УДК 512.542

О стоуновых решетках кратно насыщенных формаций

Н.Н. Воробьев*, А.П. Мехович**

**Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»*

***Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L_n^{\tau}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если же τ-замкнутая формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена, то через $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех ее τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций.

В настоящей работе описаны τ-замкнутые n-кратно насыщенные (тотально насыщенные) формации со стоуновой решеткой τ-замкнутых n-кратно насыщенных (тотально насыщенных) подформаций. В частности, доказаны следующие теоремы.

***Теорема 1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка $L_n^{\tau}(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Теорема 2.** Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Ключевые слова:** τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация, τ-замкнутая тотально насыщенная формация, псевдодополнение, стоунова решетка.*

On Stone lattices of multiply saturated formations

N.N. Vorob'ev*, A.P. Mekhovich**

**Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

***Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»*

Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed n-multiply saturated formation. The symbol $L_n^{\tau}(\mathfrak{F})$ denotes the lattice of all τ-closed n-multiply saturated subformations of $\mathfrak{F}$. If $\mathfrak{F}$ is a τ-closed totally saturated formation, then the symbol $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{F})$ denotes the lattice of all τ-closed totally saturated subformations of $\mathfrak{F}$.

In this paper τ-closed n-multiply saturated (τ-closed totally saturated) formations with Stone lattice of τ-closed n-multiply saturated (τ-closed totally saturated) subformations are described. In particular, we prove the following theorems.

***Theorem 1.** Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed n-multiply saturated formation. Then $L_n^{\tau}(\mathfrak{F})$ is a Stone lattice if and only if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Theorem 2.** Let $\mathfrak{F}$ be a τ-closed totally saturated formation. Then $L_{\infty}^{\tau}(\mathfrak{F})$ is a Stone lattice if and only if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

***Key words:** τ-closed n-multiply saturated formation, τ-closed totally saturated formation, pseudocomplement, Stone lattice.*

Все рассматриваемые нами группы конечны. Используется стандартная терминология [1–5].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В различных приложениях теории классов групп часто приходится использовать формации, замкнутые относительно той или иной системы подгрупп. Понятие подгруппового функтора (в терминологии А.Н. Скибы) охватывает все рассматриваемые при этом системы подгрупп, что позволяет использовать подгрупповые функторы как аппарат исследования классов групп.

Пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что *τ – подгрупповой функтор* [4], если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \alpha B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* [4], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем для всякого непустого множества простых чисел π через $\mathfrak{S}_{\pi}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$ (1) обозначают соответственно класс всех разрешимых π-групп, класс всех нильпотентных групп, класс всех p-групп и класс всех единичных групп. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп $\mathfrak{X}$, $F_p(G)$ – наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f:\ \Pi \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \qquad (*)$$

Следуя [3–4], сопоставим функции f вида $(*)$ класс групп

$$LF(f) = (G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида $(*)$, то $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной формацией* с *локальным спутником* f.

Всякая формация считается 0-*кратно насыщенной*. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно насыщенной* [6], если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где все непустые значения локального спутника f являются $(n-1)$-кратно насыщенными формациями. Если формация $\mathfrak{F}$ n-кратно насыщена для всех натуральных n, то $\mathfrak{F}$ называется *тотально насыщенной*.

Пусть L – решетка с нулем. Тогда элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a $(\in L)$, если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует, что $x \leq a^*$. Решетка с нулем называется *решеткой с псевдодополнениями*, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1,$$

называется *стоуновой решеткой*.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если же τ-замкнутая формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена, то через $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех ее τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций.

В 1986 г. А.Н. Скибой [7] начато изучение решеток формаций групп. В частности, была доказана модулярность решетки всех (насыщенных) формаций (см. [7]). В дальнейшем целая серия работ различных авторов была посвящена поиску модулярных и дистрибутивных решеток формаций. В монографии [4] доказано, что решетка l_n^τ всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций модулярна, но не дистрибутивна. В то же время решетка l_∞^τ всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций дистрибутивна [8]. Отмеченные результаты наталкивают на мысль изучать насыщенные формации в зависимости от свойств решеток их подформаций.

Целью данной работы является описание τ-замкнутых n-кратно насыщенных (тотально насыщенных) формаций со стоуновой решеткой τ-замкнутых n-кратно насыщенных (тотально насыщенных) подформаций. На пути достижения поставленной цели доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ стоунова в том и только в том случае, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Кроме того, доказано, что решетка $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов (теорема 3).

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Следуя [4], через $\underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ мы обозначаем класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, …, $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$. В частности, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$, то пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$. Такая конструкция ранее изучалась в работах [9–12].

Схемы доказательств теоремы 1 и теоремы 2 представлены следующими леммами.

Лемма 1 (теорема [10]). *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута n-кратно насыщена в том и только в том случае, если τ-замкнута n-кратно насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Непосредственно из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$ таких, что $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута тотально насыщена в том и только в том случае, если τ-замкнута тотально насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ и называют *формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}=\{G\}$, то пишут $\mathrm{form}\,G$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* (см. [4]).

Элемент a решетки с нулем L называется *атомом*, если для любого $x\in L$ из $0<x\leq a$ следует, что $x=a$ (т.е. если a *покрывает* наименьший элемент 0).

Лемма 3 (лемма 4.3.11 [4]). *Пусть* $\mathfrak{F}=l_n^\tau \mathrm{form} G$ *– однопорожденная τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда решетка* $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ *имеет лишь конечное число атомов.*

Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *дополняемой* в $\mathfrak{F}$ [13], если $\mathfrak{M}$ дополняема в решетке всех подформаций формации $\mathfrak{F}$, т.е. если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (*дополнение* к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что

$$\mathfrak{F}=\mathrm{form}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H});\quad \mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}=(1).$$

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда если формация* $\mathfrak{N}_p$ *дополняема в решетке* $L_n^\tau(\mathfrak{F})$ *для каждого* $p\in\pi(\mathfrak{F})$, *то* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда если формация* $\mathfrak{N}_p$ *дополняема в решетке* $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ *для каждого* $p\in\pi(\mathfrak{F})$, *то* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}$.

Для произвольного класса групп $\mathrm{F}\supseteq(1)$ символ G^{F} обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N\in\mathrm{F}$. Пусть M и H – некоторые формации. Если $\mathrm{H}\neq\varnothing$, то через MH обозначают класс всех тех групп G, для которых $G^{\mathrm{H}}\in\mathrm{M}$. Класс MH называется *произведением формаций* M и H [1].

Лемма 6 (лемма 12 [14]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая τ-замкнутая формация, π – такое множество простых чисел, что* $\pi(\mathfrak{F})\subseteq\pi$. *Тогда произведение* $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{F}$ *является τ-замкнутой тотально насыщенной формацией.*

Следуя [4], для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i\mid i\in I\}$ определим их пересечение $\tau=\bigcap_{i\in I}\tau_i$ следующим образом:

$$\tau(G)=\bigcap_{i\in I}\tau_i(G)$$

для любой группы G из совокупности групп $\mathfrak{X}$. Через $\mathrm{S}_\tau\mathfrak{X}$ обозначают множество всех таких групп H, что $H\in\tau(G)$ для некоторой группы $G\in\mathfrak{X}$. Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, для которых $\tau\leq\tau_i$.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ символом $\mathrm{Q}(\mathfrak{X})$ обозначают множество всех гомоморфных образов всех групп из $\mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *полуформацией*, если $\mathfrak{F}=\mathrm{Q}\mathfrak{F}$ [4].

Лемма 7 (лемма 1.2.22 [4]). *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\tau\mathrm{form}\,\mathfrak{X}=\mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

Лемма 8 (лемма 2.4 [1]). $\mathrm{QR_0Q}=\mathrm{QR_0}$.

Лемма 9 (лемма 1.2.21[4]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– τ-замкнутая полуформация, порожденная совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. *Тогда*

$$\mathfrak{F}=\mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X}).$$

Лемма 10 (теорема 2.2 [1]). *Для любого класса* $\mathfrak{X}$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{form}\,\mathfrak{X}=\mathrm{QR_0}\mathfrak{X}.$$

Лемма 11 (следствие 1.2.23 [4]). *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– произвольная совокупность групп,* $\mathfrak{M}=\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$. *Тогда*

$$\tau\mathrm{form}\,\mathfrak{M}=\mathrm{form}\,\mathfrak{M}.$$

Неединичная группа G называется *монолитической*, если в ней имеется единственная минимальная нормальная подгруппа (*монолит* группы G) [5].

Лемма 12 (лемма 2.1.6 [4]). *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом,* $\mathfrak{M}$ *– некоторая τ-замкнутая полуформация и* $A\in l_n^\tau\mathrm{form}\mathfrak{M}$. *Тогда* $A\in\mathfrak{M}$.

Лемма 13 (теорема 4.6 [15]). *Абелева простая группа является циклической группой простого порядка.*

Цоколем группы G называется подгруппа, являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G. Цоколь группы G обозначается через $\mathrm{Soc}(G)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}=l_\infty^\tau\mathrm{form}\,G$ *– однопорожденная τ-замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда решетка* $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$ *имеет лишь конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_\infty^\tau(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M}=l_\infty^\tau\mathrm{form}\,A$ для некоторой простой группы A. Пусть A – неабелева группа и $\pi=\pi(G)$. В силу леммы 6 $\mathfrak{S}_\pi l_0^\tau\mathrm{form}\,G\in l_\infty^\tau$. Следовательно, имеет место включение

$$\mathfrak{F}=l_\infty^\tau\mathrm{form}\,G\subseteq\mathfrak{S}_\pi l_0^\tau\mathrm{form}\,G.$$

Так как $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$, то $A\in\mathfrak{F}$. Значит, $A\in\mathfrak{S}_\pi l_0^\tau\mathrm{form}\,G$. Поскольку A – простая группа, то A – монолитическая группа с неабелевым монолитом $\mathrm{Soc}(A)=A$. Значит, $A\in l_0^\tau\mathrm{form}\,G$.

По лемме 7 $l_0^\tau \mathrm{form}\, G = \tau \mathrm{form}\, G = \mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(G)$. Отсюда $A \in \mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(G)$. В силу леммы 8

$$\mathrm{QR}_0\mathrm{S}_{\overline{\tau}}(G) = \mathrm{QR}_0\mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(G) = \mathrm{Q}\left(\mathrm{R}_0\mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(G)\right) =$$

$$= \mathrm{Q}\left(\mathrm{R}_0\left(\mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(G)\right)\right) = \mathrm{Q}\left(\mathrm{R}_0\mathsf{H}\right) = \mathrm{QR}_0\mathsf{H},$$

где, согласно лемме 9, $\mathsf{H} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}(G)$ – τ-замкнутая полуформация, порожденная группой G. По леммам 10 и 11

$$\mathrm{QR}_0\mathsf{H} = \mathrm{form}\mathsf{H} = \tau\mathrm{form}\mathsf{H} = l_0^\tau \mathrm{form}\mathsf{H}.$$

Итак, $A \in l_0^\tau \mathrm{form}\, \mathsf{H}$. Но тогда по лемме 12 $A \in \mathsf{H} = \mathrm{QS}_{\overline{\tau}}G$. Это означает, что в решетке $L_\infty^\tau(\mathsf{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть A – абелева группа. Тогда по лемме 13 $|A| = p$ – простое число, где $p \in \pi = \pi(G)$. Класс всех π-групп $\mathfrak{G}_\pi$ – τ-замкнутая тотально насыщенная формация (см. [2, с. 24]). Поэтому из того, что $A \in \mathfrak{G}_\pi$, следует

$$\mathsf{M} = l_\infty^\tau \mathrm{form}\, A \subseteq \mathsf{G}_\pi.$$

Но π – конечное множество. Поэтому в $\mathfrak{G}_\pi$ имеется лишь конечное число τ-замкнутых тотально насыщенных подформаций, порожденных простой группой A порядка $p \in \pi = \pi(G)$. Это означает, что в решетке $L_\infty^\tau(\mathsf{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант докторанта М12–06, № гр. 20120919; грант аспиранта 36/12, № гр. 20121177).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
3. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
6. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
7. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп : труды Гомельск. сем. / Ин-т математики АН БССР ; под ред. М.И. Слука. – Минск, 1986. – С. 135–149.
8. Safonov, V.G. On a question of A.N. Skiba about totally saturated formations / V.G. Safonov // Algebra and Discrete Mathematics. – 2008. – № 3. – С. 88–97.
9. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях n-кратно ω-насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 48–51.
10. Воробьев, Н.Н. Об одном классе прямо разложимых обобщенно насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 34–38.
11. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.
12. Мехович, А.П. Прямые разложения τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 49–53.
13. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельск. сем. / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
14. Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сибирск. матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.
15. Suzuki, M. Group theory I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 247 / M. Suzuki. – Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1982. – 434 p.

Поступила в редакцию 18.07.2012. Принята в печать 24.08.2012

Адрес для корреспонденции: 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104,
e-mail: vornic2001@yahoo.com – Воробьев Н.Н.