Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73
П69

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 20.12.2023.

Составители: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат педагогических наук, доцент **В.В. Устименко;** заведующий кафедрой математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **Т.Б. Караулова;** студент 4 курса факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова **В.О. Резнер**

Р е ц е н з е н т ы :
заведующий кафедрой «Математика и информационные технологии» УО «ВГТУ»,
кандидат физико-математических наук, доцент *Т.В. Никонова*;
доцент кафедры прикладного и системного программирования ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Е.А. Витько*

П69 **Практикум по решению математических задач :** методические рекомендации / сост.: В.В. Устименко, Т.Б. Караулова, В.О. Резнер. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 40 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с учебными программами дисциплин «Практикум по решению математических задач», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Практикум по решению задач по алгебре» специальностей I ступени высшего образования. Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения, примеры выполнения заданий и задачи для самостоятельного решения студентами, изучающими различные методы решения уравнений и неравенств с модулем. Предназначены для всех специальностей факультета математики и информационных технологий.

УДК 51(076.5)
ББК 22.1я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эффективная деятельность специалиста в современном мире требует достаточно прочной базовой математической подготовки, поэтому в настоящее время традиционный взгляд на содержание обучения математики, ее роль и место в общем образовании пересматриваются и уточняются. Наряду с подготовкой студентов, которые в дальнейшем в своей профессиональной деятельности будут пользоваться математикой, важнейшей задачей обучения становится обеспечение некоторого гарантированного уровня математической подготовки независимо от специальности.

Важным для жизни в современном мире также является формирование логического мышления, пространственных представлений, интуиции, творческих способностей и эстетических вкусов.

Основная цель данного издания – развитие логического мышления посредством решения различных математических задач, что необходимо студентам при изучении вопросов программирования для составления различных программ и их применения к решению прикладных задач.

Методические рекомендации построены по следующему принципу: вначале изложены основные теоретические сведения о методах решения уравнений и неравенств с модулем, затем предложено большое количество иллюстративных примеров различных типов к каждому разделу и задания для самостоятельного решения.

Адресованы студентам факультета математики и информационных технологий Витебского государственного университета имени П.М. Машерова.

Данное издание может применяться для подготовки к занятиям по дисциплинам: «Практикум по решению математических задач», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Практикум по решению задач по алгебре».

1. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

1.1. Основные определения и свойства модуля

Абсолютная величина или модуль числа x обозначается $|x|$ и определяется как:

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Свойства модуля

1) Число неотрицательно тогда и только тогда, когда оно равно своему модулю, то есть $|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$.

2) Число равно нулю тогда и только тогда, когда его модуль равен нулю, то есть $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$.

3) Число неположительно тогда и только тогда, когда его модуль равен противоположному числу, то есть $|x| \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$.

4) Модуль числа есть число неотрицательное, то есть $|x| \geq 0$ для любого x.

5) Модуль числа не меньше как самого числа, так и числа, ему противоположного, то есть $|x| \geq x$ для любого x, $|x| \geq -x$, для любого x.

6) Модули противоположных чисел равны, то есть $|x| \geq |-x|$ для любого x.

7) Квадрат модуля равен квадрату подмодульного выражения, то есть $|x|^2 = x^2$ для любого x. Эта формула может использоваться так же справа налево, то есть $x^2 = |x|^2$, например, при решении квадратных уравнений способом подстановки.

8) Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей сомножителей, то есть $|ab| = |a| \cdot |b|$.

9) Если знаменатель дроби отличен от нуля, то модуль дроби равен частному от деления модуля числителя на модуль знаменателя, то есть при $b \neq 0$ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

10) $|a^m| = |a|^m$ для любого целого значения m.

11) Если $n -$ четное число, то $|a|^n = a^n$ (частным случаем этого свойства является свойство 7)).

12) Квадратный корень из квадрата числа равен модулю этого числа: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Так же есть более сложные свойства модулей:

1) $|f| + |g| = f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \geq 0. \end{cases}$

2) $|f| + |g| = f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ g \leq 0. \end{cases}$

3) $|f| + |g| = -f + g \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq 0, \\ g \geq 0. \end{cases}$

4) $|f| + |g| = -f - g \Leftrightarrow \begin{cases} f \leq 0, \\ g \leq 0. \end{cases}$

Геометрический смысл модуля

Каждому действительному числу соответствует точка числовой оси, для которой это число явилось координатой. Абсолютная величина этого числа – это расстояние соответствующей точки оси до начала координат. Например, точка $x = a$ и $x = -a$ удалены от начала координат на $|a|$ (рисунок 1.1.1). Таким образом, абсолютная величина (модуль) действительного числа есть расстояние от точки, изображающей это число на числовой оси, до начала координат. Например, уравнению $|x| = 5$ соответствуют две точки: $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$, уравнению $|x| = 0$ – одна точка O – начало координат, а уравнению $|x| = c$, где c<0, не отвечает ни одно число, то есть это уравнение решений не имеет, или $x \in \emptyset$.

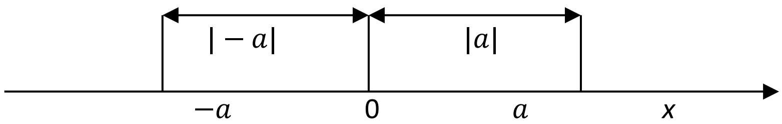

Рисунок 1.1.1

Виды уравнений с модулем

Уравнения с модулем делятся на три вида, каждый вид имеет свой подход к решению:

1) $|x| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, \text{при } x \geq 0, \\ x = -a, \text{при } x < 0. \end{array}\right.$

2) $|x| = |y|$

$|x| = |y| \Leftrightarrow |x^2| = |y^2| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x = -y. \end{array}\right.$

3) $|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = y, \\ x = -y. \end{array}\right. \end{cases}$

Решение уравнений с модулем может быть самостоятельной задачей.

Например:

$x^2 = 16.$

Отсюда:

$x^2 = 4^2.$

Получим:

$x^2 = 4^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4^2} \Leftrightarrow |x| = 4.$

1.2. Метод промежутков

Основным методом решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, является метод промежутков. Для реализации данного метода необходимо:

1. Найти область определения уравнения.
2. Найти нули подмодульных выражений.
3. Изобразить область определения уравнения на координатной прямой и разбить её нулями подмодульных выражений на промежутке.
4. На каждом таком промежутке уравнение записать без знака модуля, решить его и из найденных решений выбрать лишь те, которые принадлежат рассматриваемому промежутку.
5. Найденные множества решений объединить и записать ответ.

Пример 1.2.1. Определить корни уравнения $|x-1|+|x+2|=1$.

Решение. Область определения данного уравнения – множество всех действительных чисел. Нули подмодульных выражений: $x_1=1, x_2=-2$. Они разбивают координатную прямую на промежутки, заданные неравенствами:

$x<-2,\ -2\le x\le 1,\ x>1$. Будем искать решения данного уравнения на каждом из промежутков. Для этого решим три системы:

1) $\begin{cases} x<2, \\ -x+1-x-2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ x=-1. \end{cases}$ Решений нет.

2) $\begin{cases} -2\le x\le 1, \\ -x+1+x+2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x\le 1, \\ x=-2. \end{cases}$ Решений нет.

3) $\begin{cases} x>1, \\ x-1+x+2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x=0. \end{cases}$ Решений нет.

Ответ: нет решений.

Пример 1.2.2. Решим уравнение $|x^2-x|+|x-2|=x^2-2$.

Решение. Решим четыре системы:

1) $\begin{cases} x\le 0, \\ x^2-x-x+2=x^2-2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x=2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2) $\begin{cases} 0<x<1, \\ -x^2+x-x+2=x^2-2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$

Система решений не имеет.

3) $\begin{cases} 1\le x\le 2, \\ x^2-x-x+2=x^2-2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le 2, \\ x=2. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

4) $\begin{cases} x>2, \\ x^2-x+x22=x^2-2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ 0\cdot x=0. \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Находим объединение множеств решений всех систем и получаем ответ.

Ответ: $[2; +\infty)$.

Пример 1.2.3. Определить корни уравнения $\frac{3}{|4-x|} = x$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $\begin{cases} 4 - x < 0, \\ \frac{3}{x-4} = x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x^2 - 4x - 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{7},$

2) $\begin{cases} 4 - x > 0, \\ \frac{3}{4-x} = x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Ответ: $\{1; 3; 2 + \sqrt{7}\}$.

Пример 1.2.4. Определить корни уравнения

$$\sqrt{x-2} = |x - 4| - |x - 3|.$$

Решение. Решим три системы:

1) $\begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ \sqrt{x-2} = -x + 4 + x - 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ \sqrt{x-2} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

2) $\begin{cases} 3 < x < 4, \\ \sqrt{x-2} = -x + 4 - x + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ \sqrt{x-2} = -2x + 7. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ -2x + 7 \ge 0, \\ x - 2 = (-2x + 7)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \le 3{,}5, \\ 4x^2 - 29x + 51 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 3{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4\frac{1}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$

Система решений не имеет.

3) $\begin{cases} x \ge 4 \\ \sqrt{x-2} = -1 \end{cases}$. Система решений не имеет.

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.2.1. *Определить корни уравнений*:

1. $|3 - x| - |x + 5| + x = 0$
2. $x - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 4$
3. $x^2 + 2|x - 1| + 7 = 4|x - 2|$
4. $|x - 3| + |x^2 - 1| = 14 - x$
5. $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} = \frac{1}{|x|-1}$
6. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} = 2$

Задание 1.2.2. *Определить корни уравнений*:

1. $\sqrt{x-2} = 4 - |x-2|$
2. $\sqrt{x^2-3x} = |x-4| + |x-3|$
3. $\sqrt{|x+1| + |x+5|} = |x+2{,}5|$

1.3. Метод равносильных переходов

Решение уравнений вида $|f(x)| = a$.

$|f(x)| = a$, где $f(x)$ – некоторая функция, a – некоторое действительное число.

1. Если $a > 0$, то $|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$
2. Если $a = 0$, то $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = 0$.
3. Если $a < 0$, то уравнение $|f(x)| = a$ решений не имеет.

Пример 1.3.1. Определить корни уравнения $|x^2+5x+6| = 2$.

Решение. Имеем:

$$|x^2+5x+6| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+6 = 2, \\ x^2+5x+6 = -2. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+4 = 0, \\ x^2+5x+8 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+5x+4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; -4\}$.

Пример 1.3.2. Определить корни уравнения $|2-7x+3x^2| = \sqrt{5} - 9$.

Решение. Данное уравнение решений не имеет, поскольку $\sqrt{5} - 9 < 0$.

Ответ: решений нет.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.3.1. *Определить корни уравнений*:

1. $|1-x| = 5$
2. $|2x-3| = 0$
3. $|2x-3| = -7$
4. $|x^2+2x-3| = 0$
5. $|x^2+2x-3| = \sqrt{7} - 4$
6. $|x^2+2x-3| = 5$

Задание 1.3.2. *Определить корни уравнений*:

1. $\left|\frac{4}{3-2x}\right| = 3$
2. $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| = 1$

Задание 1.3.3. *Определить корни уравнений*:

1. $\left|\left|\left||x|-2\right|-1\right|-2\right| = 2$;
2. $\left|\frac{1}{6} - \left|\frac{1}{6} - |x-1|\right|\right| = 0{,}5$.

Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$.

1. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = -g(x), \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$

2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big) \cdot \big(f(x) + g(x)\big) = 0.$

Пример 1.3.3. Определить корни уравнения $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$.
Решение.
1-й способ. Воспользуемся равносильностью 1:

$$|x - 6| = |x^2 - 5x + 9| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 6 = x^2 - 5x + 9, \\ x - 6 = -x^2 + 5x - 9. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 15 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1; 3\}$.
2-й способ. Воспользуемся равносильностью 2:

$$|x - 6| = |x^2 - 5x + 9| \Leftrightarrow (x - 6)^2 = (x^2 - 5x + 9)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 6)^2 - (x^2 - 5x + 9)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 6 - x^2 + 5x + 9) \cdot (x - 6 + x^2 - 5x + 9) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-x^2 + 6x - 15) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1; 3\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.3.4. *Определить корни уравнений*:
1. $|2x - 3| = |1 + 2x|$
2. $|x - 2| = 3|x + 3|$
3. $|x + 1| - 2|x - 2| = 0$
4. $|x^2 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|$
5. $\left|\frac{1}{x-8}\right| = \left|\frac{1}{8-x}\right|$.

Задание 1.3.5. *Определить корни уравнений*:
1) $|x + 3| = -|x^2 - 9|$
2) $|x + 2| = -|x^2 - 16|$

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x), |f(x)| = f(x), |f(x)| = -f(x)$.

1. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$

2. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

3. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$

4. $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0.$

Пример 1.3.4. Определить корни уравнения $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$.

Решение.

1-й способ. Имеем:

$$|x^2 - 2x| = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 3 - 2x, \\ x^2 - 2x = 2x - 3. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 3, \\ x^2 - 4x + 3 = 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3}, \\ x = \sqrt{3}, \\ x = 3, \\ x = 1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3}, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-\sqrt{3}; 1\}$.

2-й способ. Данное уравнение равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0, \\ x^2 - 2x = 3 - 2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2x < 0, \\ -x^2 + 2x = 3 - 2x. \end{cases}$$

Решить совокупность систем самостоятельно.

Пример 1.3.5. Определить корни уравнения

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно неравенству $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Решив неравенство, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Пример 1.3.6. Определить корни уравнения

$$\left|x^2 - 3x + 2\right| = -x^2 + 3x - 2.$$

Данное уравнение равносильно неравенству $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Решив неравенство, получим ответ.

Ответ: $[1; 2]$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.3.6. *Определить корни уравнений*:

1. $|3x - 1| = 2 + x$
2. $6x - x^2 - 9 = |x - 3|$

3. $x^2 - 3x + 2|x - 2| = 0$
4. $|x^2 - x - 8| = -x$
5. $|4x - 1| = \frac{1}{3x-1}$
6. $\left|2 + \frac{7}{x-3}\right| = \frac{7x+17}{5}$

Задание 1.3.7. *Определить корни уравнений*:
1. $|12 - 8x + x^2| = x^2 - 8x + 12$
2. $|x^2 - 8x + 12| = 8x - 12 - x^2$
3. $\left|\frac{1+3x}{2x-4}\right| = \frac{1+3x}{4-2x}$
4. $\left|\frac{x^5}{1-x^2}\right| = \frac{x^5}{1-x^2}$
5. $\sqrt{(5x - x^2 - 6)^2} = x^2 - 5x + 6$
6. $\sqrt{(x^2 - 3x + 2)^2} = -x^2 + 3x - 2$

Задание 1.3.8. *Определить корни уравнений*:
1. $\left|x - \left|x - |x - 1|\right|\right| = 0{,}5$
2. $|x - |x - 1| - 2x| = x^2 - 2$

1.4. Метод введения новой переменной. Метод разложения левой части на множители

Определение корней уравнения методом введения новой переменной.

Суть метода введения новой переменной при решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, пояснение на примере.

Пример 1.4.1. Определить корни уравнения: $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| = 8$.

Решение. Обозначим $x^2 - 1$ через t, получим уравнение:

$$|t| + |t - 8| = 8.$$

Решим его, используя геометрическую интерпретацию понятия модуля числа. Переформулируем задачу: «Найти на координатной прямой точки t, такие, что сумма расстояний каждой такой точки t от концов отрезка [0; 8] равнялась бы 8». Каждая точка отрезка [0; 8] обладает таким свойством и, следовательно, решением данного уравнения является числовой отрезок $[0; 8]$, то есть $0 \le t \le 8$.

Перейдём к переменной x: $0 \le x^2 - 1 \le 8 \Leftrightarrow 1 \le x^2 \le 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 1, \\ x^2 \le 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge 1, \\ |x| \le 3. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le x \le -1, \\ \ \ 1 \le x \le 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-3; 1] \cup [1; 3]$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.4.1. *Определить корни уравнений методом введения новой переменной*:

1. $x^2 - |3x| + 2 = 0$
2. $(x+2)^2 = 2|x+2| + 3$
3. $(x^2 - 5x + 6)^2 - 5|x^2 - 5x + 6| = 6$
4. $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$
5. $\frac{4}{|x+1|-2} = |x+1|$
6. $\frac{4}{|x|+3} - \frac{5}{3-|x|} = \frac{1}{|x|-3} - 1$
7. $\frac{12|x|-3x^2}{x^2-4|x|+1} = x^2 - 4|x|$
8. $\left|\frac{x^2-1}{x+7}\right| + \left|\frac{x+7}{x^2-1}\right| = 2\frac{1}{2}$
9. $\frac{x+1}{|x-1|} - 5\frac{|x-1|}{x+1} = -4$

Решение уравнений методом разложения левой части на множители

Пример 1.4.2. Определить корни уравнения

$$\left|5 - x\right| - x + x\left|5 - x\right| - 1 = 0.$$

Решение. Применяя способ группировки, разложим левую часть данного уравнения на множители:

$$(|5-x| + x|5-x|) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow |5-x|\cdot(x+1) - (x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(|5-x|-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ |5-x|=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 4; 6\}$.

Пример 1.4.3. Определить корни уравнения $|2x-1| = (2x-1)^2$.

Решение. $|2x-1| = (2x-1)^2 \Leftrightarrow |2x-1| - (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |2x-1|(1-|2x-1|) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2x-1|=0, \\ |2x-1|=1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=1, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0; 1; 0{,}5\}$.

Пример 1.4.4. Определить корни уравнения

$$\frac{x^2\cdot|x^2+x-6|}{x+3} - \frac{x\cdot|x^2+x-6|}{x-3} = 0.$$

Решение. $x\cdot|x^2+x-6|\cdot\left(\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-3}\right) = 0.$

Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x\cdot|x^2+x-6|=0, \\ x+3\neq 0, \\ x-3\neq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x}{x+3}-\frac{1}{x-3}=0.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3, \\ x=2. \end{array}\right. \\ x+3\neq 0, \\ x-3\neq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-4x-3=0, \\ x+3\neq 0, \\ x-3\neq 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{7}, \\ x=2-\sqrt{7}, \end{array}\right. \\ x+3\neq 0, \\ x-3\neq 0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{7}, \\ x=2-\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0; 2; 2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\}$.

При решении уравнения вида $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ методом равносильных переходов рекомендуется использовать правило: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.4.2. *Определить корни уравнений*:

1. $x^2=|x|$
2. $|5x-2|=(2-5x)^2$
3. $x\cdot|x-7|+x+|x-7|+1=0$
4. $(x-1)^3=|x^2-4x+3|$
5. $x^3+8=3x\cdot|x+2|$

Задание 1.4.3. *Определить корни уравнений*:

1. $|x^2-5x+6|\cdot\sqrt{2-x}=0$
2. $|x^2-3|x|+2|\cdot\sqrt{x^2-4}=0$
3. $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x^2-49}\cdot|x^2-4|=0$

1.5. Нестандартные методы решения уравнений с модулями

Решение уравнений с использованием свойств функций.

При решении некоторых уравнений с модулями целесообразно использовать свойства функций, входящих в них.

<u>Область допустимых значений неизвестной (ОДЗ) или область определения уравнения.</u> Уравнение с одной переменной x можно записать в виде $f(x)=g(x)$, где $f(x)$и $g(x)$ – некоторые функции.

Область определения уравнения $f(x)=g(x)$ представляет собой множество $D(f)\cap D(g)$.

В отдельных случаях область определения уравнения позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, либо найти их.

Пример 1.5.1. Определить множество корней уравнения

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=|x-9|\cdot(x-5).$$

Решение. ОДЗ функции $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}$:

$\begin{cases} 3-x\geq 0, \\ x-2\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3, \\ x\geq 2. \end{cases} \Leftrightarrow 2\leq x\leq 3.$

$D(f)=[2;3]$ и легко показать, что функция f принимает только положительные значения.

Но при $2\leq x\leq 3$ функция $g(x)=|x-9|\cdot(x-5)$ принимает только отрицательные значения. Значит уравнение $f(x)=g(x)$ решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

Множество значений функции. Иногда при решении уравнений полезно сравнивать множества значений функций, находящихся в левой и правой частях уравнения.

Пример 1.5.2. Определить корни уравнения: $2|x|-x^2-1=|x|+\frac{1}{x}$.

Решение. Пусть $f(x)=2|x|-x^2-1$, $D(f)=R$, а $g(x)=|x|+\frac{1}{|x|}$, $D(g)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$f(x)\leq 0$ при любом x из $D(f)$, поскольку $2|x|-x^2-1=$
$=-(x^2-2|x|++1)=-(|x|-1)^2\leq 0$, а $g(x)\geq 2$ при любом x из $D(x)$, поскольку $|a|+\frac{1}{|a|}\geq 2$ а $\neq 0$. Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Промежутки знакопостоянства. При решении некоторых уравнений $f(x)=g(x)$ рассматривают промежутки, на которых значения $f(x)$ и $g(x)$ больше нуля или меньше нуля.

Пример 1.5.3. Определить корни уравнения

$$2|x-1|+|3-x|=-x^2-1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=2|x-1|+|3-x|$, $D(f)=R$ и функцию $g(x)=-x^2-1$, $D(g)=R$. $f(x)>0$, а $g(x)<0$ при любом
$x\in R$, следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример 1.5.4. Определить корни уравнения $|3-x|\cdot x^2=6-2x$.

Решение. Поскольку $|3-x|\cdot x^2\geq 0$ при любом действительном x, то $6-2x\geq 0$, т.е $x\leq 3$ и $|3-x|=3-x$.

Тогда получаем систему:

$\begin{cases} x\leq 3, \\ (3-x)x^2=2(3-x). \end{cases}$

$\begin{cases} x\leq 3, \\ (3-x)(x^2-2)=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\sqrt{2}, \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $\{-\sqrt{2}; 3;\ \sqrt{2}\}$.

Четность функций. При определении корней уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ – чётная функция, можно найти только множество неотрицательных решений, а затем присоединить к нему числовое множество, симметричное найденному относительно нуля.

Пример 1.5.5. Определить корни уравнения $x^2 - 3|x| + 2 = 0$.

Решение. Функция $y = x^2 - 3|x| + 2$ – четная. При $x \geq 0$ имеем: $x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 1$ или $x_2 = 2$. Тогда в силу четности рассматриваемой функции $x_3 = -1$ и $x_4 = -2$ тоже являются корнями данного уравнения.

Ответ: $\{-2;\ -1; 1; 2\}$.

Графики функций. При определении корней уравнения иногда целесообразно рассмотреть схематическое изображение графиков их правой и левой частей. Это изображение помогает найти числовые промежутки, на каждом из которых можно определить решение уравнения. Схематическое изображение графиков лишь помогает найти решение, но его надо ещё обосновать.

Пример 1.5.6. Определить корни уравнения $\sqrt{4 - x^2} = x^2 - 2|x| + 3$.

Решение. Найдём область определения уравнения:

$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Схематически изобразим графики функций

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. $g(x) = x^2 - 2|x| + 3$ и проведём прямую $y = 2$ (рисунок 1.5.1.).

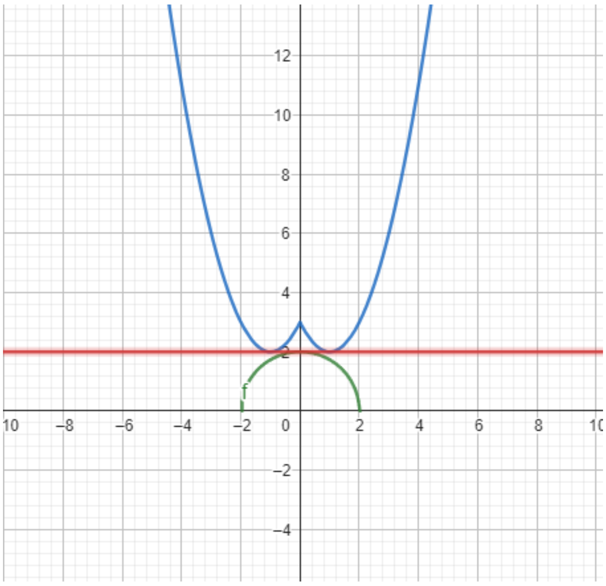

Рисунок 1.5.1

Из схематического изображения графиков видно: график функции $f(x)$ расположен не выше прямой $y = 2$, а график функции $g(x)$ не ниже; эти графики касаются прямой $y = 2$ в трех различных точках. Следовательно, уравнение решений не имеет. Докажем это.

Для каждого значения x из области определения неравенства имеем:

$\sqrt{4 - x^2} \leq 2$, а $x^2 - 2|x| + 3 = (|x| - 1)^2 + 2 \geq 2$.

При этом $\sqrt{4 - x^2} = 2$ при $x = 0$, а $x^2 - 2|x| + 3 = 2$ при $x = -1$ или $x = 1$. А это значит, что исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.5.1. *Определить корни уравнений*:

1. $\sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{1 - x} = |x - 1|$
2. $|x - 2| \cdot x^2 = 10 - 5x$

Задание 1.5.2. *Доказать, что уравнение не имеет решений*:

1. $|5 - x^2| + |x - 2| = 0$
2. $|2x^2 + 5x + 2| + |x^4 + 2| = 2$
3. $\sqrt{2}|x| = -x^2 + 4x - 10$
4. $\sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 2} = |x - 7|(x - 9)$
5. $|-3x^2 + 10x + 3|(x^2 + 2x + 5) = 1$

Задание 1.5.3. *Определить корни уравнений*:

1. $(|x| - 3)(5 - |x|) = 0$
2. $|3|x| - 2| = 5$
3. $x^2 - 4|x| = 12$
4. $\big||x| - 1\big| + \big||x| - 3\big| = 2$
5. $\left|\frac{3|x| + 2}{|x| - 1}\right| = 3$
6. $|x^2 - 5|x| + 4| = |2x^2 - 3|x| + 1|$

Задание 1.5.4. *Определить корни уравнения и привести геометрическую интерпретацию полученного решения*:

1. $|1 - x| = 3$
2. $|x + 2| - x = 3$
3. $|x - 1| + |x + 2| = 1$
4. $|x - 1| + |x + 2| = 3$
5. $|x^2 + x - 6| = x^2 + x - 6$
6. $|x + 2| = |x - 2|$
7. $|x^2 - 4| = x + 2$
8. $|x^2 + 2x - 3| = 5$
9. $\big||x + 1| + 2\big| = 1$

10. $\left|\left||x|-1\right|-1\right|=1$
11. $(x+1)|x|+2=0$

Решение уравнений с использованием свойств модуля

Если a и b – действительные числа, а $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, то:

1. a) $|a|+|b|=0 \Leftrightarrow a=0$ и $b=0$.

   b) $|f(x)|+|g(x)|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$

2. a) $|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow a\geq 0$ и $b\geq 0$.

   b)$|f(x)|+|g(x)|=f(x)+g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

3. a)$|a|+|b|=-a-b \Leftrightarrow a\leq 0$ и $b\leq 0$.

   b)$|f(x)|+|g(x)|=-f(x)-g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leq 0, \\ g(x)\leq 0. \end{cases}$

4. a)$|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab\geq 0$.

   b)$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)| \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\geq 0$.

5. a)$|a-b|=|a|-|b| \Leftrightarrow (a-b)\cdot b\geq 0$.

   b)$|f(x)-g(x)|=|f(x)|-|g(x)| \Leftrightarrow (f(x)-g(x))\cdot g(x)\geq 0$.

6. a)$|a-b|=|a|+|b| \Leftrightarrow a\cdot b\leq 0$.

   b)$|f(x)-g(x)|=|f(x)|+|g(x)| \Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)\leq 0$.

Пример 1.5.7. Определить корни уравнения $|x^3-1|+|x-1|=0$.
Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |x^3-1|=0, \\ |x-1|=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=1, \\ x=1. \end{cases} \Leftrightarrow x=1\,.$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 1.5.8. Определить корни уравнения

$$\left||x+3|-2\right|+\left|3-|x-2|\right|=0.$$

Решение. Имеем: $\left||x+3|-2\right|+|3-3|x-2||=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|-2=0, \\ 3-|x-2|=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2|=2, \\ |x-2|=3. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+3=2, \\ x+2=-2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-2=3, \\ x-2=-3. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=-1\,.$$

Ответ: $\{-1\}$.

Итак, уравнение вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)|=0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \quad \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

Пример 1.5.9. Определить корни уравнения

$$|x-2| + |x-5| = 2x - 7.$$

Решение. Пусть $f(x) = x - 2, g(x) = x - 5$, тогда имеем: $f(x) + g(x) = 2x - 7$.

В силу свойства 2 данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-5 \geq 0, \end{cases}$ откуда получаем $x \geq 5$.

Ответ: $[5;\ +\infty)$.

Пример 1.5.10. Определить корни уравнения

$$|2x+4| + |x+1| = -3x - 5.$$

Решение. Пусть $f(x) = 2x + 4$ и $g(x) = x + 1$, а тогда

$-f(x) - g(x) = -3x - 5$. В силу свойства модуля 3 данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} 2x+4 \leq 0, \\ x+1 \leq 0. \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq -1. \end{cases}$ Откуда $x \leq -1$.

Ответ: $(-\infty; -1]$.

Пример 1.5.11. Определить корни уравнения $\left|\frac{x}{x-1} + x\right| = \left|\frac{x}{x-1}\right| + |x|$.

Решение. Поскольку равенство $|a+b| = |a| + |b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$, то данное уравнение равносильно неравенству $\frac{x}{x-1} \cdot x \geq 0$.

Решив его, получим ответ.

Ответ: $\{0\} \cup (1; +\infty)$.

Пример 1.5.12. Определить корни уравнения

$$2 - |3 - 4x + x^2| = |x| + \frac{1}{|x|}.$$

Решение. Поскольку $2 - |3 - 4x + x^2| \leq 2$, а $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |3 - 4x + x^2| = 0, \\ |x| + \dfrac{1}{|x|} = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ \dfrac{x^2 - 2|x| + 1}{|x|} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ или } x = 3, \\ (|x| - 1)^2 = 0, \\ |x| \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ или } x = 3, \\ x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1.5.5. *Определить корни уравнений*:

1. $(x^2 - 7x + 12)^2 + 10|x - 4| = 0$
2. $8|x - 3| + (x^2 - 5x + 6)^2 = 0$
3. $6x - 9 = x^2 \cdot (|x - 3| + 1)$
4. $(7x^2 - 3x - 4)^2 + 7 \cdot |x + 4|(x^2 - 1)^2 = 0$

Задание 1.5.6. *Определить корни уравнений*:

1. $|x - 3| + |x - 8| = 2x - 11$
2. $|x - 5| + |x - 1| = -2x + 6$
3. $|x^4 - 16 - (x^2 + 4)| = |x^4 - 16| - |x^2 + 4|$
4. $|x^3 - 6x^2 + 11x - 6| + |x^3 - 9x^2 + 26x - 24| = 0$
5. $\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| + |x| = |\frac{x^3}{x^2-1} + x|$

Задание 1.5.7. *Определить корни уравнений*:

1. $\frac{|x+4|-|2x+2|}{(\sqrt{5+x^2}+x-5)(x^2-3x+4)} = 0$
2. $\frac{x-7}{|x-7|} - |x - 1| + |x - 6| + |x - 7|$
3. $\frac{|x|}{x}(|x| - 3)(x + 3) - \frac{x^3}{|x|}(1 - x) = 18$
4. $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{x^2-4}{|x+2|}$
5. $\sqrt{|x| + x} = \frac{x^2-1}{|x|+1}$
6. $\sqrt{x^4 - 4|x|x + 4} = \frac{x}{|x|}$
7. $\sqrt{x^8 - 10|x^3| + 8} = -\frac{x^3}{|x|}$
8. $\sqrt{7 - x} = (|x| + x)^0$
9. $\sqrt{2x + 3} = (|x| - x)^0$
10. $13x - 3x^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - \frac{|4-x|}{x-1} + |4 - x| = 3x|4 - x| - \frac{4}{\sqrt{x-1}} + 4$

Задание 1.5.8. *С помощью графиков соответствующих функций найди число корней уравнения* $|x - 0{,}5| = 0{,}5x + 0{,}5$.

Задание 1.5.9. *Сколько корней имеет уравнение*

$$3 - 2|x - 1| = 2\left(\left|x - \frac{1}{4}\right| - -\frac{3}{2}\right)?$$

2. НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

2.1 Метод промежутков

Основным методом решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, является метод промежутков. Для реализации данного метода необходимо:

1. Найти область определения неравенства.
2. Найти нули подмодульных выражений.
3. Изобразить область определения неравенства на координатной прямой и разбей её нулями подмодульных выражений на промежутке.
4. На каждом таком промежутке неравенства записать без знака модуля, решить его и из найденных решений выбрать лишь те, которые принадлежат рассматриваемому промежутку.
5. Найденные множества решений объединить и записать ответ.

Пример 2.1.1. Определим решения неравенства:

$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3} > 2x.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем.

1)

$$\left(\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3} > 2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{(x-3)(x+4)}{x-3} > 2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0 \\ x-3 \neq 0 \\ x+4 > 2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0 \\ x \neq 3 \\ x<4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x<0)$$

2)

$$\left(\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{x^2-x-12}{x-3} > 2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{x^2-5x-12}{x-3} < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq 3).$$

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.1.1. *Определить корни неравенств*:

1. $|3-x| - |x+5| + x > 0$
2. $x - 2|x+1| + 3|x+2| > 4$
3. $x^2 + 2|x-1| + 7 > 4|x-2|$
4. $|x-3| + |x^2-1| > 14 - x$
5. $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{|x|+1} > \frac{1}{|x|-1}$
6. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} > 2$

2.2 Метод равносильных переходов

Решение неравенств вида $|f(x)| < a$, где $f(x)$ – некоторая функция, a – некоторое действительное число.

1. Если $a > 0$, то $|f(x)| < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < a; \\ f(x) > -a \end{array}\right.$.

2. Если $a > 0$, то $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \leq a; \\ f(x) \geq -a \end{array}\right.$.

3. Если $a > 0$, то неравенство $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a \end{array}\right.$.

4. Если $a > 0$, то неравенство $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq a; \\ f(x) \leq -a \end{array}\right.$.

Пример 2.2.1. Определим решения неравенства:

$$|x-3| < 1$$

Решение. Имеем:

$$(|x-3| < 1) \Leftrightarrow (-1 < x-3 < 1) \Leftrightarrow (2 < x < 4).$$

Ответ: $(2; 4)$.

Пример 2.2.2. Определим решения неравенства:

$$|x^2-5x+5| \leq 1.$$

Решение. Имеем:

$$(|x^2-5x+5| \leq 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-5x+5 \leq 1, \\ x^2-5x+5 \geq -1. \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-5x+4 \leq 0, \\ x^2-5x+6 \geq 0. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 \leq x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq 2. \end{array}\right. \end{cases}\right)$$

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 4]$.

Пример 2.2.3. Определим решения неравенства:

$$|x^2-5x+5| > 1.$$

Решение. Имеем:

$$(|x^2-5x+5| > 1) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x^2-5x+5 > 1, \\ x^2-5x+5 < -1. \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x^2-5x+4 > 0, \\ x^2-5x+6 < 0. \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 4, \\ 2 < x < 3. \end{array}\right.\right)$$

Ответ: $[-\infty; 1] \cup [2; 3] \cup [4; +\infty]$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.2.1. *Определить решения неравенств*:

1. $|x-3| < 1$
2. $|x-3| \leq 1$
3. $|x-3| \leq -1$
4. $|x-3| \leq 0$

5. $|x^2 - 5x + 5| < 1$
6. $|x^2 - 5x + 5| \le 1$
7. $|x^2 - 5x + 5| \le 0$
8. $|x^2 - 5x + 5| \le -3$.

Задание 2.2.2. *Определить решения неравенств*:

1. $\left|\frac{x-2}{2x+3}\right| < 1$
2. $\left|\frac{x-2}{2x+3}\right| \le 0$
3. $\left|\frac{x-2}{2x+3}\right| \le -7$

Задание 2.2.3. *Решить неравенства*:

1. $|2x^2 - 9x + 15| \ge 20$
2. $|2x^2 - 9x + 15| > 20$
3. $|2x^2 - 9x + 15| > -20$
4. $|2x^2 - 9x + 15| > 0$
5. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \ge 1$
6. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \ge 0$
7. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 0$
8. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \ge -1$

Задание 2.2.4. *Решить неравенства*:

1. $\big||x| - 3\big| > 3$
2. $\big||x-1| - 5\big| \le 2$

Решение неравенств вида $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| < |\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$.

1) $(|f(x)| < |g(x)|) \Leftrightarrow (f^2(x) - g^2(x)) < 0;$
2) $(|f(x)| \le |g(x)|) \Leftrightarrow (f^2(x) - g^2(x)) \le 0;$
3) $(|f(x)| > |g(x)|) \Leftrightarrow (f^2(x) - g^2(x)) > 0;$
4) $(|f(x)| \ge |g(x)|) \Leftrightarrow (f^2(x) - g^2(x)) \ge 0.$

Пример 2.2.6. Определим решения неравенства:
$|x-4| < |x-2|$.
Решение.
$|x-4| < |x-2| \Leftrightarrow (((x-4) - (x-2)) \cdot (x-4+x-2) < 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$(-2(2x-6)<0)$\Leftrightarrow$(x-3>0)$\Leftrightarrow$(x>3).
Ответ: $(3; \infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.2.5. *Определить решения неравенств*:

1) $|2x-3| < |2-3x|$
2) $|1-3x| \ge |2x+3|$
3) $|-x^2 + x - 1| < |x^2 - 3x + 4|$
4) $|x-6| > |9 - 5x + x^2|$
5) $\left|\frac{1}{x-2}\right| < \left|\frac{1}{x-1}\right|$
6) $\left|\frac{2}{x-2}\right| \ge \left|\frac{-3}{2x-1}\right|$

Задание 2.2.6. *Определить решения неравенств*:

1) $|x| \geq -|x(x-4)|$

2) $|x| > -|x(x-4)|$

3) $|x(x-4)| > -|x|$

4) $|x(x-4)| \geq -|x|$

Решение неравенств вида $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| < - g(x)$

(Вместо знака $<$ может стоять любой из знаков $\leq, \geq, >$).

1. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow (-g(x) < f(x) < g(x))$.

Доказательство. 1) Если $g(x) < 0$ при некоторых либо при всех x из области определения функции $g(x)$, то неравенство $|f(x)| < g(x)$ не имеет решений, но тогда и неравенство $-g(x) < f(x) < g(x)$ тоже не имеет решения, поскольку значения функции $f(x)$ должны быть больше положительного числа и меньше отрицательного. Верно и обратное утверждение: если $g(x) < 0$ и неравенство $-g(x) < f(x) < g(x)$ не имеет решений, то не имеет решений и неравенство $|f(x)| < g(x)$.

2. Если $g(x) = 0$ при некоторых либо при всех x из области определения функции $g(x)$, то эта равносильность тоже имеет место.

3. Если функция $g(x)$ принимает положительные значения и, например $x = \alpha$ – решение неравенства $f(x) < g(x)$, то тогда $f(\alpha) < g(\alpha)$– верное числовое неравенство и отсюда следует, что $-g(\alpha) < f(\alpha) < g(\alpha)$.

Наоборот, пусть $x = \alpha$ является решением неравенства

$-g(x) < f(x) < g(x)$,

тогда $-g(\alpha) < f(\alpha) < g(\alpha)$ – верное числовое неравенство, а это означает, что $f(\alpha) < g(\alpha)$ – верное числовое неравенство. Следовательно, $x = \alpha$ является решением неравенства $|f(x)| < g(x)$.

Итак, равносильность $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow (-g(x) < f(x) < g(x))$ доказана.

1)

$$\left(|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) > 0 \\ f^2(x) - g^2(x) < 0 \end{cases}\right)\right).$$

2)

$$\left(|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) - g^2(x) \leq 0 \end{cases}\right)\right).$$

3)

$$\left(|f(x)| < g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.\right).$$

4)

$$\left(|f(x)| < g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.\right).$$

Примечание. Заметим, что если $g(x) < 0$ при любом x из области определения функции $g(x)$, то неравенство $|f(x)| < g(x)$ решений не имеет, а множество решений неравенства $|f(x)| > g(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

4. Неравенство $|f(x)| < f(x)$ решений не имеет при любом x из области определения функции $f(x)$.

5. $(|f(x)| < f(x)) \Leftrightarrow (f(x) \geq 0$.

В самом деле,

$$\left(|f(x)| < f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}|f(x)| < f(x),\\ |f(x)| = f(x).\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (f(x) \leq 0)$.

6.

$$\left(|f(x)| \leq -f(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}|f(x)| < \; -f(x),\\ \;|f(x)| \; = \; f(x).\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (f(x) < 0)$.

7. а) $|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow (f(x) < 0)$.

б) Множество решений неравенства $|f(x)| \geq f(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

в) $|f(x)| > -f(x) \Leftrightarrow (f(x) > 0)$.

г) Множество решений неравенства $|f(x)| > -f(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

В самом деле,

$$|f(x)| \geq -f(x) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}|f(x) > -f(x)|,\\ |f(x)| = -f(x).\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}f(x) > 0,\\ f(x) \leq 0.\end{array}\right.\right)$$

то есть множество решений неравенства $|f(x)| \geq -f(x)$ совпадает с областью определения функции $f(x)$.

Пример 2.2.7. Определить решения неравенства:

$$|x^2 - 1| < 2x + 2.$$

Решение. 1-ый способ. В силу равносильности

$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow (-g(x) << f(x) < g(x))$ имеем:

$(|x^2 - 1| < 2x + 2) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 1 < 2x + 2\\ x^2 - 1 > -2x - 2\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x^2 - 2x - 3 < 0\\ x^2 + 2x + 1 > 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}-1 < x < 3\\ x \neq -1\end{cases}\right) \Leftrightarrow (-1 < x < 3)$$

Ответ: $(-1; 3)$.

2-ой способ.

В силу равносильности, имеем:

$$\left(|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f^2(x) - g^2(x) \le 0. \end{cases}\right)\right),$$

имеем:

$$(|x^2-1| < 2x+2) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 2x+2 > 0, \\ (x^2-1)^2 < (2x+2)^2. \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > -1, \\ (x^2-2x-3)(x^2+2x+1) < 0). \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > -1, \\ x \ne -1, \\ x^2-2x-3 < 0. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 3. \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (-1 < x < 3)$.

Ответ: $(-1; 3)$.

3-й способ. В силу равносильности:

$$\big(|f(x)| < g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.\right),$$

данное неравенство равносильно совокупности систем:

$\begin{cases} x^2-1 \ge 0, \\ x^2-1 < 2x+2. \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2-1 < 0, \\ -x^2+1 < 2x+2. \end{cases}$

$\begin{cases} |x| \ge 1, \\ x^2-2x-3 < 0. \end{cases}$ или $\begin{cases} |x| < 1, \\ x^2+2x+1 > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -1, \end{array}\right. \\ -1 < x < 3. \end{cases}$ или $\begin{cases} |x| < 1, \\ x \ne -1. \end{cases}$

$1 \le x < 3$ или $-1 \le x < 1$.

Объединив решения, получим ответ.

Ответ: $(-1; 3)$.

Пример 2.2.8. Определим решения неравенства:

$|x^2-2x| \ge 1+2x$.

Решение. В силу равносильности:

$$\big(|f(x)| < g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.\right),$$

имеем:

$$(|x^2-2x| \ge 1+2x) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x^2-2x \ge 1+2x, \\ x^2-2x \le -1-2x. \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x^2-4x-1 \ge 0, \\ x^2 \le -1. \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow (x^2-4x-1 \ge 0).$$

Ответ: $(-\infty; 2-\sqrt{5}] \cup [2+\sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 2.2.9. Определим решения неравенства:

$$|x^2-4| < x^2-4.$$

Решение. Данное неравенство решений не имеет, поскольку не существует ни одного действительного числа a при котором имеет место числовое равенство $|a| < a$.

Пример 2.2.10. Определим решения неравенства:

$$|x^2-4| \le x^2-4.$$

Решение. 1-й способ. В силу равносильности (6) имеем:

$(|x^2-4| \le x^2-4) \Leftrightarrow (x^2-4 \ge 0)$.

Решив неравенство $x^2-4 \ge 0$, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

2-й способ. Имеем:

$$(|x^2-4| \le x^2-4) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}|x^2-4| < x^2-4,\\ |x^2-4| = x^2-4.\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x^2-4| = x^2-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4 \ge 0) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}x \ge 2,\\ x \le -2.\end{array}\right.\right).$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Пример 2.2.11. Определим решения неравенства:

$$|x-2x^2| \le 2x^2-x$$

Решение. 1-ой способ. В силу равносильности (7) имеем:

$(|x-2x^2| \le 2x^2-x) \Leftrightarrow (|x-2x^2| \le -(x-2x^2)) \Leftrightarrow (x-2x^2 \le 0)$.

Решив полученное неравенство, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0{,}5; +\infty)$.

2-й способ. Имеем:

$(|x-2x^2| \le 2x^2-x) \Leftrightarrow (|2x^2-x| \le 2x^2-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}|2x^2-x| < 2x^2-x\\ |2x^2-x| = 2x^2-x\end{array}\right) \Leftrightarrow (|2x^2-x| = 2x^2-x) \Leftrightarrow (2x^2-x \ge 0)$$

Решив это неравенство самостоятельно.

Ответ:$(-\infty; 0] \cup [0{,}5; +\infty)$.

Пример 2.2.12. Определим решения неравенств:

а) $|x^2-1| > x^2-1$

б) $|x^2-1| \ge x^2-1$

Решение: а) В силу равносильности

$$|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow (f(x) < 0).$$

имеем:

$$|x^2-1| > x^2-1 \Leftrightarrow (x^2-1 < 0) \Leftrightarrow (x^2 < 1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (|x| < 1) \Leftrightarrow (-1 < x < 1)$.

Ответ: $(-1; 1)$.

б) В силу равносильности $|f(x)| \geq f(x)$ множество решений неравенства $|x^2 - 1| > x^2 - 1$ – множество всех действительных чисел, поскольку выражение $x^2 - 1$ определенно при любом действительном x.

Пример 2.2.13. Определим решения неравенства:

$$\left|\frac{x+5}{x-3}\right| \geq \frac{x+5}{x-3}.$$

Решение. Множество решений данного неравенства совпадает с областью определения дроби:

$$\frac{x+5}{x-3},$$

то есть имеем: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 3) \cup \ (3; +\infty)$.

Пример 2.2.14. Определим решения неравенств:

а)

$$\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| > -\frac{x^3}{x^2-1}.$$

б)

$$\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| \geq -\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Решение: а) $\left(\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| > -\frac{x^3}{x^2-1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{x^2-1} > 0\right)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup \ (1; +\infty)$.

б) Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| \geq -\frac{x^3}{x^2-1}.$$

или

$$\left|\frac{x^3}{x^2-1}\right| = -\frac{x^3}{x^2-1};$$

$$\frac{x^3}{x^2-1} > 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^3}{x^2-1} \leq 0$$

то есть множество решений исходного неравенства совпадает с областью определения дроби:

$$\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Ответ: $(-1; 0) \cup \ (1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.2.7. *Используя равносильности (1)-(3) реши неравенство* $2|x - 1| < x + 2$ *тремя способами.*

Ответ: $(0; 4)$.

Задание 2.2.8. *Определить решения неравенств:*

1. $|2x-3|<x$
2. $3|x+1|<3-x$
3. $|4-3x|>2-x$
4. $|4-3x|\geq 2-x$
5. $|2x-3|<2x-3$
6. $|2x-3|\leq 2x-3$
7. $|2x-3|\leq 3-2x$
8. $|2x-3|\geq 3-2x$

Задание 2.2.9. *Определить решения неравенств*:

1. $|x^2-2x-3|<3x-3$
2. $|x-6|<x^2-5x+9$
3. $|x^2-3x+2|\geq 2x-\ x^2$
4. $|x^2-4|+2x+1>0$
5. $x^2-x-2<|5x-3|$
6. $|x^3-1|>1-x$

Задание 2.2.10. *Определить решения неравенств*:

1. $\left|\frac{1-2x}{x+1}\right|-x\geq 0$
2. $\left|\frac{6-7x}{x^2-1}\right|\geq -x^2-1$
3. $\left|\frac{x^2+5x+8}{6+x}\right|<3-x$
4. $\left|\frac{x^5}{1-x^4}\right|<-x^2-1$

Задание 2.2.11. *Определить решения неравенств*:

1. $|x-1|\leq x-1$
2. $|x-1|<x-1$
3. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\leq\frac{x-1}{x+2}$
4. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<\frac{x-1}{x+2}$
5. $|x-2|>x-2$
6. $|x-2|\geq x-2$
7. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|>\frac{x-1}{x+2}$
8. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\geq\frac{x-1}{x+2}$

Задание 2.2.12. *Определить решения неравенств*:

1. $|x-2|-x+3<5$
2. $|2x-|x+3|+1|\geq 2$

2.3 Метод введения новой переменной. Метод разложения левой части на множители

Решение неравенств методом введения новой переменной

Суть решения неравенств методом введения новой переменной поясним на примерах.

Пример 2.3.1. Решим неравенство:

$$x^2-3|x|+2>0.$$

Решение. Введем подстановку $|x|=y$ и запишем неравенство относительно переменной y:

$$y^2-3y+2>0.$$

Решим его, получим: $y < 1$ или $y > 2$. Возвращаясь к переменной x, имеем:

$$\left(\left[\begin{array}{l}|x| < 1,\\ |x| > 2.\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{c}-1 < x < 1,\\ x > 2,\\ x < -2.\end{array}\right.\right)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2.3.2. Определим решения неравенства:

$$x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \leq 0.$$

Решение. Введем подстановку $|x-4| = y, y > 0$, тогда

$x^2 - 8x + 16 = y^2$, т.е. $x^2 - 8x = y^2 - 16$ и получим систему относительно переменной y:

$$\begin{cases} y > 0, \\ y^2 - 16 - \dfrac{3}{y} + 18 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0, \\ y^3 + 2y - 3 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0, \\ (y-1)(y^2 + 2y - 3) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0, \\ y \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку $|x-4| = $ y, то имеем

$$\left(\begin{cases} |x-4| > 0, \\ |x-4| \leq 1. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 4, \\ -1 \leq x-4 \leq 1. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 4, \\ 3 \leq x \leq 5. \end{cases}\right).$$

Ответ: $[3; 4) \cup (4; 5]$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.3.1. *Решить неравенства методом введения новой переменной:*

1. $(|x| - 8)(|x| - 2) > 0$
2. $x^2 - 5|x| + 6 < 0$
3. $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$
4. $\frac{2}{|x|+1} < 2 - |x|$
5. $x^2 + 10x - \frac{5}{|x+5|} + 1 > 0$
6. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| < 12$
7. $\left|\frac{3|x|+2}{|x|-1}\right| < 3$

Решение неравенств методом разложения левой части на множители

Напомним суть решения неравенств методом разложения левой части на множители с помощью примеров.

Пример 2.3.3. Определим решения неравенства:

$$x|x-3|+2|x-3|+x+2>0.$$

Решение. Разложив левую часть неравенства на множители, получим:

$$(|x-3|(x+2)+x+2>0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big((x+2)(|x-3|+1)>0\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2>0) \Leftrightarrow (x>-2).$$

Ответ: $(-2;+\infty)$.

Пример 2.3.4. Определим решения неравенства:

$$|x^2+2x-3|<|6x-6|.$$

Решение. Имеем:

$$(|x^2+2x-3|<|6x-6|) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x-1||x+3|-6|x-1|<0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x-1|(|x+3|-6)<0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\neq 1, \\ |x+3|-6<0. \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} x\neq 1, \\ -6<x+3<6. \end{matrix}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\neq 1, \\ -9<x<3. \end{cases}\right).$$

Ответ: $(-9;1)\ \cup\ (1;3)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.3.2. *Определить решения неравенства:*

1. $|x+9|+|x+9|x<0$
2. $x|x-1|-3x-3|x-1|+9<0$
3. $|x^2-1|(x^2-3x+2)\le 0$
4. $|x^2-4x+3|<2|x-1|+|x-3|-2$

Задание 2.3.3. *Определить решения неравенств:*

1. $|x^2-4|(x^2-1)\le 0$
2. $(x^2-7|x|-8)x^2>0$
3. $\frac{|x-16|}{x^2-3x-2}\ge\frac{|x-10|}{x^2-4x+5}$

2.4. Нестандартные методы решения неравенств с модулями

Решений неравенств с использованием свойств функций

При решении некоторых неравенств с модулями целесообразно использовать свойства функций, входящих в них.

Область определения. Понятие «область определения функции» полезно «увязывать» с понятием «область определения неравенства». Как известно, что неравенство с одной переменной x можно записать в виде $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые функции.

Область определения неравенства $f(x) < g(x)$ представляет собой пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Иногда нахождение области определения неравенства позволяет доказать, что неравенство не имеет решений, либо найти их.

Пример 2.4.1. Определим решения неравенства:

$$(x-2)|2x^2+5x+2| < \sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}.$$

Решение. Найдем область определения неравенства:

$$\left(\begin{cases}1-x \geq 0,\\ x+1 \geq 0.\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}-x \geq -1,\\ x \geq -1.\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x \leq 1,\\ x \geq -1.\end{cases}\right) \Leftrightarrow (-1 \leq x \leq 1).$$

Поскольку функция, стоящая в левой части неравенства принимает только неположительные значения при $-1 \leq \text{x} \leq 1$, а функция, стоящая в правой части неравенства, - только положительные значения, то множество решений неравенства совпадает с областью его определения.

Ответ: $[-1; 1]$.

Множество значений функции. Иногда при решении уравнений неравенства полезно сравнивать множества значений функций, находящихся в левой и правой частях неравенства.

Промежутки знакопостоянства. При решении некоторых неравенств $f(x) < g(x)$ полезно рассматривать промежутки, на которых значения функции $f(x)$ и $g(x)$ сохраняет свой знак.

Четность функции. Заметим, что если функция $f(x)$ четная, то при решении неравенства $f(x) > 0$ достаточно найти только множество неотрицательных решений, а затем к полученному множеству решений присоединить числовое множество, симметричное найденному относительно нуля на координатной прямой.

Пример 2.4.2. Определим решения неравенства:

$$x^2-3|x|+2 \geq 0.$$

Решение. Функция $y = x^2-3|x|+2$ четная. Найдем множество решений данного неравенства при условии, что $x \geq 0$, т.е. решим систему неравенств:

$$\left(\begin{cases}x \geq 0,\\ x^2-3|x|+2 \geq 0.\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x \geq 0,\\ x^2-3x+2 \geq 0.\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2. \end{cases} \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1, \\ x \geq 2. \end{array} \right. \right).$$

Воспользуемся свойством четности функции, входящей в неравенство и запишем ответ.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2.4.3. Определим решения неравенства:

$$(|x| - 1)^2 > 2.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(|x| - 1)^2 - 2 > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = (|x| - 1)^2 - 2, D(f) = R$. Легко показать, что она является четной. Найдем множество решений данного неравенства при $x \geq 0$:

$$\left(\begin{cases} x \geq 0, \\ (x-1)^2 - 2 > 0. \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 1 > 0. \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1 + \sqrt{2}, \\ x < -1 - \sqrt{2}, \end{array} \right. \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(x > 1 + \sqrt{2} \right).$$

В силу четности функции $f(x)$ имеем: $x < -1 - \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}; +\infty\right)$.

<u>График функции.</u> Иногда при решении уравнения или неравенств полезно рассмотреть схематическое изображение графиков их правой и левой частей. Это изображение может помочь выяснить, на какие числовые промежутки надо разбить координатную прямую, чтобы на каждом из них определить решение уравнения или неравенства. Заметим, что схематическое изображение графиков лишь помогает найти решение, но его надо еще обосновать.

Пример 2.4.4. Решим неравенство и дадим геометрическую интерпретации:

$$|x| > \frac{1}{x}.$$

Решение. Имеем:

$$\left(|x| > \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{x}, \\ x < -\frac{1}{x}. \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \frac{x^2 - 1}{x} > 0, \\ \frac{x^2 + 1}{x} < 0. \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{c} \frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0, \\ x < 0. \end{array} \right. \right).$$

Решив совокупность, получим ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Дадим геометрическую интерпретацию полученного решения. Построим графики (рисунок 2.4.1) функций $f(x) = |x|$ и $g(x) = \frac{1}{x}$.

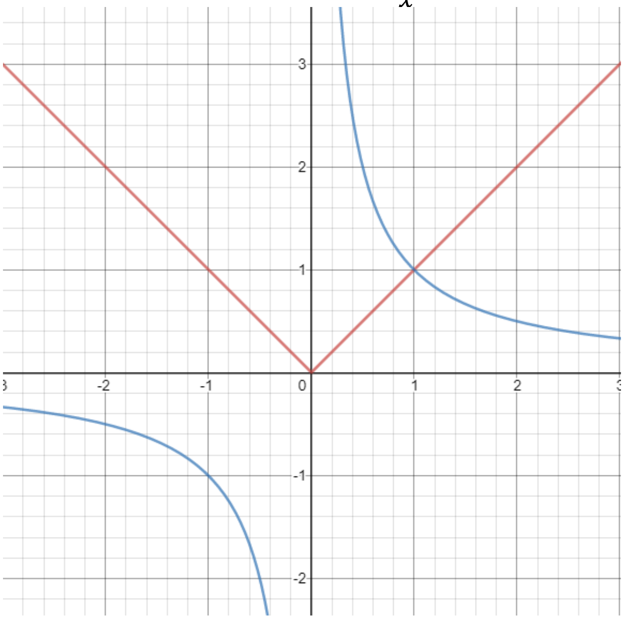

Рисунок 2.4.1. – график функций.

Легко найти координаты точки их пересечения $(1; 1)$. Очевидно, что $f(x) > g(x)$ при любом $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.4.1. *Докажи, что неравенство не имеет решений:*

1. $|2 - x| + |3 + 5x| \leq 0$
2. $|x^3 - 1| + |x^2 - 4x + 9| < 1$
3. $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x - 4} < |3 - x|(x - 6)$

Задание 2.4.2. *Решить неравенство и приведи геометрическую интерпретацию полученного решения:*

1. $|x - 1| > 1$
2. $|x - 1| < 2$
3. $|x| < x + 1$
4. $|x^2 - 3| > 2$
5. $|x + 2| < |x - 1|$
6. $2|x| - x^2 > 1$
7. $|1 - x| + |3 - x| > 2$
8. $|x| < \frac{1}{x}$
9. $|1 - 2|x|| \geq 1$
10. $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$
11. $\left|\frac{1}{x+2}\right| < \frac{2}{|x-1|}$

Решение уравнений и неравенств с использованием свойств модуля

При решении неравенств с модулем иногда можно достичь цели быстрее, применяя свойства модуля числа. Укажем на некоторые свойства модуля.

Пусть a и $b -$ действительные числа, $f(x)$ и $g(x) -$ некоторые функции.

1. $(|a+b|<|a|+|b| \Leftrightarrow (ab>0)$.
2. $(|f(x)+g(x)|<|f(x)|+|g(x)| \Leftrightarrow (f(x)g(x)<0)$.
3. Для любого положительного действительного числа a имеет место неравенство

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

4. $|f(x)|+\frac{1}{|f(x)} \geq 2$, где $f(x) \neq 0$ при любом x из области определения этой функции.

Решениями неравенства вида $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\cdots+|f_n(x)|=0$ является все действительные числа x из области определения неравенства, за исключением тех значений x, которые являются решениями системы уравнений.

Пример 2.4.5. Определим решения неравенства:

$$|x-1|+\left|\frac{1-x^2}{x-3}\right|>0.$$

Решение. Область определения неравенства $(-\infty;3) \cup (3;+\infty)$. Для нахождения множества решений данного неравенства надо из области его определения исключить все решения систем

$$\begin{cases} x-1=0, \\ \dfrac{1-x^2}{x-3}=0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x=1$.

Ответ: $(-\infty;1) \cup (1;3) \cup (3;+\infty)$.

Пример 25. Определим решения неравенства:

$$|\sin^3 x+\sin^2 x|+\sqrt{\left(\frac{\pi^2-x^2}{x^2+3}\right)^2}>0.$$

Решение. Область определения неравенства – множество $R -$ всех действительных чисел. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|\sin^3 x+\sin^2 x|+\left|\frac{\pi^2-x^2}{x^2+3}\right|>0.$$

Для нахождения множества решений данного неравенства надо из области его определения исключить все решения системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^2 - x^2}{x^2 + 3} = 0, \\ \sin^3 x - \sin^2 x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi, \\ x = -\pi, \end{array}\right. \\ \sin^3 x - \sin^2 x = 0. \end{cases}$$

т.е. $x = \pi$ и $x = -\pi$.

Следовательно, решение исходного неравенства являются все действительные числа, кроме $x = \pi$ и $x = -\pi$.

Ответ: $(-\infty; -\pi) \cup \left(-\pi; \pi\right) \cup (\pi; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 2.4.3. *Определить решения неравенств:*

1. $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| > |2x^2 - 5|$
2. $|2x^2 - 5x + 2| + \frac{1}{|2x^2 - 5x + 2|} < 2$

Задание 2.4.4. *Определить решения неравенств:*

1. $\frac{|2x-3|(x+2)}{x|x+4|} \leq 0$
2. $\frac{|x-4|(5-3x)}{|2x-3)(3-x)} \geq 0$

Задание 2.4.5. *Определить решения неравенств:*

1. $\sqrt{1 - 6x - 9x^2} < \frac{x^2-4x-5}{x+1}$;
2. $\sqrt{x^2 + 4x + 4} > \frac{x^2-x-6}{x-3}$;
3. $\sqrt{x^2 - \frac{4x^2}{|x|} + \frac{1}{\sin^2 30°}} < 2\cos^2 30°$.

ОТВЕТЫ

1.2. Метод промежутков

Задание 1.2.1:

1. $\{-8; -2; 8\}$; 2. $\{-4\} \cup [-1; 0]$; 3. $\{-1\}$; 4. $\left\{-2\sqrt{3}; \sqrt{19} - 1\right\}$; 5. $\{-3\}$; 6. $\{3\}$.

Задание 1.2.2:

1. $\{\frac{13-\sqrt{17}}{2}\}$; 2. $\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{25+\sqrt{37}}{6}\}$; 3. $\{-4,5; -\frac{3}{2} + \sqrt{2}\}$.

1.3. Метод равносильных переходов

Задание 1.3.1:

1. $\{-4; 6\}$; 2. $\{1,5\}$; 3. $\emptyset$; 4. $\{-3; 1\}$; 5. $\emptyset$; 6.$\{-4; 2\}$.

Задание 1.3.2:

1. $\left\{\frac{5}{6}; 2\frac{1}{5}\right\}$; 2. $\{0; 2\}$.

Задание 1.3.4:

1. $\{0, 5\}$; 2. $\left\{-5\frac{1}{2}; -1\frac{3}{4}\right\}$; 3. $\{1; 5\}$; 4. $\{-2; 1; 0\}$; 5. $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Задание 1.3.5

1. $\{-3\}$; 2. $\emptyset$.

Задание 1.3.6

1. $\{-0,25; 1,5\}$; 2. $\{3\}$; 3. $\{1\}$; 4. $\left\{-2\sqrt{2};\ -2\right\}$; 5. $\left\{\frac{7}{12}\right\}$; 6. $\{-2; 4; \frac{\sqrt{331}-2}{7}\}$.

Задание 1.3.7:

1. $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$; 2. $[2; 6]$; 3. $[-0,5; 2)$; 4. $(-\infty; -1) \cup [0; 1)$; 5. $(-\infty; ; 2] \cup [3; +\infty)$; 6. $[1; 2]$.

Задание 1.3.8:

1. $\left\{\frac{1}{6}; 0,5; 1,5\right\}$; 2. $\{-2; 2\}$.

1.4. Метод введения новой переменной. Метод разложения левой части на множители

Задание 1.4.1

1. $\{\pm1;\ \pm2\}$; 2. $\{-5; 1\}$; 3. $\{0; 5\}$; 4. $[-3;\ -2] \cup [2; 3]$; 5. $\left\{-2 -\ \sqrt{5}; \sqrt{5}\right\}$; 6. $\{-1; 1\}$; 7. $\{0;\ \pm2;\ \pm4\}$; 8. $\left\{-3; 5;\ \frac{1\pm\sqrt{73}}{4}\right\}$; 9. $\{0\}$.

Задание 1.4.2

1. $\{-1;\ 0; 1\}$; 2. $\{0,2; 0,4; 0,6\}$; 3. $\{-1\}$; 4. $\{1; 2\}$; 5. $\{-2;\ -1; 4\}$.

1.5. Нестандартные методы решения уравнений с модулями

Задание 1.5.1

1. $\{1\}$; 2. $\left\{-\sqrt{5}; 2\right\}$.

Задание 1.5.5

1. $\{4\}$; 2. $\{3\}$; 3. $\{3\}$; 4. $\{-\frac{4}{7}; 1\}$.

Задание 1.5.6

1. $[8;+\infty)$; 2. $(-\infty;5]$; 3. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 4. $\{2;3\}$; 5. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Задание 1.5.7

1. $\{-2\}$; 2. $\emptyset$; 3. $\{3\}$; 4. $\left\{\frac{5}{4}\right\}$; 5. $\{-1;2+\sqrt{3}\}$; 6. $\{1;\sqrt{3}\}$; 7. $\emptyset$; 8. $\{6\}$; 9. $\{-1\}$; 10. $(1;4]$.

2.2 Метод равносильных переходов

Задание 2.2.2:

1. $(-\infty;-5)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$; 2. $\{2\}$; 3. Нет решений.

Задание 2.2.8

1. $(1;3)$; 2. $[-3;0]$; 3. $(-\infty;1)\cup(1{,}5;+\infty)$; 4. $(-\infty;1)\cup[1{,}5;+\infty)$; 5. Нет решений; 6. $[1{,}5;\ +\infty)$; 7. $(-\infty;\ 1{,}5]$; 8. R.

Задание 2.2.9

1. $(2;5))$; 2. $(2;5)$; 3. $(-\infty;0{,}5]\cup[2;+\infty)$;

4. $(-\infty;3)\cup\left(1-\sqrt{6};+\infty\right)$; 5. $\left(5;3+2\sqrt{2}\right)$;

6. $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задание 2.2.10

1. $(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$; 2. $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; 3. $(-\infty;-13)\cup(-5;1)$; 4. Нет решений.

Задание 2.2.11

1. $[1;+\infty)$; 2. Нет решений; 3. $(-\infty;2)\cup[1;+\infty)$; 4. Нет решений; 5. $(-\infty;2)$; 6. R; 7. $(2;1)$; 8. $(-\infty;-2)\cup(-2;\ +\infty)$.

Задание 2.2.12

1. $(0;+\infty)$; 2. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

2.3 Метод введения новой переменной. Метод разложения левой части на множители.

Задание 2.3.1

1. $(-\infty;-8)\cup(-2;2)\cup(8;+\infty)$; 2. $(-3;-2)\cup(2;3)$; 3. Нет решений; 4. $(-1;0)\cup(0;1)$; 5. $(-\infty;-10)\cup(0;+\infty)$; 6. $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right)\cup\left(\frac{2}{5};+\infty\right)$; 7. $\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$.

Задание 2.3.2

1. $(-\infty;-9)\cup(9;+\infty)$; 2. $(-\infty;-2)\cup(3;4)$; 3. $\{-1\}\cup[1;2]$; 4. $(0;1)\cup(2;5)$.

2.4 Нестандартные методы решения неравенств с модулями

Задание 2.4.5

1. Нет решений; 2. $(-\infty;-2)$; 3. $(-3{,}5;-0{,}5)\cup(0{,}5;3{,}5)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананченко, К.О. Технология модульного обобщающего повторения темы «Уравнения и неравенства с модулями» / К.О. Ананченко, М.В. Касперко. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 1999. – 103 с.
2. Ананченко, К.О. Алгебра. Учебник для 8 класса общеобразовательной школы с углубленным изучением математики / К.О. Ананченко, Н.Т. Воробьев, Г.Н. Петровский, О.И. Тавгень. – Минск: Народная асвета, 1997. – 525 с.
3. Ананченко, К.О. Алгебра. Учебник для 9 класса общеобразовательных школы с углубленным изучением математики / К.О. Ананченко, Н.Т. Воробьев, Г.Н. Петровский. – Минск: Народная асвета, 1995. – 447 с.
4. Фельдман, Я.С. Математика. Решение задач с модулями / Я.С. Фельдман, А.Я. Жаржевский / – Санкт-Петербург: Оракул, 1997. – 304 с.
5. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс/ А.Г.Мордкович. – М.: Мнемозина, 2006. – 223 с.
6. Севрюков, П.Ф. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения/ П.Ф. Севрюков, А.Н.Смоляков.- М. : Илекса, Народное образование ; Ставрополь : Сервисшкола, 2005. – 112 с.
7. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства/ В.В. Вавилов, И.И. Мельников. - М.: Наука, 1987. – 240 с.
8. Арефьева, И.Г. Алгебра: учебн. пособие для 7 класса общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / И.Г. Фрефьева, О.Н. Пирютко. – М.: Народная асвета, 2017. – 316 с.
9. Арефьева, И.Г. Алгебра: учебн. пособие для 8 класса общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / И.Г. Фрефьева, О.Н. Пирютко. – М.: Народная асвета, 2018. – 226 с.
10. Кузнецова, Е.П. Алгебра: учебн. пособие для 9 класса общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова, Г.Л. Муравьева, Л.Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин. – М.: Народная асвета, 2014. – 289 с.

Учебное издание

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Методические рекомендации

Составители:
УСТИМЕНКО Владимир Викторович
КАРАУЛОВА Татьяна Борисовна
РЕЗНЕР Владислав Олегович

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Компьютерный дизайн *А.В. Табанюхова*

Подписано в печать 20.06.2024. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.-изд. л. 1,02. Тираж 9 экз. Заказ 84.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.