

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.948.32:517.544

ДЕГТЯРЕНКО
НАТАЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ
ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДОМ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2000

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель - доктор физико-математических наук,
профессор Зверович Эдмунд Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Расулов Кахриман
Мирземагомедович
кандидат физико-математических наук,
доцент Шилин Андрей Петрович

Оппонирующая организация – Казанский государственный
университет, Казань, Россия

Защита состоится 4 января 2001 года в 10⁰⁰ часов на
заседании совета по защите диссертаций Д.С. 01.07 в Белорусском
государственном университете по адресу: Минск, пр. Ф. Скорины,
4, главный корпус, к. 206, тел. 226 55-41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского
государственного университета.

Автореферат разослан 30 ноября 2000 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор

А. А. Килбас

А. А. Килбас

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Теория сингулярных интегральных уравнений представляет собой одно из важнейших математических средств решения ряда прикладных проблем (плоских задач теории упругости, задач гидродинамики, электродинамики, теории изгибаний поверхностей, теории массового обслуживания и других). В исследованиях сингулярных интегральных уравнений имеются два основных направления. Первое – исследование проблем существования и общих свойств таких уравнений и их решений. Второе направление – конструктивное. Для него характерны соединение доказательств существования решений с алгоритмами построения самих решений и приоритет второго перед первым. Причем эти алгоритмы должны реализовываться с использованием по возможности наиболее простых средств. Преимущества второго направления по сравнению с первым не только чисто технические. Например, оно позволяет глубже изучить свойства и картины разрешимости сингулярных уравнений. Этим обусловлена актуальность второго направления исследований. Предлагаемая диссертация относится ко второму направлению. В ней даются решения в замкнутой форме нескольких сингулярных интегральных уравнений, для которых такие решения ранее не были известны, а также рассматриваются некоторые близкие вопросы.

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена в рамках госбюджетных тем НИР Белгосуниверситета: 637/25 “Композиционные и асимптотические свойства интегральных операторов и решение особых интегральных уравнений и краевых задач” (раздел 1.1.8 “Теория функций комплексного переменного” плана НИР Белгосуниверситета № 19951145), 704/25 “Задачи сопряжения аналитических функций и уравнения в свертках” (раздел 1.1.8 “Теория функций комплексного переменного” плана НИР Белгосуниверситета, № 19962649).

Цель и задачи исследования

Цель исследования - получение в замкнутой форме решений нескольких сингулярных интегральных уравнений, используя метод сведения интегрального уравнения к задаче сопряжения и технику решения краевой задачи Римана на замкнутой римановой поверхности конечного рода.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Задачи исследования:

- построение в явном виде нового мероморфного аналога ядра Коши на торе и его примененис к некоторым задачам для двоякопериодических функций,
- нахождение спектра одного сингулярного интегрального уравнения с эллиптической функцией в качестве ядра и построение в явном виде новой ортогональной системы функций, состоящей из собственных функций этого уравнения,
- выявление новых частных случаев, в которых сингулярное интегральное уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением допускает решение в замкнутой форме, и исследование этих случаев.

Объект и предмет исследования

Объектами исследования являются сингулярные интегральные уравнения с аналогами ядра Коши на торе и уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением. Предметом исследования является изучение свойств вышеуказанных объектов, в частности - условий их разрешимости, и построение решений в замкнутой форме при выполнении этих условий.

Методология и методы проведенного исследования

Основным методом исследования является метод сведения сингулярного интегрального уравнения к задаче сопряжения. Для полученных краевых задач используются, в свою очередь, известные методы решения краевой задачи Римана на замкнутой римановой поверхности конечного рода.

Научная новизна и значимость полученных результатов

- Найдены в явном виде спектр и система собственных функций сингулярного интегрального уравнения с эллиптической функцией в качестве ядра.

- Построен в явном виде двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши, позволяющий конструктивно решать многие задачи для двоякопериодических функций. Даны его применения к ршению сингулярных интегральных уравнений на торе и к задаче об аналитическом продолжении.

- Найдены случаи, в которых сингулярное интегральное уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением допускает решение в замкнутой форме путем сведения его к задачам сопряжения на сфере и на торе.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- Получено обобщение случаев, описанных в предыдущем абзаце, на гиперэллиптический случай, то есть указан алгоритм решения в замкнутой форме вышеуказанного интегрального уравнения при ограничениях, позволяющих свести это уравнение к задаче линейного сопряжения на гиперэллиптической римановой поверхности рода h .

Практическая значимость полученных результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут иметь приложения к различным проблемам, сводящимся к сингулярным интегральным уравнениям. Метод решения уравнений, используемый в диссертации, с успехом может быть применен к решению новых сингулярных интегральных уравнений, а также к изучению свойств интегральных операторов, в частности, к исследованию условий обратимости некоторых интегральных операторов и к изучению их спектральных свойств. Построенный в диссертации мероморфный аналог ядра Коши на торе позволяет решать многие задачи для двоякопериодических функций. Полученные в диссертации результаты можно использовать в научно-исследовательской работе и при чтении спецкурсов в Белорусском, Казанском, Одесском и других университетах, где имеются специалисты, работающие в близких направлениях.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

1. Вывод явных формул для спектра и собственных функций одного сингулярного интегрального уравнения с эллиптической функцией в качестве ядра.
2. Построение в явном виде двоякопериодического мероморфного аналога ядра Коши, позволяющего осуществлять конструктивный подход к решению многих задач для двоякопериодических функций. Демонстрация его применения к решению сингулярных интегральных уравнений на торе.
3. Новые случаи, в которых сингулярное интегральное уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением допускает решение в замкнутой форме путем сведения его к задачам сопряжения на сфере и на торе.
4. Обобщение частных случаев, описанных в предыдущем пункте, на гиперэллиптический случай, то есть решение в замкнутой форме вышеуказанного интегрального уравнения при ограничениях, позволяющих свести это уравнение к задаче сопряжения на гиперэллиптической римановой поверхности рода h .

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, приведенные в диссертации, получены автором лично. Часть результатов получена в соавторстве с научным руководителем [4], [5], [6].

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на Минском городском семинаре по теоретическим и прикладным проблемам анализа при кафедре теории функций БГУ (руководитель – профессор Зверович Э.И.); на Международной конференции “Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление”, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ф.Д.Гахова (Минск, 16-20 февраля 1996 г.); на научной конференции, посвященной 75-летию Белорусского государственного университета (Минск, 1996 г.); на Международной конференции Mathematical Modeling and Analysis (Вильнюс, 1997 г.); на двух ежегодных научных конференциях в Белорусском государственном технологическом университете (математическая секция, февраль 1998 г., февраль 1999 г.).

Опубликованность результатов

По теме диссертации опубликованы 10 работ (из них 3 статьи - в научных журналах, 2 статьи - в сборниках научных трудов, 2 статьи депонированы, 3 тезисов докладов на научных конференциях). Общее количество страниц опубликованных материалов – 80 с.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и списка использованных источников. Полный объем диссертации – 102 с., в том числе 9 иллюстраций на 3 с.. Список использованных источников включает 52 наименования (на 5 с.).

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В главе 1 раскрывается актуальность выбранного направления исследований, кратко перечисляются основные результаты, полученные в диссертационной работе, дается обзор использованных литературных источников, а также приводится ряд фактов из теории аналитических функций и красивых задач Римана на замкнутых римановых поверхностях.

В главе 2, которая состоит из двух разделов, исследуются и решаются некоторые сингулярные интегральные уравнения с двоякопериодическими ядрами. В первом разделе решается задача о нахождении в явном виде спектра и собственных функций сингулярного интегрального уравнения следующего вида:

$$\lambda \varphi(x) - \frac{1}{\pi i} \int_a^a \frac{\varphi(\tau) d\tau}{sn(\tau - x)} = f(x), \quad -a < x < a, \quad (1)$$

где $sn(\cdot)$ – эллиптическая функция Якоби с основными периодами $4K$ и $2iK'$ (K и K' – некоторые положительные числа), а λ и a – числовые параметры, причем $0 < a < K$. Предполагается, что заданная функция $f(x)$ и неизвестная функция $\varphi(x)$ принадлежат пространству $L_2(-a, a)$. Так как $sn z \sim z$ при

$z \rightarrow 0$, то выражение $\frac{d\tau}{sn(\tau - z)}$ есть аналог ядра Коши на торе. Тор, как

известно, можно реализовать в виде так называемого “фундаментального прямоугольника периодов” со сторонами длин $4K$ и $2K'$, причем его противоположащие стороны попарно отождествлены. В качестве такого прямоугольника зафиксирован прямоугольник, который определяется следующими своими тремя вершинами: $-K - iK'$, $-K + iK'$, $3K - iK'$. В силу свойств эллиптического синуса уравнение (1) представляет собой полное сингулярное уравнение с ядром Коши. Поэтому входящий в (1) интегральный оператор ограниченно действует из $L_2(-a, a)$ в $L_2(-a, a)$. Далее, так как функция $sn(\cdot)$ является вещественной в точках действительной оси и

нечетной, то его ядро удовлетворяет тождеству $\overline{\left(\frac{1}{\pi i sn(x - \tau)} \right)} = \frac{1}{\pi i sn(\tau - x)}$.

Следовательно, интегральный оператор в (1) является самосопряженным (как оператор из $L_2(-a, a)$ в $L_2(-a, a)$). Отсюда вытекает, что его спектр есть компактное подмножество вещественной оси, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, – ортогональны. Этот спектр можно найти из того условия, что в точках спектра неоднородное уравнение (1) разрешимо не при любой функции $f \in L_2(-a, a)$.

Для решения задачи, поставленной в первом разделе второй главы, применяется метод аналитического продолжения. С этой целью вводится в рассмотрение кусочно-аналитическая функция

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Вычислены в явном виде спектр и система собственных функций сингулярного интегрального уравнения с эллиптической функцией в качестве ядра. Эти собственные функции дают пример новой ортогональной системы функций в пространстве $L_2(-a, a)$, где a - числовой параметр [4].

2. Построен в явном виде двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши. Даны его применения к решению сингулярных интегральных уравнений на торе и к задаче об аналитическом продолжении [2, 5].

3. Найдены новые случаи, в которых сингулярное интегральное уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением (уравнение Комяка) допускает решение в замкнутой форме. В данной работе представлено его решение в двух частных случаях путем сведения к задачам сопряжения на сфере и на торе соответственно [1, 6 - 9].

4. Получено обобщение случаев, описанных в предыдущем пункте, на гиперэллиптический случай, то есть представлено решение в замкнутой форме интегрального уравнения Комяка при ограничениях, позволяющих свести это уравнение к задаче линейного сопряжения на гиперэллиптической римановой поверхности рода h [3, 10].

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

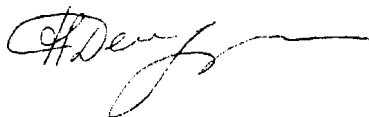
1. Дегтяренко Н.А. *Решение интегрального уравнения типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением* // Весті Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. - №4. – С. 46 – 51.
2. Дегтяренко Н.А. *Двокопериодический мероморфный аналог ядра Коши и некоторые его применения* // Изв. вузов. Матем. –1999. - №8 (447). – С. 11 – 19.
3. Дегтяренко Н.А. *Решение в замкнутой форме интегрального уравнения типа свертки в гиперэллиптическом случае* // Изв. вузов. Матем. –2000. - № 1 (452). – С. 20 – 30.
4. Дегтяренко Н.А., Зверович Э.И. *Нахождение ограниченных собственных функций одного сингулярного оператора* // Труды Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – Казань: “Унипресс”, 1998. – С. 101 – 103.
5. Dzehtsiarenka N.A., Zverovich E.I. *The double-periodic analog of the Cauchy kernel and some its applications* // Mathematical Modeling and Analysis. – Vilnius: “Technika”, 1998. – Vol.3. – P. 81 –85.
6. Дегтяренко Н.А., Зверович Э.И. *Решение в замкнутой форме интегрального уравнения типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением* // Ред. ж. Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. Физ., мат., мех. – Минск, 1995. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 03.01.96. – №31 – В96. // Библиографический указатель ВИНТИ “Депонированные научные работы”. – 1996.- №3. - б/о 66.
7. Дегтяренко Н.А. *Решение в замкнутой форме интегрального уравнения Комяка* // Ред. ж. Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. Физ., мат., инф. – Минск, 1997. – 27 с. – Деп. в ВИНТИ 17.02.97. – № 501-В97. // Библиографический указатель ВИНТИ “Депонированные научные работы”. – 1997. - №4. – б/о 73.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

8. Дегтяренко Н.А. *Решение интегрального уравнения типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением* // Межд. конф. “Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление”, посв. 90-летию со дня рожд. ак. Ф.Д.Гахова: тез. докл. конф., Минск, 16 – 20 февраля 1996 г. / Белгосуниверситет. – Минск, 1996. – С. 31.

9. Дегтяренко Н.А. *Решение в замкнутой форме интегрального уравнения Комяка* // Бругинские чтения IV: тез. докл. Межд. мат. конф., Витебск, 20 – 22 мая 1997г. / Витебский государственный университет. – Витебск, 1997. – С. 145 –146.

10. Дегтяренко Н.А. *Решение в замкнутой форме интегрального уравнения Комяка в гиперэллиптическом случае* // Тез. докл. Межвузовской мат. конф. памяти профессора С.Г. Кондрагени, Брест 21 – 23 апреля 1998г. / Брестский государственный университет. – Брест, 1998. – С. 52.



(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

РЕЗЮМЕ

Дегтяренко Наталья Александровна

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, спектр, собственные функции, мероморфный аналог ядра Коши на торе, уравнение типа свертки, задача Римана, риманова поверхность, решение в замкнутой форме.

Объектами исследования в диссертационной работе являются сингулярные интегральные уравнения с аналогами ядра Коши на торе и уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением. Предметом исследования является изучение свойств вышеуказанных объектов, в частности - условий их разрешимости, и построение решений в замкнутой форме при выполнении этих условий. Цель работы - получение решений в замкнутой форме нескольких сингулярных интегральных уравнений, используя метод сведения интегрального уравнения к задаче сопряжения и технику решения краевой задачи Римана на замкнутой римановой поверхности конечного рода.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

- 1) найдены в явном виде спектр и система собственных функций сингулярного интегрального уравнения с эллиптической функцией в качестве ядра;
- 2) построен в явном виде двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши, позволяющий конструктивно решать многие задачи для двоякопериодических функций; даны его применения к решению сингулярных интегральных уравнений на торе и к задаче об аналитическом продолжении;
- 3) найдены два новых случая, в которых сингулярное интегральное уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением допускает решение в замкнутой форме путем сведения его к задачам сопряжения на сфере и на торе;
- 4) получено обобщение случаев, описанных в предыдущем абзаце, на гиперэллиптический случай, то есть указан алгоритм решения в замкнутой форме вышеуказанного интегрального уравнения при ограничениях, позволяющих свести это уравнение к задаче линейного сопряжения на гиперэллиптической римановой поверхности рода h .

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут иметь приложения к различным проблемам, сводящимся к сингулярным интегральным уравнениям.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

РЭЗЮМЭ

Дзехцярэнка Наталля Аляксандраўна

РАШЭННЕ Ў ЗАМКНУТАЙ ФОРМЕ ЛШЕЙНЫХ СІНГУЛЯРНЫХ ІНТЭГРАЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ МЕТАДАМ ПРЫВЯДЗЕННЯ ДА ЗАДАЧЫ СПАЛУЧЭННЯ

Ключавыя словы: сінгулярныя інтэгральныя раўнанні, спектр, уласныя функцыі, мераморфны аналаг ядра Кашы на торы, раўнанне тыпу згорткі, задача Рымана, рыманавая паверхня, рашэнне ў замкнутай форме.

Аб'ектамі даследавання ў дысертацыі з'яўляюцца сінгулярныя інтэгральныя раўнанні з аналагамі ядра Кашы на торы і раўнанне тыпу згорткі з чатырма ядрамі і спалучэннем. Прадметам даследавання з'яўляецца вывучэнне ўласцівасцей апісаных вышэй аб'ектаў, у прыватнасці - умоў іх вырашальнасці, і пабудова рашэнняў у замкнутай форме, калі гэтыя ўмовы выконваюцца. Мэта дысертацыйнай работы – атрыманне рашэнняў у замкнутай форме некалькіх сінгулярных інтэгральных раўнанняў з выкарыстаннем метада прывядзення інтэгральнага раўнання да задачы спалучэння і тэхнікі вырашэння краёвай задачы Рымана на замкнутай рыманавай паверхні канечнага роду.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

- 1) знойдзены ў яўным відзе спектр і сістэма ўласных функцый сінгулярнага інтэгральнага раўнання з эліптычнай функцыяй у якасці ядра;
- 2) пабудаваны ў яўным відзе двакапэрыядычны мераморфны аналаг ядра Кашы, які дазваляе канструктыўна вырашаць многія задачы для двакапэрыядычных функцый; дадзены прыклады яго ўжывання да вырашэння сінгулярных інтэгральных раўнанняў на торы і да задачы аб аналітычнам працягу;
- 3) знойдзены два новых выпадкі, у якіх дапускаецца вырашэнне ў замкнутай форме сінгулярнага інтэгральнага раўнання тыпу згорткі з чатырма ядрамі і спалучэннем шляхам прывядзення яго да задачы спалучэння на сферы і на торы;
- 4) атрымана абагульненне выпадкаў, апісаных у папярэднім абзацы, на гіперэліптычны выпадак, гэта значыць, указаны алгарытм вырашэння ў замкнутай форме апісанага раней інтэгральнага раўнання пры абмежаваннях, якія дазваляюць звесці гэтае раўнанне да задачы лінейнага спалучэння на гіперэліптычнай рыманавай паверхні рода h .

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Яе вынікі і метады можна ўжываць у даследаваннях розных праблем, якія маюць дачыненне да сінгулярных інтэгральных раўнанняў.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

SUMMARY

Natallia A. Dzehtsiarenka

SOLVING OF LINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN CLOSED FORM BY REDUCING THEM TO CONJUGATION PROBLEMS

Key words: singular integral equations, spectrum, proper functions, meromorphic analog of the Cauchy kernel on torus, equation of the convolution type, Riemann problem, Riemann surface, the solution in its closed form.

The objects of the research in this thesis are singular integral equations with analogs of the Cauchy kernel on torus, and the equation of the convolution type with four kernels and conjugation. The subject of the research is learning the properties of these objects, in particular – their solvability conditions, and the construction of solutions in closed form, if these conditions take place. The purpose of this work is to obtain the solutions of some singular integral equations in closed form by reducing them to conjugation problems and using the techniques of solving of the Riemann problem on the Riemann surface of genus h .

The following new results have been obtained in the thesis:

- 1) the spectrum and the system of proper functions of the singular integral equation with the elliptic function as the kernel have been given in the explicit form;
- 2) the double-periodic analog of the Cauchy kernel has been constructed in its new explicit form, which permits to solve a lot of problems about double-periodic functions; its applications for solving singular integral equations on torus and an analytic continuation problem have been given;
- 3) two new cases while the singular integral equation of the convolution type with four kernels and conjugation is being solved in closed form by reducing it to conjugation problems on torus and sphere have been found;
- 4) the generalization of previous cases has been obtained, that is for limitations, that permit to reduce this equation to the conjugation problem on the hyperelliptic Riemann surface of genus h , the algorithm for the construction of the general solution in its closed form of such equation has been given.

The thesis is theoretical. Its methods and results may be applied to various problems, that are reduced to singular integral equations.