Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

М.Н. Подоксёнов

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2024

УДК 517.53(076.5)
ББК 22.161.55я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 2 от 20.12.2023.

Автор: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксёнов**

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры математики и компьютерной безопасности
Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой,
кандидат физико-математических наук, доцент *А.А. Козлов*

Подоксёнов, М.Н.

П44 Теория функций комплексного переменного : методические рекомендации / М.Н. Подоксёнов. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2024. – 32 с.

Данное издание подготовлено в соответствии с типовыми учебными программами по дисциплинам «Теория функций комплексного переменного», «Теория функций» для студентов факультета МиИТ, обучающихся по специальностям: «Прикладная математика», «Прикладная информатика», «Физика». Излагается теоретический материал, приведены примеры решения задач, задания для практических занятий и самостоятельной работы.

УДК 517.53(076.5)
ББК 22.161.55я73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное методическое издание предназначено для студентов ФМиИТ, изучающих предмет «Теория функций комплексного переменного». Оно содержит разделы, посвященные операциям над комплексными числами, их изображению на плоскости и на сфере, понятию аналитической функции и основным функциям комплексного переменного.

Включает в себя теоретический материал и задания, предназначенные для решения на практических занятиях и самостоятельного решения. При изложении теоретического материала сложные доказательства опускаются.

Каждая тема для практических занятий начинается с контрольных вопросов. При подготовке к занятиям студенты должны проверить себя, знают ли они ответы на предложенные вопросы.

Примеры некоторых задач взяты из учебного пособия М.Л. Краснова, А.И. Киселёва, Г.И. Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОЖЕСТВА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1.1. Комплексные числа. Операции над ними

Определение. Число $i=\sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*. Таким образом, $i^2=1$.

Определение. *Комплексным числом* называется формальное алгебраическое выражение вида $z=x+iy$, где $x,y\in\boldsymbol{R}$. Число x называется действительной частью, число y – мнимой частью. Пишем: $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$. Совокупность всех комплексных чисел обозначается $\boldsymbol{C}$.

Пусть имеем два числа: $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Тогда их сумма, разность и произведение определяется так:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i,\quad z_1-z_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i,$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1y_2i+x_2y_1i+y_1y_2i^2=$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Определение. Число $\overline{z}=x-iy$ называется *сопряжённым* (*комплексно сопряжённым*) к числу $z=x+iy$.

Заметим, что $\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=x=\operatorname{Re}z$, $\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})=y=\operatorname{Im}z$. Теперь умножим:

$$z\cdot\overline{z}=(x+iy)\cdot(x-iy)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2.$$

Получилось действительное число. Это позволяет совершить деление:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{(x_2)^2+(y_2)^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{(x_2)^2+(y_2)^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{(x_2)^2+(y_2)^2}\,i.$$

Итак, для того чтобы совершить деление, мы числитель и знаменатель дроби домножаем на число, сопряжённое к знаменателю. Тогда в знаменателе получится действительное число.

Комплексные числа принято изображать точками на плоскости с декартовой системой координат. Число $z=x+iy$ изображается точкой с координатами (x,y). Тогда $\overline{z}$ изображается точкой с координатами $(x,-y)$, симметричной относительно Ox (рисунок 1.1). Будем говорить, что z – это и есть точка с координатами (x,y). Действительные числа изображаются точками на оси Ox, а числа вида iy называются *чисто мнимыми*, и изображаются на оси Oy.

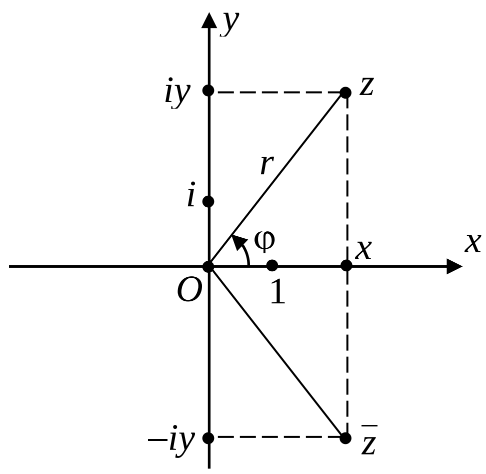

рис. 1.1

Сопоставим каждому комплексному числу вектор, который является радиус-вектором точки, изображающей это число. Тогда сумме или разности чисел будет соответствовать сумма или разность векторов (рисунок 1.2).

Пусть теперь на плоскости задана ещё полярная система координат, у которой полярная ось сонаправлена с Ox. Пусть (r, φ) – полярные координаты точки z. Тогда r называется модулем комплексного числа z, а φ – его аргументом (рисунок 1.1). Обозначаем $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Из векторного представления разности комплексных чисел вытекает геометрический смысл модуля разности: $|z_1 - z_2|$ – *это есть расстояние между точками* z_1 *и* z_2, *изображающими числа на плоскости*. Поэтому, множество, состоящее из всех точек z, для которых выполняется $|z - z_0| < \varepsilon$ (z_0 – фиксированная точка) – это есть круг с центром z_0 и радиусом ε. Обозначим его $U_{z_0}^{\varepsilon}$ и будем называть ε-окрестностью точки z_0 (рисунок 1.3).

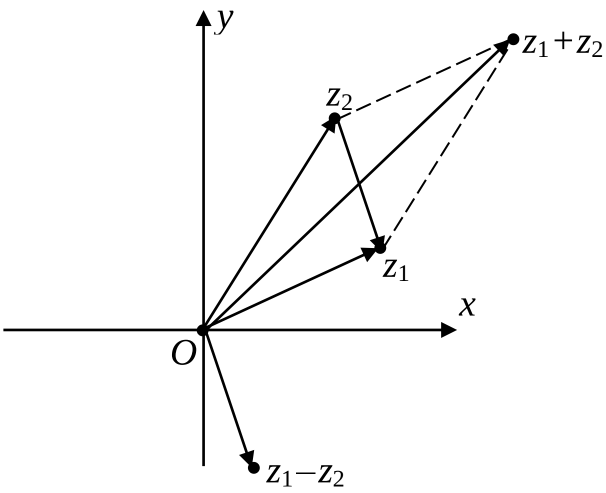

рис. 1.2

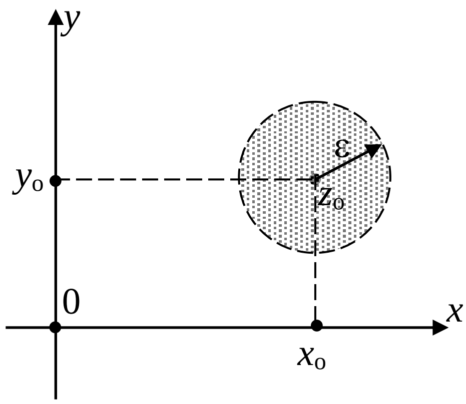

рис. 1.3

1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть $z = x + iy$, а r и φ – модуль и аргумент этого числа. В соответствии с формулами перехода от полярных координат к декартовым $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Значит

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение. Эта запись называется <u>*тригонометрической формой комплексного числа*</u>, а запись $z = x + iy$ называется <u>*алгебраической формой*</u>. Очевидно (рисунок 1.1), что

$$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) - i\sin(-\varphi)).$$

По договоренности, считается что $0 \le \varphi < \pi$ или $-\pi < z \le \pi$. Очевидно, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z \cdot \overline{z} = r^2$. Для нахождения аргумента можно воспользоваться двумя формулами вместе: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\cos\varphi = \frac{y}{r}$.

Можно также использовать формулы

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi,\ x<0,\ y\geq 0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi,\ x>0,\ y<0\end{cases}$$

Если мы позволим аргументу комплексного числа принимать произвольные действительные значения, то получим многозначное выражение

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Пусть имеем два комплексных числа в тригонометрической форме: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Тогда легко доказать, что

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножаются, а аргументы складываются*. Поскольку деление есть операция обратная умножению, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Из правила умножения вытекает:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

1.3. Корни и дробные степени

Определение. Число ω называется корнем n-ой степени из комплексного числа z, если $\omega=z^n$.

Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\omega=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. Тогда имеем равенство

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\quad\Rightarrow$$

$$\rho^n=r,\ n\theta=\varphi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\quad\Rightarrow\quad \rho=\sqrt[n]{r},\ \ \theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\ \ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Будем использовать для действительного корня из действительного числа обозначение $\underset{+}{\sqrt[n]{r}}$. Тогда имеем формулу

$$\omega_k=\underset{+}{\sqrt[n]{r}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \ k\in\boldsymbol{Z}.$$

При $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ мы получаем n различных значений $\omega_0,\ldots,\ \omega_{n-1}$, а при $k=n$, то получим, что $\omega_n=\omega_0$. Аналогично, $\omega_{n+1}=\omega_1$ … и т.д. Тем самым, каждое комплексное число (в том числе и действительное), кроме нуля, имеет ровно n различных корней n-ой степени.

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Приведём число i к тригонометрической форме:

$$i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда общая формула для всех корней:

$$\omega_k = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi/2+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/2+2\pi k}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right),\ \ k=0,1,2.$$

Получаем три различных корня: $\omega_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\omega_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $\omega_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -i$.

Эти корни расположены на окружности радиуса 1 и делят ее на 3 равные части (рисунок 1.4). Аналогично, все корни n-ой степени из произвольного комплексного числа расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}_{+}$ и делят ее на n равных частей (т.е. являются вершинами правильного n-угольника).

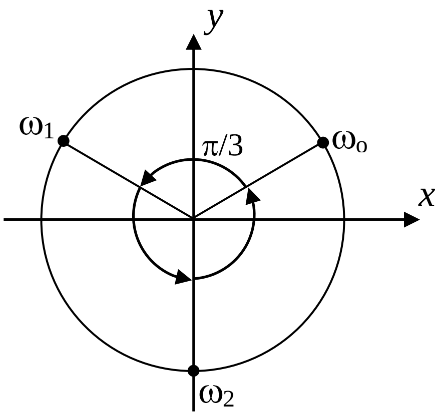

рис. 1.4

Рациональное число – это число вида $\frac{p}{q}$, $p\in\boldsymbol{Z}$, $q\in\boldsymbol{N}$. Если каждое из значений $\sqrt[q]{z}$ возвести в степень p, то получим множество из q чисел, среди которых могут быть одинаковые. Все они содержатся в формуле

$$(\sqrt[q]{z})^p = \sqrt[q]{|z|^p}_{+}\left(\cos p\frac{\alpha+2\pi k}{q} + i\sin p\frac{\alpha+2\pi k}{q}\right),\ k = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Если p и q – взаимно простые числа, то эта формула даст ровно q корней (при $z\neq 0$). Обозначим $z^{\frac{p}{q}}$ – множество всех значений $(\sqrt[q]{z})^p$. Все эти числа расположены на окружности радиуса $\sqrt[q]{|z|^p}_{+}$ и делят ее q на равных частей.

Пример. Для $z = 1$ имеем $\alpha = 0$. Все значения $1^{\frac{2}{3}}$ находятся по формуле

$$\cos\left(\frac{2}{3}\cdot 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\cdot 2\pi k\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Имеем три значения: 1, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1.4. Стереографическая проекция

Добавим к комплексной плоскости ещё одну точку, которую будем обозначать символом ∞. Для числа ∞ понятие аргумента лишено смысла, а $|\infty| = +\infty$. <u>*Окрестностью точки*</u> ∞ называется множество точек U_∞^R, которое удовлетворяет условию $|z|>R$ (рисунок 1.5).

Мы считаем, что последовательность точек $\{z_n\}$ сходится к числу ∞, если $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

x

Введем операции для числа ∞. Пусть $z \neq \infty$ – любое число. Тогда

$$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$\infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty\ \ (z \neq 0),$$
$$\frac{\infty}{z} = \infty,\ \frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{z}{0} = \infty.$$

Следующие операции считаются лишенными смысла: $\infty \pm \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty$.

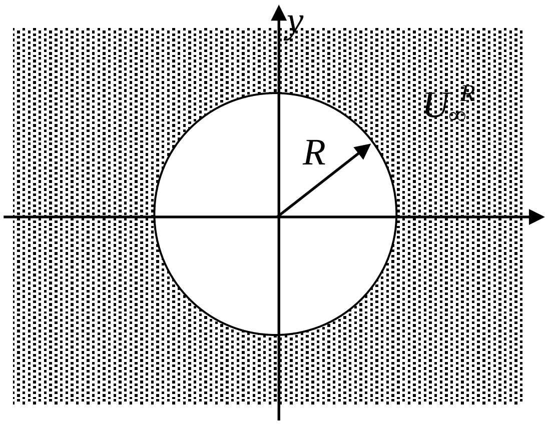

рис. 1.5

Поместим комплексную плоскость в трёхмерное пространство.

Пусть O – начало координат на плоскости, т.е. точка, изображающая число 0. Рассмотрим сферу радиуса 1 с центром в точке O. Она пересекает плоскость по единичной окружности ω, которую назовем экватором (рисунок 1.6). Концы диаметра NS сферы, перпендикулярного плоскости, назовем полюсами.

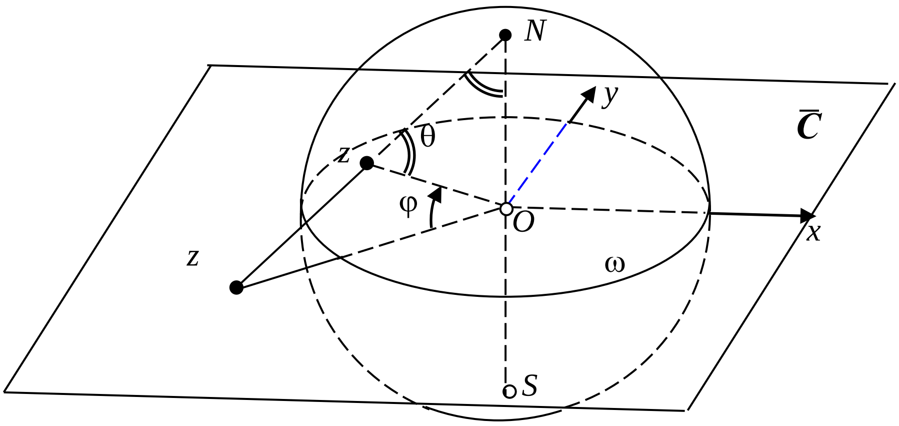

*рис.*1.6

Введем на сфере географические координаты. Обозначим широту φ, и будем ее отсчитывать от плоскости экватора: к северному полюсу со знаком «+», к южному – со знаком «–». Тогда $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Долготу ψ будем отсчитывать от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, если смотреть из точки N, так что $-\pi < \psi \leq \pi$.

Пусть z – произвольное комплексное число (точка на комплексной плоскости). Соединим её отрезком с точкой N. Точку пересечения отрезка со сферой будем считать изображением точки z, и будем обозначать той же буквой. Обратное отображение сферы на плоскость называется стереографической проекцией. Оно используется в астрономии и географии.

Точке N при стереографической проекции не соответствует ни одна точка плоскости. Будем считать, что ей соответствует точка ∞ расширенной плоскости. Северной полусфере соответствует внешняя область единичного круга: $|z|>1$, а южной полусфере – внутренность круга: $|z|<1$.

Пусть на плоскости $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. Тогда можно вычислить, что на сфере этому числу соответствует точка с координатами

$$\varphi=2\operatorname{arctg} r-\frac{\pi}{2},\ \psi=\alpha.$$

Пусть для последовательности $\{z_n\}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\lim\limits_{n\to\infty} r_n=+\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\lim_{n\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} r_n-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, точки на сфере, изображающие $\{z_n\}$, действительно приближаются с северному полюсу. Поэтому естественно рассматривать эту точку как изображение числа ∞. Кроме того, окрестность U_∞^R изображается на сфере околополярной областью $\varphi>2\operatorname{arctg} R-\frac{\pi}{2}$, и при $\varepsilon\to\infty$ эта окрестность стягивается к N. Южный полюс S изображает число 0.

Рассмотрим отображение сферы на себя, при котором точка с координатами (φ,ψ) переходит в точку с координатами $(-\varphi,\psi)$. Тогда северная полусфера перейдет в южную. Этому отображению соответствует взаимно однозначное отображение расширенной комплексной плоскости на себя, при котором внутренность единичного круга переходит во внешность, и наоборот. Все точки единичной окружности ω остаются на месте.

Можно вычислить, что точка z переходит в точку $z'=\dfrac{1}{\bar{z}}$. Это преобразование можно рассматривать, как симметрию относительно единичной окружности, и оно называется <u>*инверсией*</u> относительно этой окружности. Точка z' лежит на одном луче, исходящем из начала координат, с точкой z, так что $|z|\cdot|z'|=1$. Из определения вытекает свойство взаимности инверсии: если точка z переходит в точку z', то z' переходит в z. Точки единичной окружности остаются под действием инверсии на месте.

Построение инверсной точки геометрически показано на рисунке 1.7. Если z лежит вне окружности, то мы проводим касательные к окружности, соединяем точки касания, и z' лежит на пересечении хорды с лучом Oz.

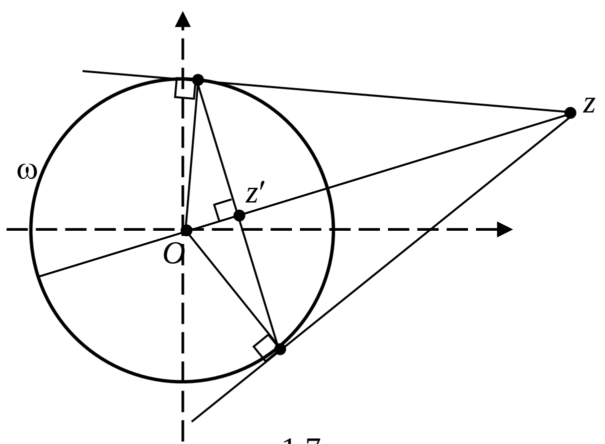

рис. 1.7

Упражнение. Опишите ход построения инверсной точки z', если z лежит внутри окружности.

1.5. Множества точек на плоскости

Определение. Точка z_0 называется *внутренней точкой* множества V, если она входит в это множество вместе и некоторой, содержащей ее окрестностью $U_{z_0}^{\varepsilon}$.

Например, для множества G: $\operatorname{Im} z > 0$ (верхняя полуплоскость) точка i является внутренней. Она входит в G вместе с окрестностью $U_i^{0,5}$ (рисунок 1.8). Отрезок, который соединяет точку i с началом координат не имеет внутренних точек.

Определение. Множество V называется *отрытым*, если оно состоит только из внутренних точек. Вся плоскость и $\varnothing$ считаются открытыми.

Например, множество $U_i^{0,5}$ является открытым. *Кольцо*, которое определяется двойным неравенством $r < |z-a| < R$ является отрытым (рисунок 1.9).

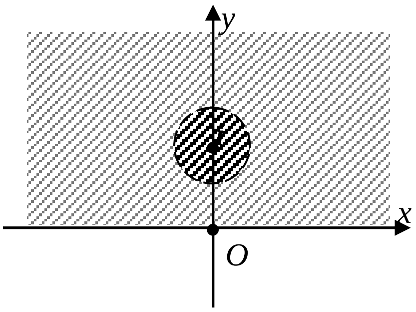

рис. 1.8

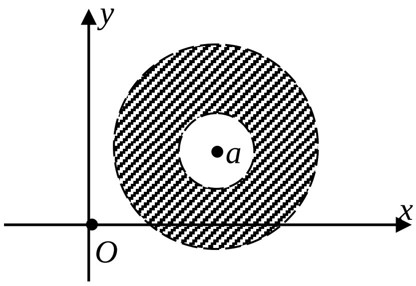

рис. 1.9

Теорема. Объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество. Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Определение. Открытое множество V называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в V. Открытое связное множество называется областью.

Например, круг и кольцо, изображенные на рисунках 1.8 и 1.9, являются областями. Множество, состоящее из двух кругов, определяемых неравенствами $|z-i| < 1$ и $|z+i| < 1$, (рисунок 1.10) не является связным.

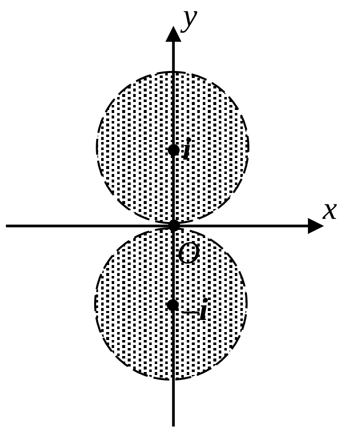

*рис.*1.10

Определение. Точка z_0 называется *предельной точкой* множества W, если любая её окрестность содержит точки множества W, отличные от самой точки z_0. Множество, которое содержит все свои предельные точки, называется *замкнутым*.

Совокупность всех предельных точек открытого множества называется его *границей*.

Например, для $U_{z_0}^{\varepsilon}$ граничные точки образуют окружность радиуса ε. Для плоскости с выколотым началом координат граница состоит из одной точки O. Граница кольца состоит из двух окружностей.

Определение. Множество, которое состоит из всех точек самого множества W и всех его граничных точек, называется *замыканием* множества W и обозначается $\overline{W}$. Замыкание области называется замкнутой областью.

Например, замкнутый круг $\overline{U}_{z_0}^{\varepsilon}$ задается неравенством $|z-z_0|\le\varepsilon$. Замкнутое кольцо задается неравенствами $r\le|z-a|\le R$.

Определение. Множество W называется ограниченным, если его можно поместить в круг достаточно большого радиуса, т.е. найдется такое R, что $W\subseteq U_0^R$.

Пример неограниченного множества: верхняя полуплоскость: $\operatorname{Im} z > 0$.

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. Определение функции

Понятие функции в математическом анализе, или отображения в геометрии и топологии предполагает, что они являются однозначными: каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции. Мы встретились с примерами функций $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$, $n = 2, 3, \ldots$ где каждому значению аргумента соответствуют несколько значений функции.

Определение. Пусть G – множество комплексной плоскости, и каждому $z\in G$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на G *определена функция комплексного переменного* (ФКП). Пишем $w = f(z)$. Если каждому z соответствует только одно значение w, то функция называется *однозначной*. Если хотя бы некоторым значениям z соответствует более одного значения w, то функция называется многозначной.

Примеры однозначных функций: $w = z^2$, $w = \operatorname{Re} z$.

Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда фраза «на множестве G определена функция $w = f(z)$» эквивалентна «каждой точке из G с координатами (x, y) поставлена в соответствие пара действительных чисел (u, v)»; т.е. определены две действительные функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Пример. Поскольку $(x+iy)^2 = (x^2+y^2)+2ixy$, то соотношение $w = z^2$ равносильно двум равенствам: $u = x^2+y^2$, $v = 2xy$.

График ФКП представляет собой двумерную поверхность в четырехмерном пространстве с координатами (x, y, u, v). Представить её наглядно трудно.

Рассмотрим множество значений функции: $E = \{w = f(z)\,|\,z\in G\}$. Его можно назвать образом множества G при отображении $f: G \to \boldsymbol{C}$. Точка $z\in G$ называется *прообразом точки* $w\in E$, если $w=f(z)$. Даже у однозначного отображения может быть несколько прообразов. Если каждому $w \in E$ поставить в соответствие множество всех его прообразов, то на множестве E получится функция $z = f^{-1}(w)$, которая может быть многозначной. Она называется обратной к функции $w = f(z)$.

Пример. Функция $w = z^2$ является однозначной и определена на всей плоскости. Она отображает плоскость на всю плоскость. Любое $w \neq 0$ является образом двух точек z, а $w = 0$ является образом единственной точки $z = 0$. Обратная функция $z = \sqrt{w}$ является двузначной.

Если ограничить прямую функцию на верхнюю полуплоскость $G_1 : \operatorname{Im} z > 0$, то она будет отображать взаимно однозначно эту полуплоскость на множество E_1: всю плоскость, из которой удален один луч – положительное направление оси Ox. Соответственно, обратная функция будет отображать плоскость без луча однозначно на верхнюю полуплоскость.

Прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ образуют координатную сеть на плоскости. Другую координатную сеть образуют линии $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Один из способов наглядно представить действие отображения – это посмотреть, как при его действии деформируется координатная сеть. На рисунке 2.1 показано, что происходит с координатной сетью при отображении $w = z^2$.

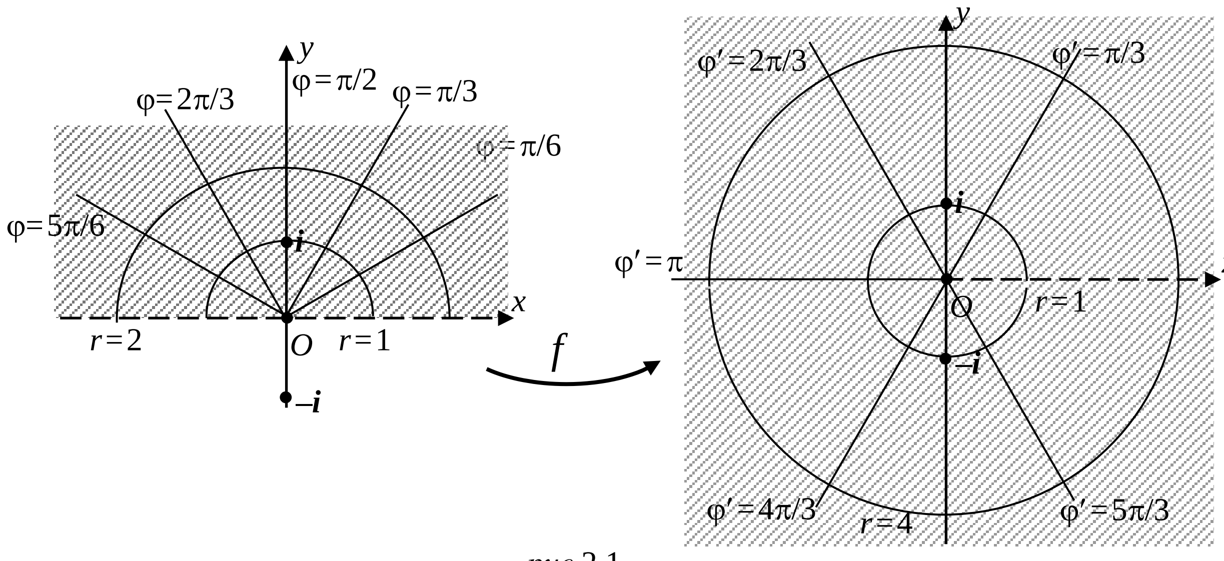

*рис.*2.1

Покажем, как найти, в какую линию переходит, например, прямая $x = 1$ ($\operatorname{Re} z = 1$). Любая точка этой прямой – это $z = 1 + iy$. Поэтому ее параметрическое задание есть $z = 1 + it$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Тогда

$$w = (1 + it)^2 = (1 - t^2) + 2ti. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = 1 - t^2, \\ v = 2t. \end{cases} \Leftrightarrow \ u = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

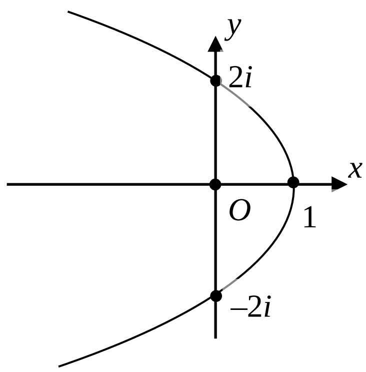

*рис.*2.2

Это уравнение задает параболу с вершиной в точке $z=1$, обращенную в отрицательную часть действительной оси (рисунок 2.2). В процессе изменения параметра t от $-\infty$ до $+\infty$ точка с координатами $(1-t^2, 2t)$ пробегает параболу ровно один раз. Поэтому отображение прямой $\operatorname{Re} z = 1$ на параболу является взаимно однозначным.

2.2. Предел функции

Определение. Пусть функция $w=f(z)$ определена в окрестности точки z_0, кроме, может быть, самой точки z_0. Говорим, что предел функции $f(z)$ при $z\to z_0$ равен комплексному числу A, если $\forall$ ε-окрестности точки A найдется такое число δ, что $\forall z\in U_{z_0}^{\delta}$ выполнено $f(z)\in U_A^{\varepsilon}$.

Это определение можно применять и в случае $A=\infty$, если U_∞^{ε} определяется, как и раньше. Тогда равенство $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \iff \lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$.

***Предложение* 1.** Пусть $A=a+bi$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$. Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ равносильно двум действительным равенствам:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

В силу этого, некоторые свойства пределов ФДП переносятся на пределы ФКП.

***Предложение* 2.** Пусть $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, тогда

1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\pm g(z))=A\pm B$; 2) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z))=A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)/g(z))=A/B,\ B\neq 0$.

Если вспомнить операции с числом ∞, то требование $B\neq 0$ в свойстве 3 можно опустить, но только при $A\neq 0$.

Определение. Пусть функция $w=f(z)$ определена в окрестности точки z_0, в том числе и в самой точке z_0. Говорим, что эта функция непрерывна в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Будем говорить, что функция $w=f(z)$ обобщенно-непрерывна в точке z_0, где $f(z_0)=\infty$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Это определение можно расширить и на случай $z_0=\infty$.

Из предложения 1 следует, что непрерывность $w=f(z)$ точке z_0 равносильна непрерывности двух действительных функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ в точке (x_0,y_0). Поэтому ряд свойств непрерывных ФДП переносятся на непрерывные ФКП.

***Предложение* 3.** Сумма, разность и произведение двух непрерывных функций, являются непрерывными функциями. Это же верно для частного функций, при условии, что знаменатель не обращается в ноль.

***Предложение* 4.** Пусть функция $s=\varphi(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $w=f(s)$ непрерывна в точке $w_0=f(s_0)$. Тогда сложная функция $w=f(\varphi(z))$ непрерывна в точке z_0.

Примеры. **1.** Функции $u = x^2 - y^2$ и $v = 2xy$ непрерывны на всей действительной плоскости. Поэтому функция $w = z^2$ является непрерывной на всей комплексной плоскости.

2. Функция $\alpha = \arg z$ является однозначной и определена для всех значений z, кроме $z = 0$. Очевидно, что она терпит разрыв в отрицательной части оси Ox: при приближении к ней с одной стороны $\arg z \to \pi$, а с другой стороны $\arg z \to -\pi$.

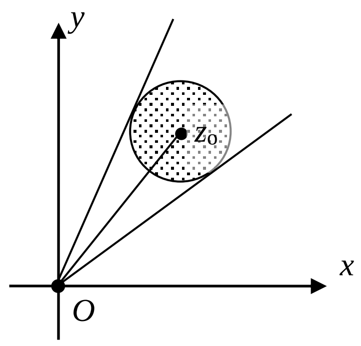

*рис.*2.3

Покажем, что эта функция непрерывна в остальных точках. Пусть z_0 – любая точка. Выберем $\varepsilon > 0$. Проведем луч Oz_0. Отложим от него в обе стороны равные углы величины $\varphi < \varepsilon$, причем так, чтобы отрицательная часть действительной оси не попадала в этот угол. Построим окрестность $U_{z_0}^{\delta}$, которая целиком попадает в этот угол (рисунок 2.3). Тогда $\forall\, z \in U_{z_0}^{\delta}$ выполнено $|\arg z - \arg z_0| < \varepsilon$.

Свойства непрерывных функций не переносятся автоматически на обобщенно-непрерывные.

Пример **3.** Функция $w = 1/z$ является обобщенно-непрерывной.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty = f(0), \ \lim_{z \to \infty} f(z) = 0 = f(\infty).$$

2.3. Односвязная область

Теорема Жордана. *Любая простая замкнутая линия Γ разделяет плоскость на две области. Одна из них ограничена и называется внутренней областью, а вторая – не ограничена и называется внешней.*

Будем обозначать внешнюю и внутреннюю области $I(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$.

Определение. Пусть G – область на плоскости. Если для любой жордановой кривой Γ, принадлежащей G, $I(\Gamma) \subseteq G$, то область называется односвязной.

Пример. Открытый круг является односвязной областью, а кольцо – нет.

На сфере нет различия между внутренней и внешней областями. Однако, мы можем назвать внешней ту область, которая содержит северный полюс, т.е. точку, изображающую число ∞. Внешность круга на плоскости не является односвязной областью, но если отобразить расширенную плоскость на сферу, то образом этого множества будет односвязное множество.

Определение. Область G на расширенной плоскости называется односвязной, если для любой жордановой кривой Γ, принадлежащей G, либо $I(\Gamma) \subseteq G$, либо $E(\Gamma) \subseteq G$.

2.4. Производная и дифференциал

Определение. Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0, в том числе и в самой точке z_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то он называется производной от этой функции в точке z_0, и обозначается $f'(z_0)$. Если производная функции существует в точке z_0, то мы назовем эту функцию дифференцируемой точке z_0.

Пример. Покажем, что функция $w = z|z|$ является дифференцируемой в точке $z_0 = 0$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z|z| - 0}{z} = \lim_{z \to 0} |z| = 0.$$

Значит, $f'(0) = 0$.

Обозначим приращение аргумента и приращение функции: $z - z_0 = \Delta z$, $f(z) - f(z_0) = \Delta f$ или Δw. Тогда дифференцируемость в точке z_0 равносильна

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon \cdot \Delta z,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(z_0, \Delta z)$ есть бесконечно малая функция от Δz. Поэтому приращение функции в точке z_0 может быть записано в виде

$$\Delta w = A \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \Delta z,$$

где A – постоянная в точке z_0, независящая от Δz, $A = f'(z_0)$.

Определение. Выражение $A \cdot \Delta z$ называется дифференциалом функции $w = f(z)$ в точке z_0 и обозначается dw. Также используем обозначение $dz = \Delta z$, т.е. для независимой переменной дифференциал совпадает с ее приращением.

$$\Delta w = dw + \varepsilon \cdot dz.$$

Равенство $dw = f'(z_0)dz$ позволяет использовать обозначение для производной: $f'(z_0) = dw/dz$ или $f'(z_0) = \frac{d}{dz} f$.

Определение. Гомеоморфизмом называется непрерывное взаимно-однозначное отображение, при котором обратное отображение тоже непрерывно.

2.5. Правила и дифференцирования

Поскольку основные свойства пределов из действительного анализа переносятся на комплексный анализ, и определение производной записывается одинаково, то основные правила вычисления производной из действительного анализа тоже переносятся на комплексный.

1. Если $f(z) \equiv C$, то $f'(z) \equiv 0$. 2. $(C \cdot f(z))' = C \cdot f'(z)$;
3. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$; 4. $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;

5. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)}$, если $g(z)\neq 0$;

6. *Правило дифференцирования сложной функции*. Пусть функция $s=\varphi(z)$ дифференцируема в точке z_0, а функция $w=f(s)$ дифференцируема в точке $w_0=f(s_0)$. Тогда сложная функция $w=f(\varphi(z))$ дифференцируема в точке z_0 и

$$(f(\varphi(z)))' = f'(\varphi(z))\cdot\varphi'(z).$$

В частности, $(f(az+b))' = a\cdot f'(az+b)$. В других обозначениях:

$$\frac{df(\varphi(z))}{dz} = \frac{df(s)}{ds}\cdot\frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

7. *Правило дифференцирования обратной функции*. Пусть функция $w=f(z)$ гомеоморфно отображает множество G на множество D и является дифференцируемой в точке $z_0\in G$ и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда обратная функция $z=\varphi(w)$ дифференцируема в точке $w_0=f(z_0)$ и

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

2.6. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости

***Теорема* 2.** Пусть ФКП $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в окрестности точки $z_0=x_0+iy_0$. Для того чтобы она была дифференцируемой в этой точке необходимо и достаточно, чтобы функции ДП $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0,y_0) и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.1)$$

Если все условия выполнены, то производная может быть записана в виде любого из следующих равенств:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.2)$$

Равенства (2.1) называются условиями или уравнениями Коши – Римана.

***Пример* 1.** Проверим выполнение условий (2.1) для функции $w=z^2=(x+yi)^2$. Как мы уже выяснили, $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y.$$

Мы видим, что условия (2.2) выполняются.

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2z.$$

Упражнение. Проверьте, что функция $w=\overline{z}$ не дифференцируема ни в одной точке.

2.7. Аналитическая функция

Определение. Функция называется <u>*аналитической*</u> или в точке z_0, если она дифференцируема в некоторой окрестности $U_{z_0}^{\varepsilon}$ этой точки. Функция аналитическая на всей комплексной плоскости называется <u>*целой*</u>.

Поскольку любая точка $U_{z_0}^{\varepsilon}$ является внутренней для этого множества, то из определения сразу следует, что функция аналитическая в точке z_0 является аналитической в каждой точке окрестности $U_{z_0}^{\varepsilon}$.

***Пример* 1.** Функция $w = z^n$ является целой для любого натурального n. Поэтому целой функцией является любой многочлен.

***Пример* 2.** Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены. Тогда функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ называется <u>*дробно-рациональной*</u>. Согласно правилу дифференцирования дроби, она имеет производную в любой точке, где $Q(z) \neq 0$, т.е. она является аналитической в области, которая получается удалением из комплексной плоскости конечного числа точек (нулей функции $Q(z)$).

***Пример* 3.** Мы ранее вычислили производную функции $w = z|z|$ в точке $z = 0$. Она равна нулю. Проверим выполнение условий (2.1).

$$u = x\sqrt{x^2+y^2},\ v = y\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

Условия выполняются только в одной точке $z = 0$. Вывод: функция не является аналитической ни в одной точке.

***Пример* 3.** Пусть $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Тогда $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$. Обе функции дифференцируемы. Легко проверить, что условия (2.1) выполняются и поэтому функция является аналитической на всей плоскости. Будем для отличия от действительной экспоненты обозначать эту функцию $\exp z$.

$$(\exp z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + e^x i\sin y = \exp z.$$

2.8. Действительная и мнимая части аналитической функции

Пусть $f(z) = u + iv$ аналитична в области D. Примем без доказательства, что из этого следует, что в данной области у нее существуют производные любого порядка, а значит, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ тоже бесконечно дифференцируемые.

Продифференцируем первое из условий (2.1) по x, а второе – по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{2.3}$$

Точно такое же тождество можно получить для функции v. Уравнение вида (2.3) называется уравнением Лапласа. Функции двух переменных, которые удовлетворяют этому уравнению, называются *гармоническими*. Мы доказали следующее предложение.

Предложение. *Для того чтобы функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *могли служить действительно и мнимой частями аналитической функции необходимо, чтобы они были гармоническими.*

Подчеркнем, что условие гармоничности является необходимым, но не достаточным: из него не вытекают условия (2.1).

Определение. Две гармонические функции называются *сопряженными гармоническими*, если они могут служить действительной и мнимой частями одной аналитической функции.

Причем свойство функций быть сопряженными гармоническими взаимное.

***Теорема* 3.** *Любая гармоническая в односвязной области* D *функция может служить действительной или мнимой частью некоторой функции, аналитической в области* D.

Другими словами, если у нас есть одна гармоническая функция $u(x,y)$, определенная в области D, то для нее можно найти сопряженную гармоническую $v(x,y)$, которая тоже будет определена области D. Можно доказать, что $v(x,y)$ является решением уравнения в полных дифференциалах

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

где $P(x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Тогда

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P\,dx + Q\,dy).$$

Причем результат интегрирования не зависит от пути, соединяющего точки (x_0,y_0) и (x,y). Две подходящие функции $v(x,y)$ могут отличаться только на действительную постоянную.

Итак, аналитическая функция определяется своей действительной частью с точностью до чисто мнимой постоянной. Аналогично, она определяется своей мнимой частью с точностью до действительной постоянной.

Пример. Пусть область G – это плоскость без полуоси $y=0,\ x \le 0$. Эта область является односвязной, и функция $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ является гармонической в этой области. Ищем сопряженную функцию. Согласно условиям (2.5) имеем уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = \int\limits_{(1,0)}^{(x,y)} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \right) + C.$$

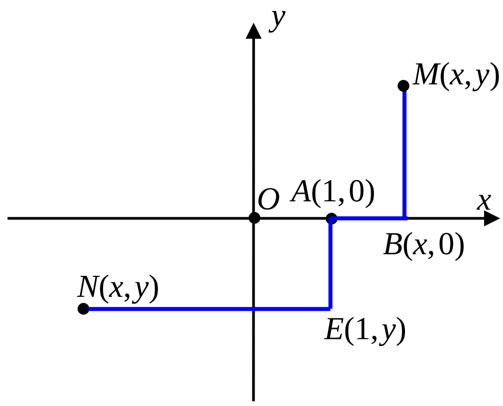

рис. 2.4

Пусть точка $M(x,y)$ лежит в I или IV квадранте (рисунок 2.4). Интегрируем вдоль ломаной ABM. Вдоль отрезка AB имеем $y = 0$ и $dy = 0$. Поэтому интеграл вдоль него = 0. Вдоль отрезка BM имеем $dx = 0$. Получим

$$v(x,y) = \int\limits_0^y \frac{x}{x^2+y^2}\,dy + C = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C.$$

Пусть точка $N(x,y)$ лежит во II или III квадранте. Интегрируем вдоль ломаной AEN. Вдоль отрезка AE имеем $x = 1$ и $dx = 0$, а вдоль отрезка EN имеем $dy = 0$.

$$v(x,y) = \int\limits_0^y \frac{dy}{1+y^2} - \int\limits_1^x \frac{y\,dx}{x^2+y^2} + C = \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + C = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$$

(мы использовали свойство $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$). Тем самым, во всех точках $v(x,y) = \arg z + C$.$\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - i\arg z + iC.$$

Если область является многосвязной, то интеграл для нахождения $v(x,y)$ может оказаться многозначной функцией. Тогда и функция $f(z)$ тоже будет многозначной.

2.9. Линейная и дробно-линейная функции

Простейшей аналитической функцией является линейная:

$$w = az + b,\ a \neq 0. \tag{2.4}$$

Она задает отображение комплексной плоскости на себя. При $a = 1$ оно является параллельным переносом на вектор, задающийся числом b.

Пусть $a \neq 1$. Найдем неподвижную точку этого преобразования, т.е. такую что $z_o = f(z_o)$. Имеем уравнение

$$z_o = az_o + b. \tag{2.4′}$$

Оно имеет единственное решение $z_o = \frac{b}{1-a}$. Значит, наше преобразование имеет одну и только одну неподвижную точку. Вычтем (2.5) – (2.5′):

$$w - z_o = a(z - z_o).$$

Это равенство означает, что вектор $w - z_o$ получается из вектора $z - z_o$ умножением на число a, т.е. получается поворотом на угол $\varphi = \operatorname{Arg} a$ и растяжением (сжатием) с коэффициентом $|a|$ (рисунок 2.5). Такое преобразование является подобием, и поэтому линейное преобразование сохраняет углы.

Определение. Дробно-линейной называется функция, которая задается формулой

$$L(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d – комплексные числа и $c\neq 0$.

Область определения функции есть вся расширенная плоскость, за исключением двух точек $z'=\infty$ и $z''=-d/c$. Пределы функции в этих точках:

$$\lim_{z\to z'}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c},\ \lim_{z\to z''}\frac{az+b}{cz+d}=\infty,$$

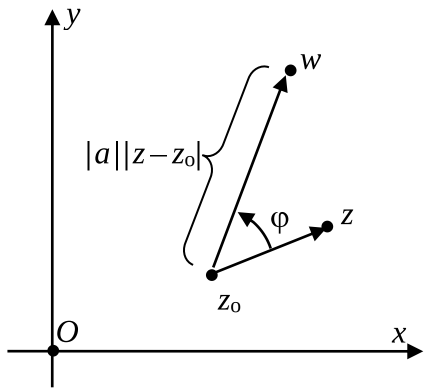

рис. 2.5

Можно убедиться, что $L(z)$ не принимает значений $w'=-d/c$ и $w''=\infty$. Поэтому, если $G=L(D)$ – множество значений функции, то $G\subseteq L(D)$.

Выясним, когда $L(z_1)\neq L(z_2)$ для различных точек $z_1\neq z_2$. Имеем

$$L(z_1)-L(z_2)=\frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}.$$

Значит $L(z_1)\neq L(z_2)$, $\Leftrightarrow$

$$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (2.6)$$

Равенство же нулю этого определителя означает, что числитель и знаменатель в (2.6) пропорциональны, и дробь равна фиксированному числу.

Вывод. $L(z)$ является взаимно-однозначной $\Leftrightarrow$ выполнено (2.6).

Функция $L(z)$ дифференцируема во всех точках из области определения, и поэтому она аналитическая в этой области:

$$L'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Причем, при условии (2.13) $L'(z)\neq 0$.

Доопределим $L(z)$ в точках $z'=\infty$ и $z''=-d/c$:

$$L(z')=\lim_{z\to z'}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c},\ L(z')=\lim_{z\to z''}\frac{az+b}{cz+d}=\infty. \qquad (2.7)$$

Получим взаимно-однозначное отображение $\overline{L}:\overline{\boldsymbol{C}}\to\overline{\boldsymbol{C}}$.

Вывод. Дробно-линейная функция (при условии (2.6)), дополненная условиями (2.7) взаимнооднозначно отображает расширенную комплексную плоскость на себя. Оказывается, что этим свойством не обладает ни одна другая аналитическая функция.

2.10. Показательная функция (экспонента)

Мы уже определили $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Эта функция аналитична на всей плоскости и $(\exp z)'=\exp z$. Если $z=x$, то $\exp z=e^x$.

Свойства.

1) $|\exp z| = e^x$;

2) $\mathrm{Arg}(\exp z) = y + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; другими словами y – это одно из значений аргумента $\exp z$;

3) $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;

4) функция является периодической: $\exp(z + 2\pi ki) = \exp z$.

Показательная функция позволяет просто записать уравнения некоторых кривых в параметрической форме. Например, прямая, проходящая через начало координат и имеющая угол наклона α:

$$z = te^{i\alpha},\ t \in \boldsymbol{R},$$

а луч задается таким же уравнением только $t \in (0, +\infty]$. Произвольная прямая: $z = z_0 + te^{i\alpha},\ t \in \boldsymbol{R}$. Окружность с центром в точке z_0 радиуса R:

$$z = z_0 + Re^{it},\ t \in \boldsymbol{R}.$$

Образом экспоненты является вся плоскость без нуля: $\boldsymbol{C} \backslash \{0\}$. В силу периодичности, она не является взаимно однозначным отображением.

Обратная функция, определена в области $\boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ и задается формулой

$$z = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w.$$

Она является бесконечнозначной и обозначается $\mathrm{Ln}\,w$. Как принято, мы меняем роли z и w, и записываем обратную функцию так: $w = \mathrm{Ln}\,z$. Итак,

$$w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k).$$

Пусть прямая l, параллельна оси Oy. Тогда она имеет параметрическое уравнение $z = a + it,\ a \in \boldsymbol{R}$ – фиксированное, $t \in \boldsymbol{R}$ – переменное (рис. 2.6). Ее образ имеет уравнение $w = e^{a+it} = e^a \cdot e^{it}$. Такое уравнение задает

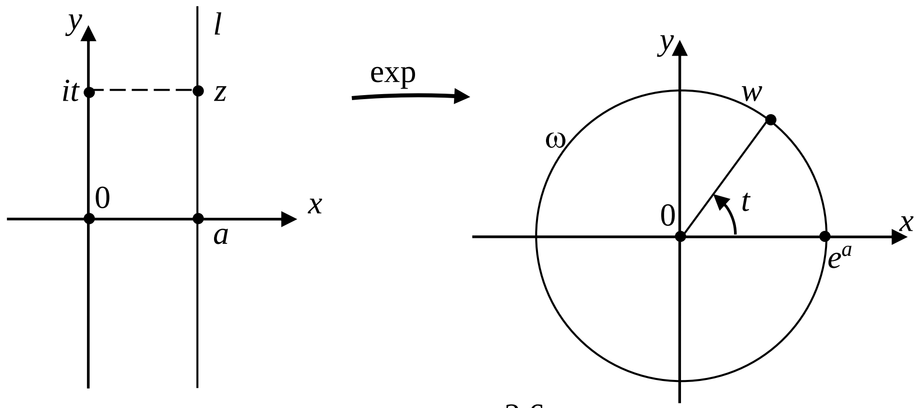

рис. 2.6

окружность радиуса e^a с центром 0. В процессе изменения параметра t, точка бесконечное число раз обегает окружность против часовой стрелки.

Прямая l, параллельная оси Ox, задается параметрическим уравнением $z = t + bi,\ b \in \boldsymbol{R}$ – фиксированное, $t \in \boldsymbol{R}$ – переменное (рисунок 2.7). Ее образ имеет уравнение

$$w = e^{t+bi} = e^t \cdot e^{bi}.$$

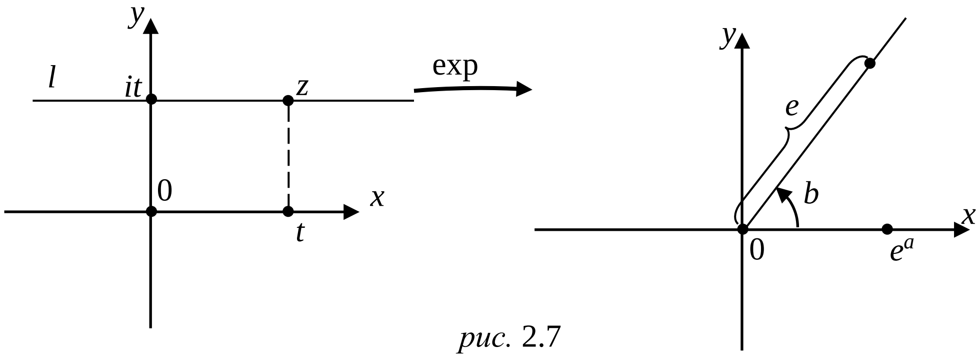

рис. 2.7

Это уравнение задает открытый луч без начала 0. При $t \to -\infty$, $w \to 0$.

Теорема. Отображение $w = \exp z$ переводит семейство прямых, параллельных мнимой оси в семейство окружностей с центром в начале координат, а семейство прямых, параллельных действительной оси переводит в семейство лучей, исходящих из точки 0, без самой точки 0.

Определение. Областью однолистности функции $w = f(z)$ называется область D, которая с помощью отображения, осуществляемого этой функцией, взаимно однозначно отображается на некоторую область G.

Найдем области однолистности экспоненты. Учитывая периодичность функции, эти области не должны содержать точек z_1, z_2, для которых $z_1 - z_2 = 2\pi i$. Поэтому любая открытая полоса ширины 2π, границы которой параллельны Ox, является областью однолистности (рисунок 2.9). Она задается неравенством

$$b < \operatorname{Im} z < b + 2\pi i$$

и отображается на угол раствора 2π без границы, т.е. на плоскость с разрезом вдоль луча, имеющего угол наклона b. Любая полоса меньшей ширины h тоже является областью однолистности и отображается на угол раствора h:

$$b < \arg z < b + h.$$

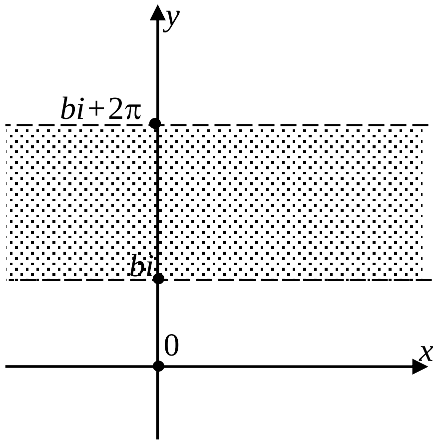

рис. 2.8

2.11. Логарифмическая функция

Мы уже определили многозначную функцию $w = \operatorname{Ln} z$. Например, множество значений $\operatorname{Ln} 1$ есть $\ln 1 + 2\pi ki = 2\pi ki$; среди них есть только действительное число 0. Действительная функция $y = \ln x$ определена только для $x > 0$. Комплексная функция определена для всех $z \neq 0$, в том числе и для отрицательных действительных значений z. Например,

$$\operatorname{Ln}(-1) = 2(k+1)\pi i,$$

т.е. все значения – это чисто мнимые числа. Если аргумент является положительным действительным числом $z = x$, то среди всех значений функции $\ln x + 2\pi ki$ есть только одно действительное. Например,

$$\mathrm{Ln}\, e = \ln e + 2\pi ki = 1 + 2\pi ki .$$

Для функции $w = \mathrm{Ln}z$ выполнены некоторые известные свойства действительной логарифмической функции:

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2,\ \ \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2.$$

В обоих равенствах левая и правая части представляют собой бесконечное множество чисел, и равенство означает совпадение этих множеств. Например, каждое из чисел множества $\mathrm{Ln}(z_1 z_2)$ можно представить, как сумму некоторых чисел из множеств $\mathrm{Ln}z_1$ и $\mathrm{Ln}z_2$. Если забыть этот факт, то можем получить ошибку.

Выделим однозначную непрерывную ветвь логарифмической функции. Возьмём область определения D: плоскость с разрезом вдоль луча $\arg z = \psi_o$. В этой области выделим однозначную непрерывную ветвь $\mathrm{Arg}z$:

$$\psi_o < (\mathrm{Arg}z)_o < \psi_o + 2\pi.$$

Тогда обозначим

$$(\mathrm{Ln}z)_o = \ln|z| + i\,(\mathrm{Arg}z)_o .$$

В каждой точке z $w = (\mathrm{Ln}z)_o$ совпадает с одним из значений $\mathrm{Ln}z$, и она взаимно однозначно отображает область D на открытую полосу

$$G\colon \psi_o < v < \psi_o + 2\pi.$$

Поскольку эта функция является обратной к дифференцируемой функции $z = e^w$, то она является дифференцируемой и

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{Ln}z)_o = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} .$$

Остальные однозначные непрерывные ветви логарифмической функции в той же области D задаются так:

$$(\mathrm{Ln}z)_k = (\mathrm{Ln}z)_o + 2\pi ki,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Функция $w = (\mathrm{Ln}z)_k$ взаимно однозначно отображает область D на открытую полосу

$$G_k\colon \psi_o + 2\pi k < v < \psi_o + 2\pi(k+1).$$

На рисунке 2.9 показан случай $\psi_o = 0$.

Выберем произвольную точку z_o, и выберем одно из значений аргумента $(\mathrm{Arg}z_o)_k$. Оно определит одно из значений многозначной функции $w = \mathrm{Ln}z$, равное $\ln|z_o| + i\,(\mathrm{Arg}z_o)_k = (\mathrm{Ln}z)_k$. Будем теперь двигаться из точки z_o по окружности с центром в точке 0 по часовой стрелке (рисунок 2.9). При этом $|z_o|$ не меняется, а $\mathrm{Arg}z_o$ меняется непрерывно. Когда мы вернемся в точку z_o, он прирастет на 2π. Соответственно, значение $\mathrm{Ln}z$ прирастет на $2\pi i$ и станет равным $(\mathrm{Ln}z_o)_{k+1}$.

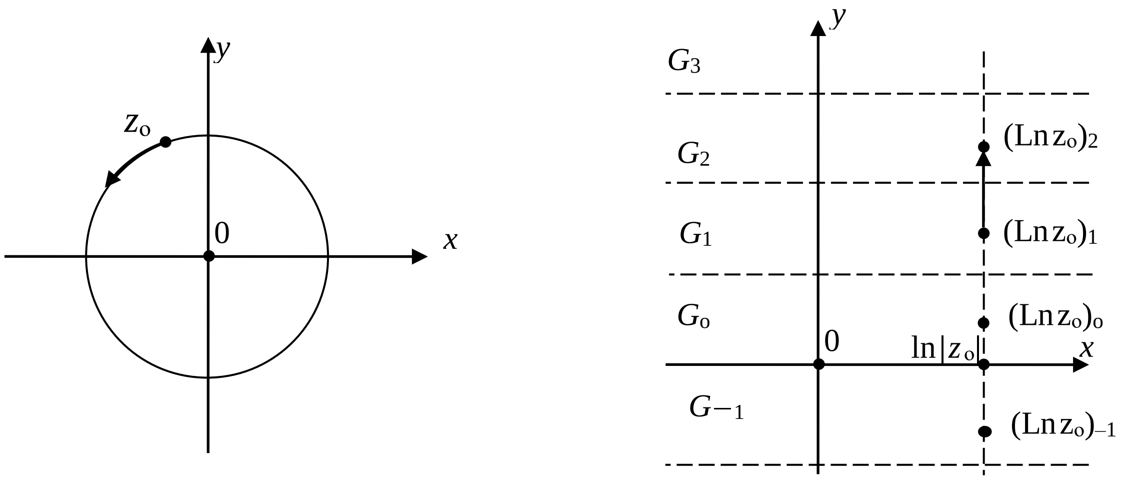

рис. 2.9

Соответственно, значение $\mathrm{Ln}z$ прирастет на $2\pi i$ и станет равным $(\mathrm{Ln}z_o)_{k+1}$. Точка $w_o = \mathrm{Ln}z_o$ в процессе перемещения точки z_o, движется параллельно мнимой оси вверх. Продолжая обход окружности, мы каждый раз при возвращении в точку будем получать новое значение $\mathrm{Ln}z_o$.

2.12. Тригонометрические и гиперболические функции

Определение *комплексных синуса и косинуса*:

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \ \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

При действительном значении аргумента они совпадают с действительными функциями $\cos x$ и $\sin x$. Обе функции имеют период $2\pi i$ (поскольку $2\pi i$ является периодом для экспоненты).

Свойства четности-нечетности, формулы суммы аргументов совпадают с такими же свойствами для действительных функций.

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \ \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \ \cos(z + \pi) = -\cos z, \ \sin(z + \pi) = -\sin z.$$

Верно основное тригонометрическое тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, но неверно что $|\cos z| \le 1$, $|\sin z| \le 1$.

Гиперболические функции:

$$\mathrm{ch} z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \ \mathrm{sh} z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

В действительном случае эти функции не являются периодическими, а в комплексном – их основной период равен $2\pi i$, так же, как у экспоненты. Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\mathrm{ch} z = \cos(iz), \ \mathrm{sh} z = i \sin(iz).$$

Основное тождество:

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1.$$

Действительные и мнимые части тригонометрических и гиперболических функций и их модули найдем на практических занятиях. Эти модули могут принимать сколь угодно большие значения.

Упражнение. Докажите, что $(\sin z)' = -\cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Далее можно привычным способом определить комплексные тангенс и котангенс. Обратные тригонометрические функции все являются многозначными. Примем к сведению только их выражения их через логарифм:

$$\mathrm{Arctg} z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},\ \mathrm{Arcctg} z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i};$$

$$\mathrm{Arccos} z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\ \mathrm{Arcsin} z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

2.13. Степень с комплексным показателем

Для действительных a и α имеет место формула: $a^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln a}$. Мы ее распространим и на комплексный случай:

$$a^z = \exp(z \mathrm{Ln} a).$$

При этом берутся все возможные значения логарифма, т.е. получается многозначная функция. Даже при действительном $a > 0$ и иррациональном z эта формула даёт бесконечное число значений, среди которых только одно действительное.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1. Комплексные числа. Операции над ними

Контрольные вопросы.

1. Что называется мнимой единицей, и как она обозначается?

2. Что такое комплексное число в алгебраической форме? Как оно изображается на плоскости?

3. Как определяется сумма и разность двух комплексных чисел в алгебраической форме, и как они строятся геометрически?

4. Какое число называется комплексно-сопряженным к данному? Как оно изображается на плоскости? Чему равны $z+\overline{z}$ и $z\cdot\overline{z}$?

5. Как вычисляется произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме?

6. Что называется модулем и аргументом комплексного числа (в том числе, показать на чертеже), и как они вычисляются?

7. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме? Как вычисляются произведение и частное двух чисел в тригонометрической форме и натуральная степень числа?

8. Какое число называется корнем n-ой степени из данного числа? Выпишите формулу для нахождения корней. Сколько существует различных корней n-ой степени изданного числа?

Задачи.

1. Докажите, что а) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$; в) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

2. Найдите все действительные решения уравнения

$$(1+2i)x + (3-5i)y = -6-21i.$$

3. Пусть $z = x+iy$. Представьте в алгебраической форме число $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\overline{z}^2}$.

4. Найдите действительные решения уравнения $(x+iy)(a+ib) = i^3$, где a и b – произвольные действительные параметры.

5. Найдите все комплексные решения уравнения $\overline{z}_1 = z^2$.

6. Найдите модуль и главное значение аргумента для следующих чисел:
   а) $z = 3+4i$; б) $z = -2+2i\sqrt{3}$; в) $z = 1+7i$.

7. Представьте следующие числа в тригонометрической форме.
   а) $z = -1+i\sqrt{3}$; б) $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; в) i; г) -8.

8. Вычислите а) $(-1+i\sqrt{3})^{12}$; б) $(2+2i)^7$; в) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{18}$.

9. Найдите выражение функций $\cos 3x$ и $\sin 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

10. Найти все значения а) $\sqrt[3]{-1+i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt{-i}$; г) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+3i}$.

11. Решите уравнения а) $z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = 0$; б) $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 80 = 0$.

12. В какой вектор перейдет данный вектор $z = -1+i\sqrt{3}$ после поворота на данный угол α? а) $\alpha = 90°$; б) $\alpha = 120°$.

13. На какой угол надо повернуть вектор $z_1 = 4-3i$ для того, чтобы получить вектор $z_2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$?

14. Решите уравнение: а) $(z-i)^2 - (z+i)^2 = 0$; б) $(z-i)^3 - (z+i)^3 = 0$; в) $(z-i)^4 - (z+i)^4 = 0$.

3.2. Множества на комплексной плоскости

Контрольные вопросы.

1. Какое множество называется ε-окрестностью данной точки? Какая точка называется внутренней точной множества?

2. Какая точка называется предельной точкой данного множества?

3. Какое множество называется а) открытым; б) замкнутым? Что называется границей множества?

4. Какое открытое множество называется связным? Какое множество называется: а) областью; б) окрестностью данной точки?

5. Покажите на чертеже, как с помощью стереографической проекции комплексные числа изображаются на сфере.

6. Выпишите правила операций с числом ∞. Что называется ε-окрестностью данного числа?

Задачи.

15. Какое множество точек на комплексной плоскости определяется следующим неравенством? Изобразите его.

а) $\operatorname{Im} z^2 > 2$; б) $|z-1| \le |z-i|$; в) $1 \le |z-1+i| \le 2$; г) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} > \dfrac{1}{2}$;

д) $4 \le |z-1| + |z+1| \le 8$.

16. Какая кривая на комплексной плоскости определяется следующим уравнением?

а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; в) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = 1$; г) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$;

д) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$; е) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$; ж) $|z-i| + |z+i| = 4$;

з) $|z-i| - |z+i| = 2$.

17. Написать в комплексной форме

а) уравнение прямой $Ax + By + C = 0$;

б) уравнение окружности $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$.

18. Какая кривая определяется следующим уравнением в комплексной форме: $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$?

19. Записать в комплексной форме уравнения следующих кривых.

а) прямой $y = kx + b,\ k, b \in \boldsymbol{R}$; б) гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$.

3.3. Производная. Аналитическая функция

Контрольные вопросы.

1. Как ФКП записывается с помощью функций действительного переменного?

2. Приведите определение производной ФКП. При выполнении каких условий существует производная?

3. Какая функция называется аналитической?

4. Какому уравнению должны удовлетворять действительная и мнимая части аналитической функции? Как называется пара функций, которые могут служить действительной и мнимой частями аналитической функции?

5. Решением какого уравнения является функция $v(x,y)$, если известна функция $u(x,y)$? Однозначно ли определяется $v(x,y)$?

Задачи.

20. Найдите действительную и мнимую части следующих функций.

а) $w = \bar{z} - z^2$; б) $w = z^2 + i$; в) $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$; г) $w = \dfrac{iz+1}{1+\bar{z}}$; д) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

21. Найдите образы данных точек под действием данных отображений.

а) $z_0 = -i,\ w = z^3$; б) $z_0 = 1 + i,\ w = (\bar{z} - i)^2$; в) $z_0 = 2 - i,\ w = \dfrac{\bar{z}}{z-i}$.

22. Найдите образы данных кривых под действием данных отображений.

а) $|z| = 1$; $w = z^2$; б) $|z| = 2$; $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$; ; в) $\operatorname{Re} z = 0$, $w = 1 + \dfrac{1}{z}$;

г) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, $w = \frac{1}{z}$; д) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, $w = \frac{1}{z}$.

23. Показать, что следующие функции являются гармоническими.

а) $u = x^2 + 2x + y^2$; б) $u = 2x\cos y$; в) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$; г) $w = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

д) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

24. При каких условиях функция $u = ax^2 + bxy + cy^2$ является гармонической?

25. Какие из следующих пар функций являются сопряженными гармоническими?

а) $u = 3(x^2 + y^2)$, $v = 3x^2y - y^3$; б) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

в) $u = x$, $v = -y$; г) $u = 1 + e^x\cos y$, $v = 1 + e^x\sin y$.

3.4. Линейная и дробно-линейная функции. Конформные отображения

Контрольные вопросы.

1. Какие функции называются линейной и дробно-линейной? Какие у них область определения и множество значений? При каком условии дробно-линейная функция будет взаимнооднозначной?

2. Как геометрически описать действие линейной функции?

3. Какой геометрический смысл имеют модуль и аргумент произвольной аналитической функции в данной точке z_o?

Задачи.

26. Найдите коэффициент растяжения r и угол поворота φ следующих следующих отображений в заданной точке.

а) $w = z^2$, $z_o = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; б) $w = e^z$, $z_o = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$; в) $w = \sin z$, $z_o = 1 + i$;

г) $w = z^3$, $z_o = 2 - i$.

27. Выясните, какая часть комплексной плоскости сжимается, а какая растягивается при следующих отображениях.

а) $w = e^z$; б) $w = \ln z$; в) $w = \frac{1}{z}$; г) $w = z^3$.

3.5. Основные ФКП

Контрольные вопросы.

1. Приведите определение и основные свойства функции $w = \exp z$. Какие у этой функции области однолистности? В какие кривые переходят под действием экспоненты прямые параллельные осям Ox и Oy?

2. Приведите определение и основные свойства функции $w = \operatorname{Ln} z$. Какие у этой функции области однолистности? Как изменяется значение этой функции в процессе движения точки z по окружности?

3. Приведите определения и основные свойства функций $w = \sin z$, $w = \cos z$. Какие у этих функций области однолистности?

4. Приведите определения и основные свойства функций $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$. Какие у этих функций области однолистности?

Задачи.

28. Выделите действительную и мнимую части следующих функций.

а) $w = e^{-z}$; б) $w = e^{z^2}$; в) $w = \cos z$; г) $w = \operatorname{ch}(z - i)$; д) $w = \operatorname{sh} z$.

29. Найдите значение модуля следующих функций $w = \sin z$

а) при произвольном значении z; б) при $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{3})$.

30. Найдите значение модуля следующих функций при данном значении аргумента.

а) $w = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$; б) $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$; в) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$.

31. Найдите в алгебраической форме значения

а) $w = \sin \pi i$; б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$; в) $\operatorname{Arcsin}\frac{i}{2}$.

32. Решить уравнения а) $\sin z = 3$ б) $e = i$; в) $\operatorname{ch} z = i$.

33. Найдите логарифмы следующих чисел.

а) e; б) $-i$; в) $-1-i$; г) $3-2i$.

34. Найдите а) i^i; б) 1^i; в) (-1); г) $3-2i$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям /, В.Г. Кротов [и др.]. – Минск: Вышэйшая школа, 2019. – 431 с.

2. Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ. В 6 ч. кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного: учеб. пособие для студ. / Э.И. Зверович. – Минск: Вышэйшая школа, 2008. – 319 с. – ISBN 978-985-06-1547-3,

3. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учеб. для студ. высш. учеб. заведений. – Изд. 14-е, стер. – Москва: Высшая школа, 1999. – 432 с.: ил. – (Высшая математика / под общ. ред. В.А. Садовничего). – Предм. указ.: с. 429-432. – ISBN 5-06-003612-Х.

4. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций: учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.

5. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций: учеб. пособие для студ. ун-тов / А.И. Маркушевич. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1978. – 416с.

6. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: [в 2 ч.]: учеб. для студ. ун-тов, обучающихся по спец. «Математика», «Механика» Ч. 1: Функции одного переменного / МГУ им. М.В. Ломоносова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2004. – 336 с. – ISBN 5-8114-0568-5 (ч. 1).

7. Евграфов, М.А. Аналитические функции: учеб. пособие для вузов / М.А. Евграфов. – М.: Наука, 1968. – 471 с.

8. Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: для вузов. – изд. перераб. и доп. – Москва: Наука, 1970. – 319 с.

9. Сборник задач по теории аналитических функций: [для втузов] / под ред. М.А. Евграфова. – 2-е изд., доп. – Москва: Наука, 1972. – 415 с.

10. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1971.– 256 с.

11. Электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Теория функций комплексного переменного». Электронный ресурс. https://mmf.bsu.by/wp-content/uploads/2016/11/УМК_Теория-функций-комплексного-переменного_ Кафедра-теории-функций_2014.pdf

Учебное издание

ПОДОКСЁНОВ Михаил Николаевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *Л.В. Рудницкая*

Подписано в печать 06.06.2024. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,49. Тираж 35 экз. Заказ 80.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.