.$

17. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\;dy=0; \qquad y(1)=1.$

18. $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x dy=0; \qquad y(0)=0.$

19. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

20. $(\sin xy+xy\cos x)dx+x^2\cos xy dy=0; \qquad y(0)=0.$

7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется простейшим дифференциальным уравнением n-го порядка и как найти его общее решение?

2. Как понизить порядок дифференциального уравнения, которое не содержит в явном виде искомую функцию и ее производные до порядка $k-1$ включительно?

3. Как понизить порядок дифференциального уравнения, которое не содержит в явном виде переменную x?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0, y'(0)=1$.

Решение. $y'=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_1,$

$$y=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2.$$

Мы нашли общее решение. Подставляем теперь в него начальные данные.

$$0=-\sin 0+C_1\cdot 0+C_2, \qquad 1=-\cos 0+C_1.$$

Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2, из неё находим $C_1=2$, $C_2=0$. Подставляем эти значения в общее решение, получим частное решение $y=-\sin x+2x$.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''=\dfrac{y'}{x+4}$.

Решение. Это уравнение в явном виде не содержит искомую функцию $y=y(x)$. Обозначаем $y'=p(x)$, тогда $y''=p'(x)$. Получаем дифференциальное уравнение

$$p'=\frac{p}{x+4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dx}=\frac{p}{x+4}.$$

Решаем его:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x+4}, \qquad \ln|p|=\ln|x+4|+C_0.$$

$$e^{\ln|p|}=e^{\ln|x+4|+C_0}, \qquad |p|=|x+4|\cdot e^{C_0}, \quad p=\pm e^{C_0}(x+4).$$

Мы можем обозначить $\pm e^{C_0}$, как новую постоянную C_1 ($C_1\neq 0$). Итак,

$$p=C_1(x+4).$$

Теперь решаем уравнение

$$y'=C_1(x+4).$$

$$\frac{dy}{dx}=C_1(x+4), \quad dy=C_1(x+4)dx, \quad y=C_1\int(x+4)dx,$$

$$y=C_1\frac{(x+4)^2}{2}+C_2.$$

Величина $C_1/2$ – это тоже постоянная величина, которую снова можно обозначить как C_1. Заметим, что при делении на z мы теряем решение $y=C$, которое можно включить в формулу общего решения при $C_1=0$.

Общее решение имеет вид $y=C_1(x+4)^2+C_2$.

***Пример* 3.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\begin{cases} 2yy''+y'^2+y'^4=0; \\ y(0)=1; \\ y'(0)=2. \end{cases}$$

Решение. Это уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной. Порядок уравнения можно понизить, сделав замену $p=y'$, где $p=p(y)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y''=p'p$ и получим уравнение

$$2yp'p+p^2+p^4=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его

$$\frac{2pdp}{p^2+p^4}+\frac{dy}{y}=0. \ (y=0;\ p=0?).$$

$$\int \frac{2pdp}{p^2+p^4}+\int \frac{dy}{y}=C; \quad \ln \frac{p^2}{p^2+2}+\ln|y|=C;$$

$$\frac{p^{2|}|y|}{p^2+1}=e^c; \quad \frac{p^2}{p^2+1}=C_2 y; \quad (C_1=\pm\frac{1}{e^c}); \quad p=\pm\frac{1}{\sqrt{c_1 y-1}}.$$

Согласно произведенной замене

$$y'=\pm\frac{1}{\sqrt{c_1 y-1}}; \quad \pm\sqrt{c_1 y-1}\ dy=dx;$$

$$-\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 y-1)^3}=x+C_2.$$

Учитывая начальные условия, найдем C_1 и C_2. Так как $y(0)=1$, $y'(0)=2,$ то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \pm\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1-1)^3}=C_2, \\ 2=\pm\frac{1}{\sqrt{C_1-1}}. \end{cases}$$

Решая систему, получим $C_1=\frac{5}{4}$, $C_2=\frac{1}{15}$. Подставляя постоянные в общее решение, получим частное решение дифференциального уравнения

$$y=\frac{1}{15}(15x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{5}.$$

Потерянные решения $y=0$, а также $p=0$ или $y=C$ не удовлетворяют начальным условиям.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Проинтегрировать уравнения или найти частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям или граничным условиям.

1. $y''=x+2$.
2. $y''=\sin x$.
3. $y''=2;\ y(-1)=0;\ y(1)=0.$
4. $y''=-6x;\ y(0)=0;\ y'(0)=0.$
5. $y'''=e^{-x};\ y(0)=0;\ y'(0)=0;\ y''(0)=0.$
6. $y''=1;\ y(1)=0;\ y(2)=1.$
7. $(1+x)y''+y'=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.
8. $x^2y''=(y')^2.$
9. $2xy'y''=(y')^2-1.$
10. $x^2y''+xy'=1.$

11. $y^{IV} = \dfrac{y'''}{x}$.

12. $(y'')^3 + xy'' = 2y'$.

13. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

14. $y'' = 8y^3$.

15. $y'' = 32y^3$; $y(4) = 1$; $y'(4) = 4$.

16. $y''y^3 + 64 = 0$; $y(0) = 4$; $y'(0) = 2$.

17. $xy^V - y^{IV} = 0$.

18. $y''' = (y'')^2$.

19. $y''' ctg 2x + 2y'' = 0$.

20. $\mathrm{tg} x \cdot y''' = 2y''$.

8. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется линейным однородным уравнением порядка *n* с постоянными коэффициентами?

2. В каком виде ищут решение этого уравнения?

3. Какое уравнение называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами?

4. Как называют корни характеристического уравнения?

5. Что такое фундаментальная система решений?

6. Как записать общее решение линейного однородного уравнения порядка *n* с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+3y'-10y= 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=14$, $y'(0)=0$.

Решение. Для того, чтобы найти частное решение данного дифференциального уравнения, необходимо найти его общее решение.

Составляем для него характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+3\lambda-10=0.$$

Корни этого уравнения **действительные и различны**: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-5$. Тогда фундаментальная система решений: e^{2x}, e^{-5x}. Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$$

Находим частное решение. Для этого надо найти значения постоянных C_1 и C_2, удовлетворяющие начальным условиям. Для того чтобы найти постоянные C_1 и C_2, используем начальные данные: $y(0)=14, y'(0)=0$. Но сначала надо найти производную y':

$$y' = 2C_1e^{2x} - 5C_2e^{-5x}.$$

Подставляем начальные данные в y и y'. Учитывая, что $e^0 = 1$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 14 = C_1 + C_2, \\ 0 = 2C_1 - 5C_2. \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 10, \ C_2 = 4 .$$

Тогда частное решение имеет вид $y = 10e^{2x} + 4_2e^{-5x}$.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 .$$

Дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$, $\sqrt{D} = \pm 4i$, корни характеристического уравнения **комплексно-сопряженные**: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ $(\alpha = 1,$ $\beta = 2$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид: $e^x\cos 2x$, $e^x\sin 2x$.

Общее решение $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

***Пример* 3.** Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{\mathrm{IV}} - 15y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\lambda^4 - 15 = 0; \quad (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0;$$

$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 2i, \ \lambda_4 = -2i .$$

Действительным корням характеристического уравнения соответствуют линейно независимые решения $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$. Комплексно-сопряженным корням соответствуют решения $y_3 = e^{0 \cdot x}\cos 2x = \cos 2x$, $y_4 = e^{0 \cdot x}\sin 2x = \sin 2x$. Значит, фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1 = e^{2x}, \ y_2 = e^{-2x}, \ y_3 = e^{0 \cdot x}\cos 2x = \cos 2x, \ , \ \ y_4 = e^{0 \cdot x}\sin 2x = \sin 2x .$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y_{00} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x .$$

***Пример* 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-6y'+9y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0.$$

Дискриминант $D=0$, корни **действительны и равны**: $\lambda_1=\lambda_2=3$. Фундаментальная система решений: e^{3x}, xe^{3x} и общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x} \text{ или } y=e^{3x}(C_1x+C_2).$$

***Пример* 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y^V+y''=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^5+\lambda^2=0$. Или $\lambda^2(\lambda+1))(\lambda^2-\lambda+1)=0$. Это уравнение имеет два равных корня $\lambda_1=\lambda_2=0$, которым соответствуют два линейно независимых решения $e^{0x}=1$, $xe^{0x}=x$; корень $x=-1$, которому соответствует решение e^{-x}; и два комплексно-сопряженных комплексных корня $\lambda_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, которым соответствуют два линейно независимых решения $e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид:

$$1,\quad x,\quad e^{-x},\quad e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\quad e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=C_1+C_2x+C_2e^{-x}+C_3e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1. $y''-4y'+3y=0.$
2. $y''-5y'+6y=0.$
3. $y''-6y'+9y=0.$
4. $y''-4y'+3y=0.$
5. $y''-2y'+3y=0.$
6. $y''-6y'+9y=0.$
7. $y'''+y''-6y'=0.$
8. $y'''-2y''-3y'=0.$
9. $y'''-5y''+8y'-4y=0.$
10. $y'''+5y''+7y'+3y=0.$
11. $y^{IV}-6y'''+9y''=0.$
12. $y^{IV}+2y'''+y''=0.$

13. $y^{IV}+2y'''-2y'-y=0.$ 14. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=0.$

15. $y^{IV}+2y'''+y''=0.$ 16. $3y^{IV}+y'''=0.$

17. $y^{V}-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0.$

18. $y^{V}+8y''=0.$

Найти частное решение следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

19. $y''-5y'-6y=0,$ $y(0)=0,$ $y'(0)=1.$

20. $y''-8y'+16y=0,$ $y(0)=1,$ $y'(0)=0.$

9. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных) нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением порядка *n* с постоянными коэффициентами?

2. Как связано общее решение этого уравнения с общим решением неоднородного уравнения?

3. Опишите метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для нахождения частного решения неоднородного уравнения.

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1};$ $y(0)=1;$ $y'(0)=2.$

Решение. Вначале *найдем общее решение однородного уравнения* $y''-2y'+y=0$. *Соотв*етствующее ему характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет один корень $\lambda=1$ кратности 2. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$y_{00}=(C_1+C_2x)e^x.$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа):

$$y_{чн}=(C_1(x)+C_1(x)x)e^x.$$

Составляем систему для нахождения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}. \end{cases}$$

Сократив уравнения на e^x, получаем

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) = 0; \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Определитель (вронскиан) последней системы: $W = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 1.$

По формулам Крамера находим

$$C_1'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{x^2+1} & 1+x \end{vmatrix} = -\frac{x}{x^2+1};$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Проинтегрируем полученные уравнения:

$$C_1'(x) = -\int \frac{xdx}{x^2+1} = \text{-}\ln\sqrt{x^2+1} + \mathrm{C}_1;$$

$$C_2'(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + \mathrm{C}_2.$$

Следовательно, $y_{чн} = (x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1})e^x$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = e^x(C_1 + C_2 x + x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1}).$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ y'(0) = 2$. Вычислим $y'_{он}$:

$$y'_{он}(0) = e^x(C_1 + C_2 x + C_2 + x \cdot \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1}).$$

Подставляя значение $x = 0$ в выражения для $y_{он}$ и $y'_{он}$, с учетом начальных условий получаем:

$$y_{он}(0) = 1 = C_1;\ \ y'_{он}(0) = 2 = C_1 + C_2;\ \ C_1 = 1;\ \ C_2 = 1.$$

Следовательно, искомое частное решение:

$$y = e^x(1 + x + x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1}).$$

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.
2. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
3. $y'' - y' = e^{3x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.
4. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{2tgx}$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y'(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.
6. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$.
7. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; $y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$; $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.
8. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+2}$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$.
9. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^2 x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
10. $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 3$.
11. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$; $y(0) = 4\ln 4$; $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.
12. $y'' + y = 4ctgx$; $y(\dfrac{\pi}{2}) = 4$; $y'(\dfrac{\pi}{2}) = 4$.
13. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2-e^{-2x}}$; $y(0) = 1 + 3\ln 3$; $y(0) = 10\ln 3$.
14. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.
15. $y'' + 9 = \dfrac{9}{\sin 3x}$; $y(\dfrac{\pi}{6}) = 4$; $y'(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{3\pi}{2}$.
16. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.
17. $y'' + 4y = 4ctg2x$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = 3$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = 32$.
18. $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$; $y(0) = \ln 27$; $y'(0) = \ln 9 - 1$.

19. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$.

20. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}; \quad y(\dfrac{\pi}{8}) = 3; \quad y'(\dfrac{\pi}{8}) = 2\pi.$

10. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

I. Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае можно подобрать частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами?

2. Выражение какого вида называется квазиполиномом?

3. Рассмотрите случаи в каком виде можно искать частное решение неоднородного уравнения в зависимости от параметров квазиполинома, стоящего в правой части уравнения.

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x. \qquad (1)$$

Решение. Найдем общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{00} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

В уравнении (1) правая часть имеет вид

$$e^{ax} P_r(x) \cos bx$$

где $P_r(x)$- многочлен степени r, a, b –некоторые числа. В нашем случае $a = 1,\ b = 1,\ r = 0.$ Проверим являются ли числа $\nu = a \pm bi = 1 \pm i$ корнями характеристического уравнения. Эти числа есть корни характеристического уравнения. Так как $\lambda = 1 \pm i$ корни кратности I , то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{чн} = xe^x (A\cos x + B\sin x)$.

Найдем $y'_{чн}$ и $y''_{чн}$:

$$y'_{чн} = e^x(A\cos x + B\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x);$$

$$y'_{чн} = 2e^x(A\cos x + B\sin x + B\cos x - A\sin x + Bx\cos x - Ax\sin x);$$

и подставим в уравнение (1):

$$2e^x(B\cos x - A\sin x) = 4e^x\cos x;$$

$$\begin{cases} 2B = 4; \\ -2A = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} B = 2\ ; \\ A = 0\ . \end{cases}$$

Следовательно, $y_{чн} = 2xe^x\sin x$.

***Пример* 2.** Найти частное решение линейного уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$. Будем искать его решение в виде $y = e^{\lambda x}$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни. Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Выпишем правую часть уравнения: $f(x) = 4x^2e^{2x} = e^{ax}P_r(x)\cos bx$, где $a = 2$, $r = 2$, $b = 0$. Число $\nu = a \pm bi = 2$, не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения. Поэтому ищем частное решение в виде

$$y_{чн} = (ax^2 + bx + c)e^{2x}.$$

Тогда

$$y'_{чн} = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x};$$

$$y''_{чн} = (4ax + 2b + 2a)e^{2x} + 2(2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c)e^{2x} =$$

$$= (4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c)e^{2x}.$$

Подставляем в уравнение и сразу сокращаем обе части на e^{2x}, поскольку эта величина строго положительна:

$$4ax^2 + (4b + 8a)x + 2a + 4b + 4c - 5(2ax^2 +$$

$$+ (2b + 2a)x + b + 2c) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2.$$

Собираем в левой части равенства коэффициенты при одинаковых степенях x. Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2a = 4, \\ -2b - 2a = 0, \\ 2a - b - 2c = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = -2$, $b = 2$, $c = -3$. Тогда $y_{чн} = (-2x^2 + 2x - 3)e^{2x}$.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 7y' + 12y = x^2 + 2.$
2. $y'' + 3y' + 2y = x.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 3x.$
4. $y'' + 6y' + 9y = -x^2 - 3.$
5. $y'' + 3y' + 5y = x^2 + 1.$
6. $y'' + 4y' = -8x.$
7. $y'' - 4y' = -18x$.
8. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$.
9. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$.
10. $y''' + y'' - y' - y = (8x+4)e^{-x}$ ..
11. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}.$
12. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}.$
13. $y'' - 4y = 2\sin x.$
14. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
15. $y'' + 9y' = 6\cos 3x.$
16. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x).$
17. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x.$
18. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x).$
19. $y'' + 2y' + 5y = -2e^{x}(\sin x + \cos x).$
20. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}$.

11. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

I. *Контрольные вопросы и задания*

1. Какая система ОДУ называется *нормальной системой*?
2. Дайте определение решения системы ОДУ.
3. Как ставится задача Коши для системы ОДУ?
4. Какая существует связь между нормальной системой дифференциальных уравнений и уравнением *n*-го порядка?
5. В чем суть метода последовательного интегрирования системы дифференциальных уравнений?
6. Какие комбинации называют интегрируемыми и в чем суть метода интегрируемых комбинаций?

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

Решение. Оба уравнения системы являются уравнениями с разделяющимися переменными, проинтегрировав которые имеем $x=C_1e^{-t}$, $y=C_2e^{2t}$. Это и есть общее решение системы.

***Пример* 2.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2tx, \\ \dfrac{dy}{dt}=xye^{t^2}. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением с разделяющимися переменными, проинтегрировав которое имеем $x=C_1e^{-t^2}$. Подставляем найденное значение x во второе уравнение: $dy/dt=C_1y$. Отсюда $y=C_2e^{C_1t}$.

***Пример* 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}= y-z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y+t. \end{cases}$$

Решение. Вычтем почленно из второго уравнения третье, получим $\dfrac{dy}{dt}(y-z)=y-z$. Тогда $y-z=C_1e^{t}$. Подставив это в первое уравнение, находим $x=C_1e^t+C_2$. Подставим найденное для x выражение во второе уравнение. Получаем

$$\frac{dy}{dt}=y+C_1e^t+C_2.$$

Это линейное уравнение. Решая его, получим

$$y=(C_1t+C_3)e^t-1-t-C_2.$$

Тогда

$$z=y-C_1e^t=(C_1t+C_3-C_1)e^t-1-t-C_2.$$

***Ответ*:** $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2, \\ y=(C_1t+C_3)e^t-1-t-C_2, \\ z=(C_1t+C_3-C_1)e^t-1-t-C_2. \end{cases}$

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, пользуясь методом последовательного интегрирования

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y + 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy^2, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z - x}{x}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{2x - z^2}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1+x^2} y, \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x} z + y + x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \\ z' = \dfrac{z + y}{z^2 - x}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = z. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -z. \end{cases}$

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, сведя систему к одному уравнению высшего порядка

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = z - x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2} - 1)x + (\dfrac{1}{t} - 1)y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (\dfrac{3}{t} - \dfrac{3}{t^2} - 1)x + (\dfrac{3}{t} - 1)y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = (\dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{2t^2} - 1)x + (\dfrac{1}{2t} - 1)y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{2y}. \end{cases}$

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, построив интегрируемые комбинации

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{x}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{(y-x)^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{(y-x)^2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos x \sin y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{-t}}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^{-t}}{x}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{x}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t-3y}{4y-2x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x-4t}{4y-2x}. \end{cases}$

12. Автономная система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

I. Контрольные вопросы и задания

1. Какая система линейных дифференциальных уравнений называется автономной?

2. Как найти решение автономной системы?

3. Какое уравнение называется характеристическим уравнением для автономной системы ?

4. Как найти общее решение автономной системы в случае действительных различных корней характеристического уравнения?

II. Примеры решения задач

Пример. Найти решение автономной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=5, y(0)=3$.

Решение. Будем искать решение системы в виде $x=\alpha_1 e^{kt}$, $y=\alpha_2 e^{kt}$, где k, α_1, α_2 – постоянные, которые надо правильно подобрать. Тогда $x'=k\alpha_1 e^{kt}$, $y'=k\alpha_2 e^{kt}$. Подставляем решение в систему, переносим слагаемые в одну часть и сокращаем на e^{kt}. Получаем в систему:

$$\begin{cases} (2-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (2-k)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \iff (2-k)^2 - 1 = 0;$$

$$2-k=1 \quad \text{или} \quad 2-k=-1, \ k_1=1, \quad k_2=3.$$

Найдем α_1 и α_2, соответствующие каждому из значений k_1 и k_2.

$$k_1=1 \quad \begin{cases} (2-1)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (2-1)\alpha_2 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \alpha_2 = -\alpha_1.$$

Полагая $\alpha_1 = 1$, получим $\alpha_2 = -1$. Тогда для $k_1 = 1$ получаем решение: $x_1 = 1 \cdot e^{1x} = e^x$, $y_1 = -1 \cdot e^{1x} = -e^x$.

$$k_2=3 \quad \begin{cases} (2-3)\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + (2-3)\alpha_2 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \alpha_2 = \alpha_1.$$

Полагая $\alpha_1 = 1$, получим $\alpha_2 = 1$. Тогда для $k_2 = 3$ получаем решение: $x_2 = 1 \cdot e^{3x} = e^{3x}$, $y_2 = 1 \cdot e^{3x} = e^{3x}$.

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}. \end{cases}$$

Подставляем начальные данные и находим значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 3 = -C_1 + C_2, \end{cases} \quad C_1=1, \ C_2=4.$$

Решение системы имеет вид $\begin{cases} x = e^t + 4e^{3t}, \\ y = -e^t + 4e^{3t}. \end{cases}$

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Найти решение автономной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 9, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y, \end{cases}$ $\begin{matrix} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$

Найти решение автономной системы дифференциальных уравнений, записанной в матричном виде, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

9. $x' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot x, \quad x(0) = (1, 2)^T.$

10. $x' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot x,$ $x(0) = (0, 2)^T.$

11. $x' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot x, \quad x(0) = (1, 2)^T.$

12. $x' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x,$ $x(0) = (1, 0)^T.$

13. $x' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x, \quad x(0) = (0, 0, 2)^T.$

14. $x' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot x, \quad x(0) = (0, 0, 1)^T.$

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений.

15. $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot x.$ 16. $x' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot x.$

17. $x' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot x.$ 18. $x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot x.$

19. $x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot x.$ 20. $x' = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot x.$

13. Фазовая плоскость

I. Контрольные вопросы и задания

1. Дайте понятие *фазовой плоскости*; *фазовой траектории* системы уравнений с постоянными коэффициентами.

2. Что называется *точкой покоя* или *положением равновесия* системы ?

3. Пусть λ_1 и λ_2 корни уравнения $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Рассмотреть следующие случаи:

1) числа λ_1 и λ_2 вещественны, различны и имеют один и тот же знак;

2) числа λ_1 и λ_2 вещественны и имеют разные знаки;

3) числа λ_1 и λ_2 образуют комплексно-сопряжённую пару с ненулевой вещественной частью;

4) числа λ_1 и λ_2 образуют комплексно-сопряжённую пару с нулевой вещественной частью;

5) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$;

6) одно или оба числа λ_1 и λ_2 равны нулю (для этого снимем условие $\det A \neq 0$) и для каждого из них схематически изобразить поведение фазовых траекторий в окрестности особой точки.

II. Примеры решения задач

Пример. Определить тип особой точки и сделать рисунок фазового портрета для системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x \ .$$

Решение. Запишем систему подробно

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_2. \end{cases}$$

Точкой покоя системы является точка O (0, 0).

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -3$. Фундаментальную систему решений будем искать с помощью системы

$$\begin{cases} (a-\lambda)\alpha_1 + b\alpha_2 = 0, \\ c\alpha_1 + (d-\lambda)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-1-\lambda)\alpha_1 = 0, \\ (-3-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему для $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$ с точностью до постоянного множителя, получим

$\lambda_1 = -1,\ \ \alpha_1^1 = 1,\ \ \alpha_2^1 = 0,\ \ x_1^1 = e^{-t},\ \ x_2^1 = 0;$

$\lambda_2 = -3,\ \ \alpha_1^2 = 0,\ \ \alpha_2^2 = 1,\ \ x_1^2 = 0,\ \ x_2^2 = e^{-3t};$

Общее решение системы может быть записано в виде

$$x_1(t) = C_1x_1^1 + C_2x_1^2 = C_1e^{-t}, \qquad x_2(t) = C_1x_2^1 + C_2x_2^2 = C_2e^{-3t}.$$

Очевидно, что точка покоя O (0, 0) асимптотически устойчива, так как

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim_{t\to+\infty} C_1e^{-t} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = \lim_{t\to+\infty} C_2e^{-3t} = 0.$$

Произвольная точка с координатами (x_1, x_2) ($x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$) фазовой плоскости при достаточно большом t оказывается в некоторой δ-окрестности точки O, а при $t \to +\infty$ неограниченно приближается к этой точке.

Общее решение системы – это параметрическое задание траектории движения точки (x_1, x_2) на фазовой плоскости. Выразив x_2 через x_1, получим явное задание такой траектории: $x_2 = Cx_1^3$ ($x_1 \neq 0$). Кроме того, система имеет траектории $x_1 = 0,\ x_2 \neq 0$; $x_2 = 0,\ x_1 \neq 0$.

Придадим C различные значения, например $C = -2,\ -1,\ -1/2,\ 1/2,\ 1,\ 2, \ldots$, т.е.

при $x_1 > 0$: $x_2 = -2x_1^3,\ x_2 = -x_1^3,\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_1^3$ и т.д.,

при $x_1 < 0$: $x_2 = 2x_1^3,\ x_2 = x_1^3,\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_1^3$, и т.д.

Получаем фазовый портрет (рис. 2). Точка покоя в этом случае называется устойчивым узлом.

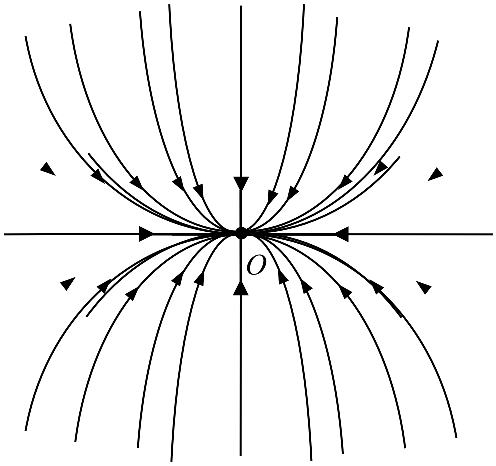

Рис. 2.

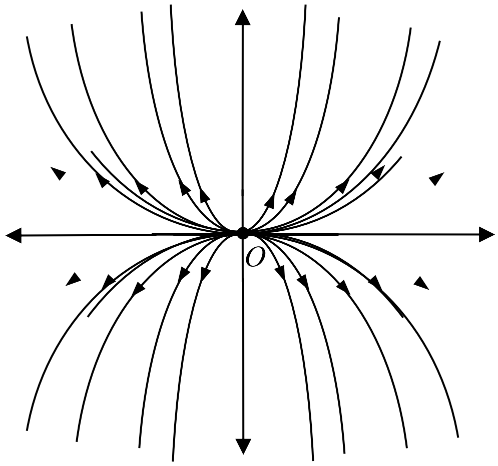

Рис. 3.

Рассуждая аналогично, получим, что система $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 \end{cases}$ имеет точку покоя O (0, 0) – неустойчивый узел (рис.3). С возрастанием t точки сколь угодно близкие к началу координат удаляются из δ-окрестности точки O и при $t \to +\infty$ удаляются в бесконечную часть плоскости.

Замечание. Характер точки покоя O (0, 0) можно определить, по виду корней характеристического уравнения рассмотренных систем. Для системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 \end{cases}$ корни характеристического уравнения действительны, различны и оба отрицательны, следовательно, точка O (0, 0) – устойчивый узел. Для системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 \end{cases}$ корни характеристического уравнения действительны, различны и оба положительны, следовательно, точка O (0, 0) – неустойчивый узел.

III. Задачи и упражнения для лабораторных работ

Определить тип особой точки и сделать рисунок фазового портрета для системы:

1. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x.$

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x.$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x.$

5. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -4 \end{bmatrix} x$.

6. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} x$

7. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x$

8. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x$

9. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x$.

10. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$.

11. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$.

12. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} x$.

13. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} x$.

14. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} x$.

15. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} x$

16. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} x$.

17. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} x$.

18. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x$

19. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x$.

20. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$.

14. Криволинейные интегралы первого рода

I. Контрольные вопросы и задания

1. Введите понятие криволинейного интеграла первого рода.
2. Зависит ли криволинейный интеграл первого рода от направления обхода кривой?
3. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла первого рода.
4. В чем состоит геометрический и физический смысл криволинейного интеграла первого рода?
5. Запишите формулы для нахождения криволинейного интеграла первого рода при различном задании кривой на плоскости и в пространстве.

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Найти интеграл $\int\limits_C x^2 y\, ds$ вдоль отрезка прямой, соединяющий начало координат и точку с координатами (2, 2).

Решение. Прямая, проходящая через точки (0, 0) и (2, 2), задается явно уравнением $y = x$, ($0 \le x \le 2$). Интеграл находим по формуле

$$\int\limits_C F(x, y)\, ds = \int\limits_a^b F(x, y(x))\, \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \text{, где } y(x) = x,\ y'(x) = 1$$

Тогда $\int\limits_C x^2 y\, ds = \int\limits_0^2 x^2 \cdot x\sqrt{2}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2 x^3\, dx = \left.\dfrac{\sqrt{2}}{4} x^4\right|_0^2 = 4\sqrt{2}$.

***Пример* 2.** Найти длину дуги винтовой линии, заданной параметрически уравнениями: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Длина дуги кривой находится по формуле $s = \int\limits_C ds$. Формула для нахождения дифференциала дуги имеет вид

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt .$$

Для данной кривой

$$ds = \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2 + (t)'^2}\, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}\, dt .$$

Тогда $s = \int\limits_C ds = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi$.

***Пример* 3.** Найти массу дуги окружности C, заданной уравнениями $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если плотность $\rho(x, y)$ в каждой точке равна квадрату ординаты в этой точке.

Решение. Масса дуги кривой находится по формуле $m = \int\limits_C \rho(x, y)\, ds$.

В нашем случае $m = \int\limits_C y^2\, ds$.

Кривая задана параметрически, следовательно, дифференциал дуги кривой находится по формуле $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$. В нашем случае:

$$ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\, dt = a\, dt .$$

Получим

$$m = \int_C y^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3 \pi}{4}.$$

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Вычислить данные криволинейные интегралы первого рода

1. $\int_C \frac{ds}{y-x}$, где кривая С – отрезок прямой от точки A (0, -2) до точки B (4, 0).

2. $\int_C xyds$, где С – контур треугольника с вершинами O (0, 0), A (4, 0), D (0, 4).

3. $\int_C \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)ds$, где С – отрезок прямой. от точки A (-1, 0) до точки B (0, 1).

4. $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где С – отрезок прямой. от точки O(0, 0) до точки F (1, 2).

5. $\int_C xyz\, ds$, где С – отрезок прямой. от точки A (1, 0, 1) до точки B (2, 2, 3).

6. $\int_C xds$, где С – дуга параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от точки O (0, 0), до точки A (2, 2).

7. $\int_C x^2 ds$, где С – дуга кривой $y = \ln x$ от точки A (1, 0), до точки B (e, 1).

8. $\int_C arctg\, \frac{y}{x} ds$, где С – часть дуги спирали Архимеда $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

9. $\int_C \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, где С – часть дуги кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

10. $\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$, где C – дуга кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

11. $\int\limits_C x^2 y ds$, где C – четверть окружности $x^2 + y^2 = 4$, лежащая в первой четверти.

12. $\int\limits_C y ds$, где C – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками A (1, 0), B (0, 1).

13. $\int\limits_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$, где C – первый виток конической винтовой линии $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

14. $\int\limits_C \sqrt{2y}\, ds$, где кривая C – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

15. Найти длину дуги цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$.

16. Найти длину дуги кривой $x = 4 - \dfrac{t^4}{4}$, $y = \dfrac{t^6}{6}$, $0 \le t \le 2$.

17. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды циклоиды
$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

18. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

19. Найти координаты центра масс дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$, линейная плотность которой $\rho = y\sqrt{1 + x}$.

20. Вычислить моменты инерции относительно начала координат и относительно координатных осей Ox и Oy однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R$.

15. Криволинейные интегралы второго рода

I. Контрольные вопросы и задания

1. Введите понятие криволинейного интеграла второго рода.
2. Зависит ли криволинейный интеграл второго рода от направления на кривой?

3. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

4. В чем состоит геометрический и физический смысл криволинейного интеграла первого рода?

5. Запишите формулы для нахождения криволинейного интеграла второго рода при различном задании кривой на плоскости и в пространстве.

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy$ вдоль кривой $y = \ln x$ на интервале $1 \le x \le e$.

Решение. Кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, поэтому для нахождения этого интеграла воспользуемся формулой

$$\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx.$$

Тогда

$$\int\limits_C \frac{y}{x}dx + dy = \int\limits_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx + \int\limits_1^e \frac{1}{x}dx = \int\limits_1^e \ln x\, d(\ln x) + \ln x\Big|_1^e =$$

$$= \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e + \ln x\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} + \ln e - \frac{\ln^2 1}{2} - \ln 1 = \frac{3}{2}.$$

***Пример* 2.** Вычислить интеграл $\int\limits_C (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz$, где кривая С – дуга винтовой линии $x = t$, $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение. Кривая задана параметрически, следовательно, формула для нахождения криволинейного интеграла второго рода имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Поскольку $dx = dt$, $dy = -2\sin t\,dt$, $dz = 2\cos t\,dt$, то

$$\int\limits_C (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos^2 t + \sin^2 t) - 4\cos t \cdot \sin t \cdot (-2\sin t) + 2t\cos t)dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, d\sin t + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \, dt = (4t + 8\frac{\sin^3 t}{3})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \, dt.$$

Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt$ находится методом интегрирования по частям. Воспользуемся формулой $\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt = \begin{vmatrix} u = t, & du = dt \\ dv = \cos t\, dt, & v = \sin t \end{vmatrix} = t \cdot \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Тогда

$$\int_C (y^2 + z^2)dx - yzdy + xdz = 2\pi + \frac{8}{3} + \pi - 2 = 3\pi + \frac{2}{3}.$$

***Пример* 3.** Вычислить работу A силы $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль отрезка прямой BC от точки B (1, 1, 1) до точки C (2, 3, 4).

Решение. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) с направляющим вектором $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), имеет вид

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t, \quad z = z_0 + a_3 t.$$

В нашем случае: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$ $0 \le t \le 1$.

Тогда работа A, силы $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ находится по формуле

$$A = \int_{BC} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

следовательно,

$$A = \int_{BC} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$= \int_0^1 ((1+2t)(1+3t) + 2(1+t)(1+3t) + 3(1+t)(1+2t))dt =$$

$$= \int_0^1 (18t^2 + 22t + 6)\, dt = 23.$$

III. Задачи и упражнения для практических занятий

Найти криволинейный интеграл второго рода

1. $\int\limits_{AB} \cos y dx + \sin x dy$, где AB – отрезок прямой от точки $A(2\pi; -2\pi)$ до точки $B(-2\pi; 2\pi)$.

2. $\int\limits_{C} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ где C – ломаная OAB, $O(0; 0)$ $A(0; 2)$, $B(1; 2)$.

3. $\int\limits_{C} \sqrt{x}dx - \sqrt{y}dy$ вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$.

4. $\int\limits_{C} (x + y)dx + (x - y)dy$, где C – контур треугольника ABC, *с вершинами* $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$

5. $\int\limits_{C} xdy - y^2 dx$ вдоль кривой C, заданной уравнением $y = e^x$ от точки (0;0) до точки (2;8).

6. $\int\limits_{C} y^2 dx + xydy$, где C – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ от точки $A(a, 0)$ до точки $B(0, b)$.

7. $\int\limits_{C} x^2 dx + xydy$, где С – дуга окружности радиуса a, лежащая в первом квадранте (направление обхода – против часовой стрелки).

8. $\int\limits_{C} \dfrac{x^2 dx - y^2 dy}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, где С – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, заключенная между точками $A(2, 0)$, $B(0, 2)$.

9. $\oint\limits_{C} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C – окружность радиуса a, пробегаемая против часовой стрелки.

10. $\oint\limits_{C} \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где C– окружность $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, пробегаемая против часовой стрелки.

11. $\int\limits_{C} (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, где С – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, при положительном направлении обхода.

12. $\int\limits_{AB} xdx + ydy + (x + y - z)dz$, где AB – отрезок прямой от точки $A(1; 1; 1)$ до точки $B(2; 3; 4)$.

13. $\int\limits_C xdx + ydy + zdz$, где $C-$ дуга ломаной $OABC$, $O(0, 0, 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$.

14. $\int\limits_C yzdx + xzdy + xydz$, где C – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{t}{2\pi}$, $0 \le t \le 2\pi$.

15. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = \cos^2 x\vec{i} - y\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги линии $y = \sin x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

16. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = y^2\vec{i} - xy\vec{j} + yz\vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi$.

17. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ против часовой стрелки.

18. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$ против часовой стрелки.

16. Формула Грина

I. Контрольные вопросы и задания

1. Запишите формулу Грина. В каком случае она применяется?
2. Сформулируйте теорему о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

II. Примеры решения задач

***Пример* 1.** Используя формулу Грина, найти интеграл $\int\limits_C (x - y)dx + (x + y)dy$, где C представляет собой окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Формула Грина имеет вид

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где область D – область ограниченная замкнутой кривой C.

В нашем случае: $P(x,y) = x - y$, $Q(x,y) = x + y$, тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x-y)'_y = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (x+y)'_X = 1,$$

Следовательно,

$$\int_C (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D 2\,dxdy = 2\iint_D dxdy,$$

где область D – круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$. Учитывая, что интеграл $\iint_D dxdy$ равен площади области D, т.е. πa^2, получим

$$\int_C (x-y)dx + (x+y)dy = 2\pi a^2.$$

***Пример* 2.** Показать, что дифференциальное выражение

$$\frac{x}{y}dy + \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y\right)dy$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u\,(x, y)$ и найти эту функцию.

Решение. $Q(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $\quad P(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x} + \ln y$. Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y},$$

по теореме о независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования во всех точках плоскости XOY, за исключением точек, лежащих на координатных осях, данное дифференциальное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u\,(x, y)$. Эта функция может быть найдена по формуле

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

где точки $M_0\,(x_0, y_{0)})$ и $M\,(x, y_))$ – произвольные точки плоскости XOY, не лежащие на координатных осях. В качестве точки M_0 можно взять, например, точку (1, 1).

$$u(x,y)=\int_1^x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln 1\right)dx+\int_1^y\frac{x}{y}dy =$$

$$=\left(\operatorname{arctg}x-\ln|x|\right)\Big|_1^x+x\ln|y|\Big|_1^y+C=\operatorname{arctg}x-\ln|x|+x\ln|y|+C.$$

III. Задачи и упражнения для практических занятий

1. Можно ли применять формулу Грина для интеграла $\int\limits_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где C – окружность радиуса a с центром в начале координат, пробегаемая против часовой стрелки?

Используя формулу Грина, найти интегралы.

2. $\oint\limits_C(x^2-y)\,dx+(x-y)dy$, где С – контур прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ при положительном направлении обхоа контура.

3. $\oint\limits_C y^2\,dx+(x+y)^2dy$, где контур С представляет собой треугольник ABD с вершинами в точках $A(a,0)$, $B(a,a)$, $D(a,a)$.

4. $\oint\limits_C(x+y)\,dx-(x-y)dy$, где С – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

5. $\oint\limits_C yx^2dx-xy^2dy$, где С – окружность $x^2+y^2=a^2$, обход которой производится против часовой стрелки.

6. $\int\limits_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где C– окружность $(x-2)^2+y^2=1$, пробегаемая против часовой стрелки.

7. $\int\limits_C\frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}$, где C– окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, пробегаемая против часовой стрелки.

8. $\oint\limits_c e^x(1-\cos y)dx-e^x(1-\sin y)dy$, где C – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\sin x$.

Вычислить интеграл вдоль указанных линий:

9. $\int\limits_{AB}2xy\,dx+x^2dy$, *а*) $y=x$, *б*) $y=x^2$, *в*) $y=\sqrt{x}$, *г*) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$.

Доказать, что следующие интегралы не зависят от пути интегрирования и найти эти интегралы.

10. $\int\limits_{AB} xye^{x}\,dx + (x-1)e^{x}dy$, где AB – любая линия, соединяющая точки $A(\frac{\pi}{4}, 2)$ и $B(\frac{\pi}{6}, 1)$.

11. $\int\limits_{AB} 2y\sin 2x dx - \cos 2y dy$, где AB – любая линия, соединяющая точки $A(0, 2)$ и $B(1, 2)$.

Проверить, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции $u\,(x, y)$ и найти эту функцию.

12. $du = (3x+4y)\,dx + (4x - y)dy$.

13. $du = (x^2 - 2xy^2 + 3)\,dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$.

14. $du = (y^2e^{xy} - 3)\,dx + e^{xy}(1 + xy)dy$.

15. $du = (2x\cos y - y^2\sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах: учебное пособие для учреждений высшего образования по специальности «Компьютерная физика»/ Н.Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко — Минск: БГУ, 2019.

2. Матвеев, Н. М. Дифференциальные уравнения / Н. М. Матвеев. – Москва : Просвещение, 1988. – 254 с.

3. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Едиториал УРСС, 2002. – 319 с.

4. Иванова, Ж.В. Математический анализ. Ряды. Криволинейные интегралы / Ж.В. Иванова, Т.Л. Сурин, С.В. Шерегов. – Витебск: ВГУ имени П.М.Машерова, 2013. — 65 с.

5. Подоксёнов, М. Н. Дифференциальные уравнения первого порядка / М. Н. Подоксёнов, Т. Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2020. – 47 с.

6. Подоксёнов, М. Н. Дифференциальные уравнения высших порядков / М.Н. Подоксёнов, Т.Л. Сурин. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2021. – 50 с.

Учебное издание

СУРИН Татьяна Леонидовна
ИВАНОВА Жанна Викторовна

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *А.В. Табанюхова*

Подписано в печать 20.06.2024. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,96. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 9 экз. Заказ 86.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.