

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.948

ДЕМЬЯНКО
СВЕТЛАНА ВЛАДИМИРОВНА

**РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННО-
ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИН-
ТЕГРИРУЕМЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2002

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Научный руководитель - доктор физико-математических наук
профессор
Килбас Анатолий Александрович
(Белгосуниверситет,
кафедра теории функций)

доктор физико-математических наук, профессор
Русак Валентин Николаевич
(Белгосуниверситет, кафедра высшей математики и математиче-
ской физики)

кандидат физико-математических наук, доцент
Василец Сергей Иванович
(Белорусский государственный пед. университет им. М.Танка,
кафедра математики)

Оппонирующая организация - Ростовский государственный уни-
верситет

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского госу-
дарственного университета.

Автореферат разослан

«24» июня 2002г.

И. о. ученого секретаря
совета по защите диссертаций
член-корр. НАН Беларуси



В.И. Корзюк

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Диссертация посвящена разрешимости одномерных интегральных уравнений 1-го рода с переменным пределом интегрирования и их многомерных аналогов. В этом направлении работали многие авторы, в том числе Н. Абель (N. Abel), В. Вольтерра (V. Volterra), С. Г. Михлин, М. М. Джрбациян, С. Г. Самко, Р. Бушман (R. Buschman), Г. Сривастава (H. Srivastava), О. И. Маричев, А. А. Килбас, М. Саиго (M. Saigo), Р. К. Райна (R. K. Raina) и др.

Диссертационная работа выполнена в этом направлении. Она посвящена нахождению необходимых и достаточных условий разрешимости одномерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами и их многомерных аналогов по пирамидальным областям многомерного евклидова пространства, а также нахождению явных формул решений рассматриваемых уравнений.

Важность изучения таких уравнений обусловлена тем, что к ним приводятся решения многих задач как из других разделов математики, в частности, дифференциальных уравнений и теории функций, так и из физики, механики и других естественных наук. При этом с точки зрения приложений одной из центральных является проблема обращения. С этой проблемой тесно связана задача получения необходимых и достаточных условий разрешимости рассматриваемых уравнений, являющихся уравнениями первого рода, в различных функциональных пространствах.

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена в рамках госбюджетной темы НИР БГУ: №740/25 «Аналитические, качественные и асимптотические методы в теории интегральных уравнений и приложения».

Цель и задачи исследования

Цель настоящей диссертации: исследование условий разрешимости одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами в пространствах непрерывных и интегрируемых функций; построение в замкнутой форме решений многомерных интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

Рассматриваемые уравнения первого рода относятся к так называемым некорректным задачам и поэтому их исследование сопря-

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

жено с определенными трудностями. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

–построить классы функций, в которых даётся корректная постановка задачи решения одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами;

–получить условия разрешимости одномерных уравнений типа Абеля и их многомерных аналогов по пирамидальным областям в пространствах интегрируемых и непрерывных функций;

–получить условия разрешимости одномерных интегральных уравнений типа свёртки со специальными функциями Вольтерра в ядрах и их многомерных аналогов в пространствах интегрируемых и непрерывных функций;

–построить явные формулы решений многомерных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются одномерные интегральные уравнения со степенно–логарифмическими ядрами и их многомерные аналоги по пирамидальным областям, возникающие при решении задач математической биологии и задач отражения волн.

Предметом исследования являются условия разрешимости рассматриваемых уравнений в пространствах интегрируемых и непрерывных функций и построение решений этих уравнений в замкнутой форме.

Методология и методы проведенного исследования

При решении поставленных задач используются теория классических уравнений Абеля, теория специальных функций Вольтерра, метод приведения уравнений со степенно–логарифмическими ядрами к уравнениям типа Абеля с помощью интегральных операторов типа свёртки и др.

Научная новизна и значимость полученных результатов

Научная новизна работы заключается в следующем:

–построены классы функций, в которых даётся корректная постановка задачи решения одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами;

–найлены условия разрешимости одномерных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами и их многомерных аналогов по пирамидальным областям в пространствах интегрируемых и непрерывных функций;

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

– получены условия разрешимости одномерных уравнений типа свёртки и их многомерных аналогов в указанных пространствах;

– получены явные формулы решений многомерных интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

Практическая (экономическая, социальная) значимость полученных результатов

Работа носит теоретический характер и даёт конструктивное решение содержательной математической задачи.

Полученные результаты могут быть использованы при решении одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно–логарифмическими ядрами.

Результаты могут быть также использованы при решении некоторых прикладных задач математической биологии и теории дифракции, сводящихся к уравнениям со степенно–логарифмическими ядрами, а также в учебном процессе в качестве спецкурсов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Условия разрешимости одномерных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами и их многомерных аналогов по ограниченному пирамидальным областям в пространствах интегрируемых и непрерывных функций.

2. Явные формулы решений многомерных интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

Личный вклад соискателя

Все полученные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем профессором, доктором физико-математических наук А. А. Килбасом. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на VIII Белорусской математической международной конференции (Минск, 19-24 июня 2000 г.)

на международной математической конференции AMADE 2001 (Минск, 15-19 февраля 2001 г.)

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

на третьих научных чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященных 80 – летию со дня рождения Ю. С. Богданова (Минск, 26 февраля-1 марта 2001 г.)

на 58-й конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 15-19 мая 2001 г.)

на научном семинаре кафедры теории функций (руководитель – профф. Э. И. Зверович).

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в семи научных работах, из которых четыре представляют собой статьи в рецензируемых научных журналах, а три – тезисы докладов на международных и республиканских конференциях. Общий объём опубликованных материалов составляет тридцать шесть страниц.

2 работы опубликовано без соавторов.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трёх глав, заключения и списка использованных источников, насчитывающих сорок шесть наименований. Общий объём диссертации – 87 страниц, из которых четыре страницы занимает список использованных источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** дается краткая характеристика работы, ее цели и задачи, описываются основные направления и методы исследования и характеризуются результаты, полученные в диссертационной работе.

В **первой главе** приводится краткий обзор исторических сведений по вопросам, связанным с тематикой диссертации – теорией интегральных уравнений типа Абеля первого рода, описываются методы исследования, среди которых основным является метод сведения интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами к более простым уравнениям с чисто степенными ядрами с помощью интегральных уравнений типа свертки со специальными функциями Вольтерра в ядре, а также дается краткое содержание работы.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

уравнения со степенно - логарифмическими ядрами

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^n A_{mk} \ln^k(x-t) \right] \varphi(t) dt = f(x) \quad (a < x < b, \alpha > 0) \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами A_{mk} на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси.

В п. 2.1 приводятся необходимые определения и свойства классов $C^n(a, b)$ и $AC^n[a, b]$, состоящих из функций, $n-1$ раз дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ и имеющих соответственно непрерывную на (a, b) производную $f^{(n)}$ или абсолютно непрерывную на $[a, b]$ производную $f^{(n-1)}$, а также их подклассов $C_0^n(a, b)$ и $AC_0^n[a, b]$, содержащих функции, исчезающие вместе со своими производными до порядка $(n-1)$ в точке $x=a$. Здесь же рассматриваются свойства дробных интегралов и производных Римана - Лиувилля, условия разрешимости уравнения Абеля в пространствах интегрируемых и непрерывных функций, а также даются определения и некоторые свойства специальных функций Вольтерра.

В п. 2.2 изучаются свойства интегрального оператора типа свертки

$$(J_a^h \varphi)(x) = \int_a^x v_h(x-t) \varphi(t) dt, \quad (2)$$

где $v_h(x)$ - специальная функция Вольтерра вида

$$v_h(x) = \frac{d}{dx} v(xe^h), \quad v(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^t dt}{\Gamma(t+1)}, \quad h \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty).$$

Доказывается ограниченность оператора J_a^h в пространствах функций $L(a, b)$ и $C(a, b)$ и свойство сохранения этим оператором классов $AC_0^n[a, b]$ и $C_0^n(a, b)$. Эти результаты являются промежуточными, необходимыми для решения уравнений типа свертки

$$\int_a^x v_h(x-t) \varphi(t) dt = g(x), \quad (3)$$

которые, в свою очередь, используются при решении уравнений со степенно - логарифмическими ядрами. Следующее утверждение даст критерий разрешимости уравнения (3) в пространстве $L(a, b)$.

Теорема 2.2.6. Пусть $h \in \mathbf{R}$ - заданное действительное число

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

12

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{(-1)^{mn}}{\Gamma(\mathbf{I}-\alpha)} \left(J_{\lambda, \alpha}^{1, \alpha} J_{\lambda, \alpha}^h \frac{\partial^1}{\partial \mathbf{t}} f \right) (\mathbf{x}) = \\ &= \frac{(-1)^{mn}}{\Gamma(\mathbf{I}-\alpha)_{\lambda, \alpha}(\mathbf{x})} \int (\Lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})) \left(J_{\lambda, \alpha}^h J_{\lambda, \alpha}^h, \dots, J_{\lambda, \alpha}^h \prod_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \tilde{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial t_l} \right) \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Утверждения, аналогичные теоремам 3.3.4 и 3.3.6, доказаны для уравнения (6) в пространстве $C(\Lambda_{\alpha}(\mathbf{b}))$.

В п. 3.4 рассматриваются многомерные интегральные уравнения с чисто логарифмическими ядрами

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int \sum_{k=1}^n B_{\alpha k} \ln^k(\Lambda \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})) \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}),$$

для них даются необходимые и достаточные условия разрешимости в пространствах суммируемых и непрерывных функций и строятся их решения в замкнутой форме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе приводятся условия разрешимости уравнений со степенно-логарифмическими ядрами и даются их решения в замкнутой форме.

1. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости одномерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций и их многомерных аналогов по ограниченным пирамидальным областям [1, 2, 3, 6].

2. Найдены достаточные условия разрешимости одномерных и многомерных интегральных уравнений по ограниченным пирамидальным областям со степенно-логарифмическими ядрами в подпространствах пространств интегрируемых и непрерывных функций [4, 7].

3. Построены решения в замкнутой форме многомерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами по ограниченным пирамидальным областям [1, 5].

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

13

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Kilbas A. A., Demianko S. V. Solution of multi-dimensional Abel-type integral equations with power-logarithmic kernels // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. – 2000. – Vol.3, №4. – P.439-452.

2. Килбас А. А., Демьянко С. В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в классе интегрируемых функций. // *Вестн НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* - 2001. - № 3. - С. 41-46.

3. Демьянко С. В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространстве непрерывных функций. // *Доклады НАН Беларусі.* – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 17-21.

4. Килбас А. А., Демьянко С. В. Достаточные условия разрешимости интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в классе интегрируемых функций. // *Вестник БГУ. Сер. I.* - 2002. - № 1. - С.64-71.

Тезисы

5. Килбас А. А., Демьянко С. В. Интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами по пирамидальным областям. // VIII Бел. матем. конф.: Тезисы докладов науч. конф., Минск, 19-24 июня 2000 г. / БГУ. – Минск, 2000. - С. 26.

6. Демьянко С. В. Решение интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в классе непрерывных функций // АМАДЕ-2001: Тезисы докладов науч. конф., Минск, 15-19 февраля 2001 / БГУ. – Минск, 2001. – С.50-51.

7. Демьянко С. В., Килбас А. А. Достаточные условия разрешимости интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в классе непрерывных функций. // Третьи научные чтения по обыкновенным дифф. уравнениям, посв. 80 – летию со дня рождения Богданова: Тезисы докладов науч. конф., Минск, 26 февраля - 1 марта 2001 г. / БГУ. – Минск, 2001 – С.7-8.

РЕЗЮМЕ

Демьянко Светлана Владимировна

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, интегральное уравнение Абеля, специальные функции Вольтерра, уравнения типа свертки, пространства интегрируемых и непрерывных функций.

Объектами исследования являются одномерные интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами и их многомерные аналоги по пирамидальным областям. Предметом исследования являются условия разрешимости рассматриваемых уравнений в пространствах интегрируемых и непрерывных функций.

Целью работы является получение условий разрешимости одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно – логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций; построение в замкнутой форме решений многомерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости одномерных и многомерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах интегрируемых и непрерывных функций.

2. Получены условия разрешимости одномерных интегральных уравнений типа свёртки со специальными функциями Вольтерра в ядрах и их многомерных аналогов в указанных пространствах.

3. Построены явные формулы решений многомерных интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами по пирамидальным областям.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут иметь приложения к различным проблемам, сводящимся к уравнениям со степенно-логарифмическими ядрами.

РЭЗЮМЕ

Дзям'янка Святлана Уладзіміраўна

РАЦЭННЕ ІНТЭГРАЛЬНЫХ УРАЎНЕННЯЎ СА СТУПЕННА-ЛАГАРЫФМІЧНЫМІ ЯДРАМІ Ў ПРАСТОРАХ ІНТЭГРУЕМЫХ І НЕПАРЫЎНЫХ ФУНКЦЫЙ

Ключавыя словы: інтэгральныя ўраўненні са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі, інтэгральнае ўраўненне Абеля, спецыяльныя функцыі Вальтэра, ураўненне тыпа сверткі, прасторы інтэгруемых і непарыўных функцый.

Аб'ектамі даследавання з'яўляюцца аднамерныя інтэгральныя ўраўненні са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі і іх мнагамерныя аналагі на пірамідальным вобласцям. Прадметам даследавання з'яўляюцца ўмовы вырашальнасці разглядаемых ураўненняў ў прасторах інтэгруемых і непарыўных функцый.

Мэта работы - даследаванне ўмоў вырашальнасці аднамерных і мнагамерных інтэгральных ураўненняў са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі ў прасторах інтэгруемых і непарыўных функцый; пабудаванне у замкнутай форме ранжняў мнагамерных інтэгральных ураўненняў са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі на пірамідальным вобласцям.

Ў дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Знойдзены неабходныя і дастатковыя ўмовы вырашальнасці аднамерных і мнагамерных ураўненняў са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі ў прасторах інтэгруемых і непарыўных функцый.

2. Атрыманы ўмовы вырашальнасці аднамерных інтэгральных ураўненняў тыпа сверткі са спецыяльнымі функцыямі Вальтэра ў ядрах іх мнагамерных аналагаў ва ўказаных прасторах.

3. Пабудаваны яўныя формулы ранжняў мнагамерных інтэгральных ураўненняў са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі на пірамідальным вобласцям.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Яе вынікі і метады можна выкарыстоўваць пры даследаванні розных праблем, якія маюць дачыненне да ўраўненняў са ступенна-лагарыфмічнымі ядрамі.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

SUMMARY

Svetlana V. Demianko

THE SOLUTIONS OF THE INTEGRAL EQUATIONS WITH POWER-LOGARITHMIC KERNELS IN THE SPACES OF INTE- GRABLE AND CONTINUOUS FUNCTIONS

Key words: the integral equations with power-logarithmic kernels, the Abel integral equation, the Volterra special functions, the convolution type equations, the spaces of integrable and continuous functions.

The objects of the research in this thesis are the one-dimensional integral equations with power-logarithmic kernels and their multidimensional analogs at the pyramidal domains. The subjects of the research are the conditions of the solvability the considered equations in the spaces of integrable and continuous.

The purpose of this work is to obtain the conditions for the solvability of the one-dimensional and the multidimensional integral equations with power-logarithmic kernels and to construct in the closed form the solutions of the multidimensional integral equations with power-logarithmic kernels over the pyramidal domains.

The following new results have been obtained in the thesis:

1. The conditions for the solvability of the one- and multidimensional integral equations with power-logarithmic kernels in the spaces of integrable and continuous functions have been given.

2. The conditions for the solvability of the one-dimensional integral convolution type equations with special Volterra functions at kernels and their multidimensional analogue in the considered spaces have been given.

3. The exact solutions for the multidimensional integral equations with power-logarithmic kernels over the pyramidal domains have been given.

The thesis is theoretical. Its methods and results may be applied to various problems that are reduced to equations with power-logarithmic kernels.