

О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп

В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Пусть R – подмножество элементов группы G . Подгруппу H группы G назовем R -субнормальной подгруппой, если H является субнормальной подгруппой в $\langle H, R \rangle$. Используя данное понятие, мы доказываем достаточные признаки нильпотентности и сверхразрешимости конечной группы G , представимой в произведение своих R -субнормальных подгрупп, где $R = F(G)$ является подгруппой Фиттинга G . В частности, установлена нильпотентность группы $G = AB$, где A и B – $F(G)$ -субнормальные нильпотентные подгруппы группы G . Также получено, что группа $G = AB$, являющаяся произведением своих $F(G)$ -субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B , сверхразрешима, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) коммутант G' группы G нильпотентен; 2) G метанильпотентна и подгруппы A и B имеют взаимно простые индексы; 3) $G' = A'B'$; 4) одна из подгрупп A или B нормальна и нильпотентна.

Ключевые слова: конечная группа, произведение подгрупп, субнормальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, подгруппа Фиттинга, коммутант.

On the Products of Partially Subnormal Subgroups of Finite Groups

V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev

Education establishment «Gomel State University of Francisk Skorina»

Let R be a subset of a group G . A subgroup H of G will be called R -subnormal subgroup if H is a subnormal subgroup of $\langle H, R \rangle$. Using this concept, we will prove some sufficient conditions for the nilpotency and supersolubility of finite group G , represented by the product of its R -subnormal subgroups, where $R = F(G)$ is the Fitting subgroup of G . In particular, we have proved the nilpotency of the group $G = AB$ which is the product of its $F(G)$ -subnormal nilpotent subgroups A and B . It also has been found that the group $G = AB$, which is the product of its $F(G)$ -subnormal supersoluble subgroups A and B , is supersolvable if at least one of the following conditions is held: 1) the commutator subgroup G' group G is nilpotent; 2) G is metanilpotent and subgroups A and B have relatively prime indices; 3) $G' = A'B'$; 4) one of the subgroups A or B is normal and nilpotent.

Key words: finite group, product of subgroups, subnormal subgroup, nilpotent group, supersoluble group, Fitting subgroup, commutator subgroup.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известен результат Фиттинга о том, что группа, представимая в произведение своих нормальных (субнормальных) нильпотентных подгрупп, является нильпотентной. Существуют примеры [1] несверхразрешимых групп, являющихся произведением своих субнормальных сверхразрешимых подгрупп. С другой стороны, Бэр в [2] показал, что если группа G является произведением своих двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. Фриссен [3] заметил, что если группа есть произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в ней, то она сверхразрешима. Также хорошо известно, что произведение нормальной нильпотентной подгруппы на нормальную сверхразрешимую подгруппу всегда сверхразрешимо. Перечисленные выше результаты развивались многими авторами в различных направлениях (см., например, [4–6]).

В настоящей работе мы вводим следующее определение.

Определение 1. Пусть R – подмножество элементов группы G . Подгруппу H группы G назовем R -субнормальной подгруппой, если H является субнормальной подгруппой в $\langle H, R \rangle$.

Основной целью данной работы является обобщение отмеченных выше классических результатов для групп, представимых в произведение своих R -субнормальных подгрупп, в случае, когда R совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы G . Заметим, что всякая субнормальная подгруппа является $F(G)$ -субнормальной. Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе степени 4. Пусть H – силовская 2-подгруппа G . Заметим, что H является абнормальной подгруппой группы G . Нетрудно показать, что $F(G)$ лежит в H . Следовательно, H является $F(G)$ -субнормальной подгруппой группы G .

Теорема 1. Если группа $G=AB$ является произведением своих $F(G)$ -субнормальных нильпотентных подгрупп A и B , то G нильпотентна.

Следствие 1. Пусть группа $G = AB$ является произведением нильпотентных подгрупп A и B . Если $F(G) \subseteq A \cap B$, то G нильпотентна.

Следующий пример показывает, что если группа G содержит две $F(G)$ -субнормальные сверхразрешимые подгруппы A и B взаимно простых индексов в G (в этом случае, $G = AB$), то она необязательно сверхразрешима.

Пример 2. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе степени 3. По теореме 10.3В [7] существует точный неприводимый F_7G -модуль V размерности 2 над полем F_7 . Пусть T – полупрямое произведение V и G . Пусть $A = VG_3$ и $B = VG_2$, где G_p – силовская p -подгруппа G и $p \in \{2, 3\}$. Так как $7 \equiv 1 \pmod{p}$ для $p \in \{2, 3\}$, то легко проверить, что A и B сверхразрешимы. Так как V – точный неприводимый модуль, то $F(T) = V$. Таким образом, A и B – $F(T)$ -субнормальные подгруппы T . Заметим, что $T = AB$, но T в силу свойств F_7G -модуля V не является сверхразрешимой группой.

Известно, что если группа содержит две нормальные подгруппы взаимно простых индексов, то ее коммутант есть произведение коммутантов этих подгрупп (см. доказательство теоремы 3.5 из [1, р. 128]).

Теорема 2. Пусть группа $G = AB$ является произведением своих $F(G)$ -субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) коммутант G' группы G нильпотентен;
- 2) G метанильпотентна и $(|G : A|, |G : B|) = 1$;
- 3) $G' = A'B'$;
- 4) одна из подгрупп A или B нильпотентна и нормальна в G ,

то G сверхразрешима.

Замечание. Теоремы 1 и 2 остаются верными, если вместо $F(G)$ рассматривать любую подгруппу R группы G такую, что $F(G) \subseteq R$.

Предварительные результаты. В работе используются обозначения, определения и результаты из работ [1, 7–8], напомним некоторые из них.

Пусть G – группа. Тогда через E обозначается единичная подгруппа, через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга; через $\Phi(G)$ обозначается подгруппа Фраттини группы G . Если M – подгруппа группы G , то через M_G обозначается максимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в M .

Леммы 1, 2, 4 хорошо известны, и их доказательства можно найти в [7–8].

Лемма 1. Если факторгруппа $G/\Phi(G)$ нильпотентна, то и группа G нильпотентна.

Лемма 2. Если группа G разрешима, то

1) $\Phi(G) \subset F(G)$ и $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$;

2) $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$;

3) если $\Phi(G) = E$, то $F(G)$ совпадает с произведением всех минимальных подгрупп группы G .

Лемма 3. Пусть группа G есть произведение своих субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.

Доказательство. Непосредственно индукцией по порядку группы сводится к теореме Бэра (см., например, [1, р. 9]).

Лемма 4. Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B . Тогда верны следующие утверждения:

1) $G' = A'B'[A, B]$;

2) $[A, B] \triangleleft G$;

3) если одна из подгрупп A или B нормальна в G , то $[A, B]$ в ней содержится;

4) пусть G разрешима и π – множество простых чисел. Тогда найдутся такие π -холловы подгруппы G_π, A_π, B_π групп G, A и B соответственно, что $G_\pi = A_\pi B_\pi$.

Лемма 5. Если группа G есть произведение нормальной нильпотентной подгруппы и субнормальной сверхразрешимой подгруппы, то G сверхразрешима.

Доказательство. Пусть $G = AB$, где A – нормальная нильпотентная подгруппа, а B – субнормальная сверхразрешимая подгруппа группы G . Согласно 1) леммы 4 коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Так как $A \triangleleft G$, то по 3) леммы 4 $[A, B] \subseteq A$. Заметим, что $A'[A, B]$ – нормальная нильпотентная подгруппа группы G' . Так как B сверхразрешима, то ее коммутант B' нильпотентен. Имеем, что G' представим в произведение двух своих субнормальных нильпотентных подгрупп $A'[A, B]$ и B' . Следовательно, подгруппа G' нильпотентна. Теперь утверждение леммы вытекает из леммы 3. Лемма доказана.

Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть существуют нильпотентные группы $G = AB$, являющиеся произведением своих $F(G)$ -субнормальных нильпотентных подгрупп A и B . Выберем среди таких групп группу $G = AB$ наименьшего порядка. По теореме Виланда–Кегеля группа G разрешима. Очевидно, что $G \neq E$.

Предположим $\Phi(G) \neq E$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$. Так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ по 1) леммы 2, то

$$G/\Phi(G) = A\Phi(G)/\Phi(G)B\Phi(G)/\Phi(G),$$

где $A\Phi(G)/\Phi(G)$ и $B\Phi(G)/\Phi(G)$ являются $F(G/\Phi(G))$ -субнормальными нильпотентными подгруппами группы $G/\Phi(G)$. Так как $|G| > |G/\Phi(G)|$, то $G/\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда по лемме 1 группа G нильпотентна. Это противоречит выбору группы G .

Можно считать, что $\Phi(G) = E$. Рассмотрим подгруппу $R = AF(G)$. Так как A субнормальна в $\langle A, F(G) \rangle = AF(G)$, то из нильпотентности A и $F(G)$ следует, что $R = AF(G)$ нильпотентна. Аналогично устанавливается нильпотентность подгруппы $T = BF(G)$.

Покажем, что в G найдется ненормальная максимальная подгруппа M , не содержащая $F(G)$. Допустим противное. Так как G разрешима и нильпотентна, то $G \neq F(G) \neq E$. Тогда по утверждению 3) леммы 2 $F(G) = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, \dots, t$. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Так как $\Phi(G) = E$, то для N_i найдется максимальная подгруппа M_i группы G такая, что $M_i N_i = G$. Заметим, что $M_i F(G) = G$. Согласно допущению имеем, что $M_i \triangleleft G$. Так как N_i абелева, то $N_i \subseteq C_G(N_i)$. Из $M_i \cap N_i = 1$ и $M_i \triangleleft G$ следует, что $M_i \subseteq C_G(N_i)$. Но тогда $G = M_i N_i \subseteq C_G(N_i)$ для любого $i = 1, \dots, t$. Отсюда и из 2) леммы 2 заключаем, что $G \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Следовательно, G нильпотентна. Получили противоречие с выбором G .

Таким образом, в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M , не содержащая $F(G)$. Так как G разрешима, то согласно теореме 2 из [9] существует силовская p -подгруппа G_p группы такая, что ее нормализатор $N_G(G_p)$ содержится в M .

С другой стороны, ввиду 4) леммы 4 в R и T существуют p' -холловы подгруппы $R_{p'}$ и $T_{p'}$ соответственно и силовские p -подгруппы R_p и T_p соответственно такие, что $R_{p'} T_{p'}$ – p' -холлова подгруппа группы G , а $R_p T_p = G_p$. Из нильпотентности подгрупп R и T следует, что $R = R_{p'} \times R_p$ и $T = T_{p'} \times T_p$. Поэтому $[R_{p'} \cap T_{p'}, R_p T_p] = E$. Откуда получаем, что $R_{p'} \cap T_{p'} \subseteq N_G(R_p T_p) = N_G(G_p)$. Так как $F(G) \subseteq R \cap T$, то нетрудно заметить, что $F(G) \subseteq N_G(G_p) \subseteq M$. Получили противоречие с выбором M . Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Так как $F(G) \subseteq A \cap B$, то нетрудно видеть, что A и B

являются $F(G)$ -субнормальными подгруппами. Теперь результат следует из теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что G' нильпотентна. Так как $F(G)$ нильпотентна, то по лемме 5 подгруппа $K = AF(G)$ сверхразрешима. Аналогично устанавливается сверхразрешимость подгруппы $R = BF(G)$. Так как G' нильпотентна, то группа $G/F(G) = K/F(G)R/F(G)$ абелева. Откуда следует, что $K/F(G)$ и $R/F(G)$ – нормальные подгруппы в $G/F(G)$. Теперь наше утверждение следует из леммы 3.

Предположим, что G метанильпотентна и $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $K = AF(G)$ сверхразрешима по лемме 5. Аналогично доказывается, что подгруппа $R = BF(G)$ сверхразрешима. Имеем $G/F(G) = K/F(G)R/F(G)$. Так как G метанильпотентна, то $G/F(G)$ нильпотентна. Поэтому $K/F(G)$ и $R/F(G)$ являются субнормальными подгруппами в $G/F(G)$. Следовательно, K и R – субнормальные подгруппы в G . По теореме 3.5 (см. [1], р. 128) G сверхразрешима, что и завершает доказательство пункта 2) теоремы.

Для доказательства оставшихся пунктов теоремы 2 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6. Пусть группа $G = AB$ – произведение $F(G)$ -субнормальных подгрупп A и B , имеющих нильпотентный коммутант. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) $G' = A'B'$;
- 2) одна из подгрупп A и B нильпотентна и нормальна в G , то коммутант G' группы G нильпотентен.

Доказательство. Пусть $G' = A'B'$. Тогда из характеристичности подгруппы A' в A следует, что A' субнормальна в $AF(G)$, в частности, A' субнормальна в $A'F(G)$. Следовательно, $A' - F(G)$ -субнормальная подгруппа группы G . Аналогично доказывается $F(G)$ -субнормальность подгруппы B' . Так как G' – нормальная подгруппа группы G , то $F(G') \subseteq F(G)$. Заметим, что коммутанты A' и B' являются $F(G')$ -субнормальными нильпотентными подгруппами группы G' . Теорема 1 завершает доказательство пункта 1) леммы 6.

Предположим, что одна из подгрупп A и B нильпотентна и нормальна в G . Не теряя общности рассуждений, можно считать, что A – нормальная нильпотентная подгруппа группы G . Так как $A' \text{ char } A \triangleleft G$, то $A' \triangleleft G$. Так как $[A, B] \subseteq A$ по 3) леммы 4, то $[A, B]$ нильпотентна. Так как $[A, B] \triangleleft G$, то $A'[A, B]$ – нормальная нильпотентная подгруппа, в частности,

$F(G')$ -субнормальная подгруппа группы G' . Рассуждая, как в пункте 1), получаем, что B' является $F(G')$ -субнормальной нильпотентной подгруппой группы G' . Так как $A' \triangleleft G$, то ввиду 1) леммы 2 $G' = A'B'[A, B] = B' A'[A, B]$. Отсюда по теореме 1 получаем нильпотентность G' . Лемма 6 доказана.

Окончание доказательства теоремы 2. Пункты 3) и 4) теоремы следуют из леммы 6 и пункта 1) теоремы. Теорема доказана.

Заключение. Полученные выше теоремы могут быть использованы при изучении свойств групп, представимых в произведение своих нильпотентных и сверхразрешимых подгрупп с различными условиями перестановочности для подгрупп.

Напомним, что подгруппы H и K группы G называются перестановочными, если $HK = KH$, что эквивалентно тому, что множество HK является подгруппой в G . В работе [10] Т. Фогелем было введено понятие сопряженно-перестановочной подгруппы. Подгруппа H группы G называется сопряженно-перестановочной, если H перестановочна со всеми своими сопряженными подгруппами H^x , $x \in G$. В работе [10] было показано, что если H является сопряженно-перестановочной подгруппой группы G , то H субнормальна в G .

Для того чтобы развить данную концепцию, нами в работе [11] было введено следующее

Определение 2. Пусть R – подмножество элементов группы G . Подгруппа H группы G называется R -сопряженно-перестановочной, если $HH^x = H^xH$ для всех $x \in R$.

Лемма 7. Пусть H и R – подгруппы группы G , причем $RH = HR$. Если H является R -сопряженно-перестановочной, то H субнормальна в подгруппе RH .

Доказательство. Пусть $k \in RH$. Тогда $k = hr$, где $h \in H$ и $r \in R$. Так как подгруппа H является R -сопряженно-перестановочной, то $HH^k = HH^{hr} = HH^r = H^rH = H^{hr}H = H^kH$. Следовательно, H является сопряженно-перестановочной подгруппой группы HR . Теперь результат следует из следствия 1.1 [10]. Лемма доказана.

Как показывает следующий пример, обратное утверждение к лемме 7 неверно.

Пример 3. Рассмотрим симметрическую группу S_8 степени 8 и ее подгруппу, изоморфную группе вращений правильного восьмиугольника $D_8 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy = x^7 \rangle$. Нетрудно проверить, что подгруппы $H = \langle y \rangle$ и $K = \langle yx^6 \rangle$ сопряжены в D_8 , но не перестановочны. Отметим, что H субнормальна в HD_8 . Заметим также, что H не субнормальна в S_8 .

Применяя лемму 7, в качестве следствий из теорем 1 и 2 получаем следующие результаты.

Следствие 2. Если группа $G = AB$ является произведением своих $F(G)$ -сопряженно-перестановочных нильпотентных подгрупп A и B , то G нильпотентна.

Следствие 3. Пусть группа $G = AB$ – произведение своих $F(G)$ -сопряженно-перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) коммутант G' группы G нильпотентен;
- 2) G метанильпотентна и

$$(|G : A|, |G : B|) = 1;$$

- 3) $G' = A'B'$;

4) одна из подгрупп A или B нильпотентна и нормальна в G , то G сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Between Nilpotent and Soluble / H.G. Bray [et al.]; ed. M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – P. 8.
2. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 318–326.
3. Friesen, D.R. Products of normal supersoluble subgroups / D.R. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.
4. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11(426). – С. 10–14.
5. Васильев, А.Ф. Относительно радикальные локальные формации конечных групп / А.Ф. Васильев, Д.Н. Симоненко // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(27). – С. 19–25.
6. Ballester-Bolinchés, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinchés, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, 2010. – 348 p.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 322 с.
9. Ведерников, В.А. О π -свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 13–19.
10. Foguel, T. Conjugate-Permutable Subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1997. – Vol. 191. – P. 235–239.
11. Murashka, V.I. On Partially Conjugate-Permutable Subgroups of Finite Groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1206.0185v1, 1 Jun 2012.

Поступила в редакцию 18.07.2012. Принята в печать 24.08.2012

Адрес для корреспонденции: 246000, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, УО «ГТУ им. Ф. Скорины», математический факультет, e-mail: MVImath@yandex.by – Мурашко В.И.