УДК 512.542

О произведениях частично субнормальных подгрупп конечных групп

В.И. Мурашко, А.Ф. Васильев
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Пусть R – подмножество элементов группы G. Подгруппу H группы G назовем R-субнормальной подгруппой, если H является субнормальной подгруппой в <H, R>. Используя данное понятие, мы доказываем достаточные признаки нильпотентности и сверхразрешимости конечной группы G, представимой в произведение своих R-субнормальных подгрупп, где $R = F(G)$ *является подгруппой Фиттинга G. В частности, установлена нильпотентность группы* $G = AB$*, где A и B –* $F(G)$*-субнормальные нильпотентные подгруппы группы G. Также получено, что группа* $G = AB$*, являющаяся произведением своих* $F(G)$*-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B, сверхразрешима, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) *коммутант G′ группы G нильпотентен;* 2) *G метанильпотентна и подгруппы A и B имеют взаимно простые индексы;* 3) $G' = A'B'$; 4) *одна из подгрупп A или B нормальна и нильпотентна.*

Ключевые слова: *конечная группа, произведение подгрупп, субнормальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, подгруппа Фиттинга, коммутант.*

On the Products of Partially Subnormal Subgroups of Finite Groups

V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev
Education establishment «Gomel State University of Francisk Skorina»

Let R be a subset of a group G. A subgroup H of G will be called R-subnormal subgroup if H is a subnormal subgroup of <H, R>. Using this concept, we will prove some sufficient conditions for the nilpotency and supersolubility of finite group G, represented by the product of its R-subnormal subgroups, where $R = F(G)$ *is the Fitting subgroup of G. In particular, we have proved the nilpotency of the group* $G = AB$ *which is the product of its* $F(G)$*-subnormal nilpotent subgroups A and B. It also has been found that the group* $G = AB$*, which is the product of its* $F(G)$*-subnormal supersoluble subgroups A and B, is supersolvable if at least one of the following conditions is held:* 1) *the commutator* subgroup *G' group G is nilpotent;* 2) *G is metanilpotent and subgroups A and B have relatively prime indices;* 3) $G' = A'B'$; 4) *one of the subgroups A or B is normal and nilpotent.*

Key words: *finite group, product of subgroups, subnormal subgroup, nilpotent group, supersoluble group, Fitting subgroup, commutator subgroup.*

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известен результат Фиттинга о том, что группа, представимая в произведение своих нормальных (субнормальных) нильпотентных подгрупп, является нильпотентной. Существуют примеры [1] несверхразрешимых групп, являющихся произведением своих субнормальных сверхразрешимых подгрупп. С другой стороны, Бэр в [2] показал, что если группа G является произведением своих двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и ее коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима. Фриссен [3] заметил, что если группа есть произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, имеющих взаимно простые индексы в ней, то она сверхразрешима. Также хорошо известно, что произведение нормальной нильпотентной подгруппы на нормальную сверхразрешимую подгруппу всегда сверхразрешимо. Перечисленные выше пезультаты развивались многими авторами в различных направлениях (см., например, [4–6]).

В настоящей работе мы вводим следующее определение.

Определение 1. *Пусть R – подмножество элементов группы G. Подгруппу H группы G назовем R-субнормальной подгруппой, если H является субнормальной подгруппой в* $\langle H, R\rangle$.

Основной целью данной работы является обобщение отмеченных выше классических результатов для групп, представимых в произведение своих R-субнормальных подгрупп, в случае, когда R совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$ группы G. Заметим, что всякая субнормальная подгруппа является $F(G)$-субнормальной. Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе степени 4. Пусть H – силовская 2-подгруппа G. Заметим, что H является абнормальной подгруппой группы G. Нетрудно показать, что $F(G)$ лежит в H. Следовательно, H является $F(G)$-субнормальной подгруппой группы G.

Теорема 1. *Если группа $G=AB$ является произведением своих $F(G)$-субнормальных нильпотентных подгрупп A и B, то G нильпотентна.*

Следствие 1. *Пусть группа $G = AB$ является произведением нильпотентных подгрупп A и B. Если $F(G) \subseteq A \cap B$, то G нильпотентна.*

Следующий пример показывает, что если группа G содержит две $F(G)$-субнормальные сверхразрешимые подгруппы A и B взаимно простых индексов в G (в этом случае, $G = AB$), то она необязательно сверхразрешима.

Пример 2. Пусть G – группа, изоморфная симметрической группе степени 3. По теореме 10.3B [7] существует точный неприводимый F_7G-модуль V размерности 2 над полем F_7. Пусть T – полупрямое произведение V и G. Пусть $A = VG_3$ и $B = VG_2$, где G_p – силовская p-подгруппа G и $p \in \{2,3\}$. Так как $7 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ для $p \in \{2,3\}$, то легко проверить, что A и B сверхразрешимы. Так как V – точный неприводимый модуль, то $F(T) = V$. Таким образом, A и B – $F(T)$-субнормальные подгруппы T. Заметим, что $T = AB$, но T в силу свойств F_7G-модуля V не является сверхразрешимой группой.

Известно, что если группа содержит две нормальные подгруппы взаимно простых индексов, то ее коммутант есть произведение коммутантов этих подгрупп (см. доказательство теоремы 3.5 из [1, p. 128]).

Теорема 2. *Пусть группа $G = AB$ является произведением своих $F(G)$-субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *коммутант G' группы G нильпотентен*;
2) *G метанильпотентна и*
$$(|G : A|, |G : B|) = 1;$$
3) $G' = A'B'$;
4) *одна из подгрупп A или B нильпотентна и нормальна в G,*

то G сверхразрешима.

Замечание. Теоремы 1 и 2 остаются верными, если вместо $F(G)$ рассматривать любую подгруппу R группы G такую, что $F(G) \subseteq R$.

Предварительные результаты. В работе используются обозначения, определения и результаты из работ [1, 7–8], напомним некоторые из них.

Пусть G – группа. Тогда через E обозначается единичная подгруппа, через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга; через $\Phi(G)$ обозначается подгруппа Фраттини группы G. Если M – подгруппа группы G, то через M_G обозначается максимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в M.

Леммы 1, 2, 4 хорошо известны, и их доказательства можно найти в [7–8].

Лемма 1. *Если факторгруппа $G/\Phi(G)$ нильпотентна, то и группа G нильпотентна*.

Лемма 2. *Если группа G разрешима, то*

1) $\Phi(G) \subset F(G)$ *и* $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$;
2) $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$;
3) *если* $\Phi(G) = E$, *то* $F(G)$ *совпадает с произведением всех минимальных подгрупп группы G.*

Лемма 3. *Пусть группа G есть произведение своих субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима*.

Доказательство. Непосредственно индукцией по порядку группы сводится к теореме Бэра (см., например, [1, p. 9]).

Лемма 4. *Пусть группа G есть произведение своих подгрупп A и B. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $G' = A'B'[A, B]$;
2) $[A, B] \lhd G$;
3) *если одна из подгрупп A или B нормальна в G, то $[A, B]$ в ней содержится*;
4) *пусть G разрешима и π – множество простых чисел. Тогда найдутся такие π-холловы подгруппы G_π, A_π, B_π групп G, A и B соответственно, что $G_\pi = A_\pi B_\pi$.*

Лемма 5. *Если группа G есть произведение нормальной нильпотентной подгруппы и субнормальной сверхразрешимой подгруппы, то G сверхразрешима*.

Доказательство. Пусть $G = AB$, где A – нормальная нильпотентная подгруппа, а B – субнормальная сверхразрешимая подгруппа группы G. Согласно 1) леммы 4 коммутант $G' = A'B'[A, B]$. Так как $A \lhd G$, то по 3) леммы 4 $[A, B] \subseteq A$. Заметим, что $A'[A, B]$ – нормальная нильпотентная подгруппа группы G'. Так как B сверхразрешима, то ее коммутант B' нильпотентен. Имеем, что G' представим в произведение двух своих субнормальных нильпотентных подгрупп $A'[A, B]$ и B'. Следовательно, подгруппа G' нильпотентна. Теперь утверждение леммы вытекает из леммы 3. Лемма доказана.

Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Пусть существуют ненильпотентные группы $G = AB$, являющиеся произведением своих $F(G)$-субнормальных нильпотентных подгрупп A и B. Выберем среди таких групп группу $G = AB$ наименьшего порядка. По теореме Виланда–Кегеля группа G разрешима. Очевидно, что $G \neq E$.

Предположим $\Phi(G) \neq E$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$. Так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ по 1) леммы 2, то

$$G/\Phi(G) = A\Phi(G)/\Phi(G)B\Phi(G)/\Phi(G),$$

где $A\Phi(G)/\Phi(G)$ и $B\Phi(G)/\Phi(G)$ являются $F(G/\Phi(G))$-субнормальными нильпотентными подгруппами группы $G/\Phi(G)$. Так как $|G| > |G/\Phi(G)|$, то $G/\Phi(G)$ нильпотентна. Тогда по лемме 1 группа G нильпотентна. Это противоречит выбору группы G.

Можно считать, что $\Phi(G) = E$. Рассмотрим подгруппу $R = AF(G)$. Так как A субнормальна в $\langle A, F(G)\rangle = AF(G)$, то из нильпотентности A и $F(G)$ следует, что $R = AF(G)$ нильпотентна. Аналогично устанавливается нильпотентность подгруппы $T = BF(G)$.

Покажем, что в G найдется ненормальная максимальная подгруппа M, не содержащая $F(G)$. Допустим противное. Так как G разрешима и ненильпотентна, то $G \neq F(G) \neq E$. Тогда по утверждению 3) леммы 2 $F(G) = N_1\times \ldots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1, \ldots, t$. Пусть $i \in \{1, \ldots, t\}$. Так как $\Phi(G) = E$, то для N_i найдется максимальная подгруппа M_i группы G такая, что $M_iN_i = G$. Заметим, что $M_iF(G) = G$. Согласно допущению имеем, что $M_i \triangleleft G$. Так как N_i абелева, то $N_i \subseteq C_G(N_i)$. Из $M_i \cap N_i = 1$ и $M_i \triangleleft G$ следует, что $M_i \subseteq C_G(N_i)$. Но тогда $G = M_iN_i \subseteq C_G(N_i)$ для любого $i = 1, \ldots, t$. Отсюда и из 2) леммы 2 заключаем, что $G \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Следовательно, G нильпотентна. Получили противоречие с выбором G.

Таким образом, в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M, не содержащая $F(G)$. Так как G разрешима, то согласно теореме 2 из [9] существует силовская p-подгруппа G_p группы такая, что ее нормализатор $\mathrm{N}_G(G_p)$ содержится в M.

С другой стороны, ввиду 4) леммы 4 в R и T существуют p'-холловы подгруппы $R_{p'}$ и $T_{p'}$ соответственно и силовские p-подгруппы R_p и T_p соответственно такие, что $R_{p'}T_{p'}$ – p'-холлова подгруппа группы G, а $R_pT_p = G_p$. Из нильпотентности подгрупп R и T следует, что $R = R_{p'} \times R_p$ и $T = T_{p'} \times T_p$. Поэтому $[R_{p'} \cap T_{p'}, R_pT_p] = E$. Откуда получаем, что $R_{p'} \cap T_{p'} \subseteq \mathrm{N}_G(R_pT_p) = \mathrm{N}_G(G_p)$. Так как $F(G) \subseteq R \cap T$, то нетрудно заметить, что $F(G) \subseteq \mathrm{N}_G(G_p) \subseteq M$. Получили противоречие с выбором M. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Так как $F(G) \subseteq A \cap B$, то нетрудно видеть, что A и B являются $F(G)$-субнормальными подгруппами. Теперь результат следует из теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что G' нильпотентна. Так как $F(G)$ нильпотентна, то по лемме 5 подгруппа $K = AF(G)$ сверхразрешима. Аналогично устанавливается сверхразрешимость подгруппы $R = BF(G)$. Так как G' нильпотентна, то группа $G/F(G) = K/F(G)R/F(G)$ абелева. Откуда следует, что $K/F(G)$ и $R/F(G)$ – нормальные подгруппы в $G/F(G)$. Теперь наше утверждение следует из леммы 3.

Предположим, что G метанильпотентна и $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $K = AF(G)$ сверхразрешима по лемме 5. Аналогично доказывается, что подгруппа $R = BF(G)$ сверхразрешима. Имеем $G/F(G)=K/F(G)R/F(G)$. Так как G метанильпотентна, то $G/F(G)$ нильпотентна. Поэтому $K/F(G)$ и $R/F(G)$ являются субнормальными подгруппами в $G/F(G)$. Следовательно, K и R – субнормальные подгруппы в G. По теореме 3.5 (см. [1], p. 128) G сверхразрешима, что и завершает доказательство пункта 2) теоремы.

Для доказательства оставшихся пунктов теоремы 2 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть группа $G = AB$ – произведение $F(G)$-субнормальных подгрупп A и B, имеющих нильпотентный коммутант. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) $G' = A'B'$;

2) *одна из подгрупп A и B нильпотентна и нормальна в G, то коммутант G' группы G нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $G' = A'B'$. Тогда из характеристичности подгруппы A' в A следует, что A' субнормальна в $AF(G)$, в частности, A' субнормальна в $A'F(G)$. Следовательно, A' – $F(G)$-субнормальная подгруппа группы G. Аналогично доказывается $F(G)$-субнормальность подгруппы B'. Так как G' – нормальная подгруппа группы G, то $F(G') \subseteq F(G)$. Заметим, что коммутанты A' и B' являются $F(G')$-субнормальными нильпотентными подгруппами группы G'. Теорема 1 завершает доказательство пункта 1) леммы 6.

Предположим, что одна из подгрупп A и B нильпотентна и нормальна в G. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что A – нормальная нильпотентная подгруппа группы G. Так как $A' \operatorname{char} A \triangleleft G$, то $A' \triangleleft G$. Так как $[A, B] \subseteq A$ по 3) леммы 4, то $[A, B]$ нильпотентна. Так как $[A, B] \triangleleft G$, то $A'[A, B]$ – нормальная нильпотентная подгруппа, в частности,

$F(G')$-субнормальная подгруппа группы G'. Рассуждая, как в пункте 1), получаем, что B' является $F(G')$-субнормальной нильпотентной подгруппой группы G'. Так как $A' \lhd G$, то ввиду 1) леммы 2 $G' = A'B'[A, B] = B'\ A'[A, B]$. Отсюда по теореме 1 получаем нильпотентность G'. Лемма 6 доказана.

Окончание доказательства теоремы 2. Пункты 3) и 4) теоремы следуют из леммы 6 и пункта 1) теоремы. Теорема доказана.

Заключение. Полученные выше теоремы могут быть использованы при изучении свойств групп, представимых в произведение своих нильпотентных и сверхразрешимых подгрупп с различными условиями перестановочности для подгрупп.

Напомним, что подгруппы H и K группы G называются перестановочными, если $HK = KN$, что эквивалентно тому, что множество HK является подгруппой в G. В работе [10] Т. Фогелем было введено понятие сопряженно-перестановочной подгруппы. Подгруппа H группы G называется сопряженно-перестановочной, если H перестановочна со всеми своими сопряженными подгруппами H^x, $x \in G$. В работе [10] было показано, что если H является сопряженно-перестановочной подгруппой группы G, то H субнормальна в G.

Для того чтобы развить данную концепцию, нами в работе [11] было введено следующее

Определение 2. *Пусть R – подмножество элементов группы G. Подгруппа H группы G называется R-сопряженно-перестановочной, если $HH^x = H^xH$ для всех $x \in R$.*

Лемма 7. *Пусть H и R – подгруппы группы G, причем $RH = HR$. Если H является R-сопряженно-перестановочной, то H субнормальна в подгруппе RH.*

Доказательство. *Пусть* $k \in HR$. Тогда $k = hr$, где $h \in H$ и $r \in R$. Так как подгруппа H является R-сопряженно-перестановочной, то $HH^k = HH^{hr} = HH^r = H^r H = H^{hr} H = H^k H$. Следовательно, H является сопряженно-перестановочной подгруппой группы HR. Теперь результат следует из следствия 1.1 [10]. Лемма доказана.

Как показывает следующий пример, обратное утверждение к лемме 7 неверно.

Пример 3. Рассмотрим симметрическую группу S_8 степени 8 и ее подгруппу, изоморфную группе вращений правильного восьмиугольника $D_8 = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1,\ yxy = x^7\rangle$. Нетрудно проверить, что подгруппы $H = \langle y\rangle$ и $K = \langle yx^6\rangle$ сопряжены в D_8, но не перестановочны. Отметим, что H субнормальна в HD_8. Заметим также, что H не субнормальна в S_8.

Применяя лемму 7, в качестве следствий из теорем 1 и 2 получаем следующие результаты.

Следствие 2. *Если группа $G=AB$ является произведением своих $F(G)$-сопряженно-перестановочных нильпотентных подгрупп A и B, то G нильпотентна.*

Следствие 3. *Пусть группа $G = AB$ – произведение своих $F(G)$-сопряженно-перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) *коммутант G' группы G нильпотентен*;

2) *G метанильпотентна и*

$$(|G : A|,|G : B|) = 1;$$

3) $G' = A'B'$;

4) *одна из подгрупп A или B нильпотентна и нормальна в G, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Between Nilpotent and Soluble / H.G Bray [et al.]; ed. M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – P. 8.
2. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 318–326.
3. Friesen, D.R. Products of normal supersoluble subgroups / D.R. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – P. 46–48.
4. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 11(426). – С. 10–14.
5. Васильев, А.Ф. Относительно радикальные локальные формации конечных групп / А.Ф. Васильев, Д.Н. Симоненко // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(27). – С. 19–25.
6. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, 2010. – 348 p.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 322 с.
9. Ведерников, В.А. О π-свойствах конечных групп / В.А. Ведерников // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 13–19.
10. Foguel, T. Conjugate-Permutable Subgroups / T. Foguel // J. Algebra. – 1997. – Vol. 191. – P. 235–239.
11. Murashka, V.I. On Partially Conjugate-Permutable Subgroups of Finite Groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1206.0185v1, 1 Jun 2012.

Поступила в редакцию 18.07.2012. Принята в печать 24.08.2012

Адрес для корреспонденции: 246000, г. Гомель, ул. Советская, д. 104, УО «ГГУ им. Ф. Скорины», математический факультет, e-mail: MVImath@yandex.by – Мурашко В.И.