

О проблеме Бейдельмана–Брюстера–Хаука в теории фиттинговых функторов

Е.А. Витько

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Фиттинговым $\mathcal{X}$ -функтором называется отображение f , сопоставляющее каждой группе $G \in \mathcal{X}$ непустое множество ее $\mathcal{X}$ -подгрупп $f(G)$ такое, что выполняются следующие условия: (i) если $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$; (ii) если N – нормальная подгруппа группы G , то $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$. В работе решена обобщенная версия проблемы Бейдельмана–Брюстера–Хаука для сопряженного Λ -нормально вложенного π -разрешимого фиттингова функтора f : описано строение функтора f_* – наименьшего по сильному вложению элемента секции Локетта функтора f . При этом секцией Локетта сопряженного фиттингова $\mathcal{X}$ -функтора f называется множество $\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ – сопряженный фиттингов } \mathcal{X}\text{-функтор и } f^* = g^*\}$, где f^* – отображение, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathcal{X}$ множество $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Ключевые слова: оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов $\mathcal{X}$ -функтор.

On the problem of Beidleman–Brewster–Hauck in the theory of Fitting functors

E.A. Vitko

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Let $\mathcal{X}$ be a non-empty Fitting class. A map f that assigns to each group $G \in \mathcal{X}$ a non-empty set of its $\mathcal{X}$ -subgroups $f(G)$ is a Fitting $\mathcal{X}$ -functor provided that the following hold: (i) if $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ is an isomorphism, then $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$; (ii) if N is a normal subgroup of a group G , then $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$. In this paper we solved a generalized version of the problem of Beidleman–Brewster–Hauck for the conjugate Λ -normally embedded π -soluble Fitting functor f . Let f_* be the smallest element of the Lockett section of the Fitting functor f . We presented a description of f_* . By the Lockett section of a conjugate Fitting $\mathcal{X}$ -functor f we mean the set $\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ is a conjugate Fitting } \mathcal{X}\text{-functor and } f^* = g^*\}$ and f^* is a map that assigns to each group $G \in \mathcal{X}$ a set $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Key words: Lockett's, operation, Lockett section, Fitting $\mathcal{X}$ -functor.

В работе рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathcal{X}$ называется классом Фиттинга, если $\mathcal{X}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathcal{X}$ -подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathcal{X}$ в любой группе G существует единственная $\mathcal{X}$ -максимальная нормальная подгруппа $G_{\mathcal{X}}$ группы G .

В исследовании структуры классов и их характеристики определяющую роль играют отображения « $*$ » и « $_{*}$ » – операторы Локетта [1] (см. также гл. X [2]), которые определяются свойствами прямых произведений радикалов групп следующим образом. Каждому непустому классу Фиттинга $\mathcal{F}$ оператор « $*$ » сопоставляет класс $\mathcal{F}^*$ – наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathcal{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathcal{F}^*} = G_{\mathcal{F}^*} \times H_{\mathcal{F}^*}$, и « $_{*}$ » – класс $\mathcal{F}_{*}$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathcal{X}$, для которых $\mathcal{X}^* = \mathcal{F}^*$. В последующем классы Фиттинга стали называть классами Ло

кетта, если $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$. Множество всех таких классов Фиттинга $\mathcal{X}$, что $\mathcal{F}^* = \mathcal{X}^*$, называют [2] секцией Локетта класса Фиттинга $\mathcal{F}$ и обозначают $\text{Locksec}(\mathcal{F})$. Основопологающим моментом для многих исследований в теории классов явился тот факт, что каждая секция Локетта класса Фиттинга $\mathcal{F}$ содержит наименьший и наибольший по включению и по сильному вложению элементы, которыми являются классы Фиттинга $\mathcal{F}_{*}$ и $\mathcal{F}^*$ соответственно (см., например, теорему X.1.17 [2]).

Пусть $\mathcal{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Синтезируя понятия радикала и инъектора, в работе [3] мы определяем понятие фиттингова $\mathcal{X}$ -функтора как отображения f , сопоставляющего каждой группе $G \in \mathcal{X}$ непустое множество ее $\mathcal{X}$ -подгрупп $f(G)$ такое, что выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha: G \rightarrow \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$;

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G , то $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$.

Фиттингов $\times$ -функтор мы называем сопряженным, если для каждой группы $G \in \times$, множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G . Заметим, что в случае, когда $\times = \mathcal{S}$ классу всех конечных разрешимых групп, фиттинговы $\mathcal{S}$ -функторы изучались в серии крупных работ [4–6]. В частности, если $\mathcal{F}$ – непустой класс Фиттинга, то отображения $f = \text{Inj}_{\mathcal{F}}$ и $g = \text{Rad}_{\mathcal{F}}$, сопоставляющие каждой группе $G \in \mathcal{S}$ множества $\text{Inj}_{\mathcal{F}}(G)$ ее $\mathcal{F}$ -инъекторов и $\text{Rad}_{\mathcal{F}}(G)$ ее $\mathcal{F}$ -радикалов, являются примерами фиттинговых $\mathcal{S}$ -функторов (см. например, лемму IX.1.1 [2] и замечание IX.1.3 [2]). Введем на множестве сопряженных фиттинговых $\times$ -функторов отношение “ $\sqsubseteq$ ” следующим образом. Если f и g – сопряженные фиттинговы $\times$ -функторы, то функтор f назовем сильно вложенным в g и обозначим $f \sqsubseteq g$ в том и только в том случае, когда для любой подгруппы $X \in f(G)$ существует такая подгруппа $Y \in g(G)$, что $X \leq Y$.

В связи с этим естественен поиск функторных аналогов операторов Локетта и секции Локетта, в частности, определения $\times$ -функтора Локетта и секции Локетта таких функторов. Исследованиям в этом направлении были посвящены работы [5; 7]. В [7] нами определено понятие секции Локетта для произвольного фиттингова $\times$ -функтора и доказано существование наибольшего и наименьшего по сильному вложению элементов секции Локетта для любого сопряженного фиттингова $\times$ -функтора (теорема 3.3 [7]) и для сопряженного фиттингова $\times$ -функтора с заданными свойствами (теорема 3.7 [7]) соответственно. Вместе с тем одной из трудных задач даже в специальных случаях $\mathcal{S}$ -функтора является задача описания наименьшего по сильному вложению элемента секции Локетта. Ориентиром для таких исследований служит следующая

Проблема (Бейдельман, Брюстер, Хаук [5, проблема 8 (7)]): *описать строение наименьшего элемента f_* секции Локетта для нормально вложенного сопряженного фиттингова $\mathcal{S}$ -функтора f . В частности, является ли f_* произведением фиттинговых $\mathcal{S}$ -функторов f и $\text{Rad}_{\mathcal{S}}$, если $f = \text{Hall}_{\pi}$?*

Положительное решение данной проблемы было получено в [6]. Основная цель настоящей работы – положительное решение обобщенной версии указанной проблемы. Нами получено

полное описание строения функтора f_* для нормально вложенного π -разрешимого функтора f .

В определениях и обозначениях мы следуем [2].

Напомним, что подгруппа H группы G называется пронормальной в G , если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$. Подгруппу X группы G называют π -нормально вложенной, если холлова π -подгруппа группы X является холловой π -подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G .

Мы будем использовать следующую классификацию $\times$ -функторов из [3]. Фиттингов $\times$ -функтор мы называем

1) *π -разрешимым*, если $\times = \mathcal{S}^{\pi}$ классу всех π -разрешимых групп;

2) *наследственным*, если класс $\times$ наследственен;

3) *пронормальным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G ;

4) *π -нормально вложенным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π -нормально вложенной подгруппой группы G .

Если f и g – наследственные фиттинговы $\times$ -функторы, то их произведением называется [8] отображение $f \circ g$, сопоставляющее каждой группе $G \in \times$ непустое множество подгрупп $\{X: X \in f(Y) \text{ для некоторой подгруппы } Y \in g(G)\}$, которое по теореме 2.4 [3] является фиттинговым $\times$ -функтором.

Если f – фиттингов $\times$ -функтор, то множество всех простых чисел p , для которых существуют такая группа $G \in \times$ и подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем $|X|$, называют характеристикой функтора f и обозначают $\text{Char } f$.

Следуя [2] (см. также [9], определение 20.2 [10]), холловой системой π -разрешимой группы G будем называть такое множество Σ холловых подгрупп из G , что выполняются следующие условия:

1) для всякого множества p из π множество Σ содержит в точности одну холлову p -подгруппу и в точности одну холлову $(p \cup \pi')$ -подгруппу;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Пусть Σ – холлова система π -разрешимой группы G и R – подгруппа группы G . Через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R: S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холлова система группы R , то говорят, что Σ редуцирует холлову систему Σ_R подгруппы R и обозначают $\Sigma \sqsubseteq R$. В этом случае Σ называется продолжением холловой системы Σ_R .

Определение 1. Фиттинговы π -разрешимые функторы f и g назовем перестановочными, если $XY = YX$ для любых подгрупп $X \in f(G)$ и $Y \in g(G)$ таких, что существует холлова система группы G , которая редуцируется в X и Y .

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппу A группы G называют π -связанной [11], если либо порядок подгруппы A , либо ее индекс в G является π -числом. Фиттингов $\times$ -функтор будем называть π -связанным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π -связанной подгруппой группы G .

Определение 2. Пусть $\{f_i: i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π -разрешимых π -связанных фиттинговых функторов и $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$ для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Определим операцию $\vee$ следующим образом:

$$(\vee_{i \in I} f_i)(G) = \left\{ \prod_{i \in I} X_i : X_i \in f_i(G), \text{ существует} \right.$$

холлова система группы G , которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I$.

В работе [11] доказано, что π -связанная подгруппа H π -разрешимой группы G пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холлова система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H , а также, что произведение π -связанных пронормальных перестановочных подгрупп π -разрешимой группы является π -связанной пронормальной подгруппой. В связи с этим можно определить операцию $\vee$ на множестве пронормальных π -разрешимых фиттинговых функторов. Это представляет

Лемма 1. Пусть $\{f_i: i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π -разрешимых π -связанных фиттинговых функторов и $\text{Char } f_i \cap \text{Char } f_j = \emptyset$ для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Тогда $\vee_{i \in I} f_i$ – пронормальный сопряженный π -разрешимый фиттингов функтор.

Пусть I – множество индексов, π – некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i: i \in I\}$ – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbf{P}$.

Следуя [6], π -разрешимый фиттингов функтор f назовем Λ -нормально вложенным, если функтор f является π_i -нормально вложенным для всех $\pi_i \in \Lambda$.

Определим теперь на множестве фиттинговых $\times$ -функторов функторную версию извест-

ных в теории классов Фиттинга [1] операторов Локетта и секции Локетта.

Определение 3. Фиттингов $\times$ -функтор назовем $\times$ -функтором Локетта, если для каждой группы $G \in \times$ и $V \in f(G \times G)$ подгруппа

$$V = (V \cap (G \times 1)) \times (V \cap (1 \times G)).$$

Напомним также понятия оператора «*» и секции Локетта фиттингова $\times$ -функтора, которые были предложены нами в [7].

Пусть f – фиттингов $\times$ -функтор и π_1 – проекция первой координаты подгруппы из $G \times G$ в G . Тогда отображение f^* сопоставляет каждой группе $G \in \times$ множество $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Если f – сопряженный фиттингов $\times$ -функтор, то секция Локетта – множество функторов

$$\text{Locksec}(f) = \{g: g \text{ – сопряженный фиттингов } \times\text{-функтор и } g^* = f^*\}.$$

Для доказательства основного результата мы будем использовать также конструкцию класса Фиттинга $L_\pi(f)$, который был определен нами [3] следующим образом. Пусть $\times$ – некоторый непустой класс Фиттинга, f – фиттингов $\times$ -функтор и π – множество простых чисел. Группа $G \in L_\pi(f)$ тогда и только тогда, когда $G \in \times$ и индекс $|G : X|$ является π' -числом для всех $X \in f(G)$.

Нами получены следующие свойства операторов Локетта и класса $L_\pi(f)$.

Лемма 2. Пусть f – сопряженный фиттингов $\times$ -функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) f^* – $\times$ -функтор Локетта;
- 2) если f – сопряженный π -разрешимый функтор Локетта, то $L_\pi(f)$ – класс Локетта;
- 3) если f – сопряженный π -разрешимый фиттингов функтор, то $(L_\pi(f))^* = L_\pi(f^*)$.

Используя свойства холловых π -подгрупп и класса $L_\pi(f)$, полученные нами ранее (следствие 4.3 [3]), мы описываем строение Λ -нормально вложенных π -разрешимых фиттинговых функторов, которое представляет

Лемма 3. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\{\times_i: i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то $f = \vee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{\times_i})$ – сопряженный Λ -нормально вложенный π -разрешимый фиттингов функтор и $L_{\pi_i}(f) = \times_i S_{\pi_i}^\pi$ для всех $\pi_i \in \Lambda$;

- 2) если f – сопряженный π -разрешимый Λ -нормально вложенный фиттингов функтор, то $f = \vee_{\pi_i \in \Lambda} (\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})$;

3) если f и g – сопряженные Λ -нормально вложенные π -разрешимые фиттинговы функторы, то $f \sqsubseteq g$ тогда и только тогда, когда $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$ для всех $\pi_i \in \Lambda$.

Следующая теорема и следствие из нее дает положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана, Брюстера и Хаука и представляет описание наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных Λ -нормально вложенных π -разрешимых фиттинговых функторов.

Теорема. Пусть f – сопряженный Λ -нормально вложенный π -разрешимый фиттингов функтор, f_* – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f . Тогда

$$f_* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{(L_{\pi_i}(f))_*} \right).$$

Доказательство. Пусть

$$X_i = (L_{\pi_i}(f))_* \quad (1)$$

и $h = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{(L_{\pi_i}(f))_*} \right)$. Ввиду утвержде-

ния 1) леммы 3 получим, что h является сопряженным Λ -нормально вложенным фиттинговым функтором и

$$L_{\pi_i}(h) = X_i S_{\pi_i'}^{\pi} \quad (2)$$

для всех $\pi_i \in \Lambda$. Следовательно, с учетом утверждения 3) леммы 2 и (2) получаем, что

$$L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(h)^* = (X_i S_{\pi_i'}^{\pi})^*.$$

Тогда по лемме 3 [12]

$$(X_i S_{\pi_i'}^{\pi})^* = X_i^* S_{\pi_i'}^{\pi}.$$

Используя свойства оператора «*» (см. теорему X.1.15 [2]) и (1), получим

$$X_i^* S_{\pi_i'}^{\pi} = ((L_{\pi_i}(f))_*)^* S_{\pi_i'}^{\pi} = (L_{\pi_i}(f))^* S_{\pi_i'}^{\pi}.$$

Снова используем утверждение 3) леммы 2

$$(L_{\pi_i}(f))^* S_{\pi_i'}^{\pi} = L_{\pi_i}(f^*) S_{\pi_i'}^{\pi} = L_{\pi_i}(f^*).$$

Таким образом, $L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(f^*)$. Теперь, применяя утверждения 2) леммы 3,

$$\begin{aligned} f^* &= \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(f^*)} \right) = \\ &= \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\text{Hall}_{\pi_i} \circ \text{Rad}_{L_{\pi_i}(h^*)} \right) = h^*. \end{aligned}$$

Итак, $h \in \text{Locksec}(f)$.

Пусть g – произвольный π -разрешимый функтор из $\text{Locksec}(f)$. Тогда

$$(L_{\pi_i}(g))^* = L_{\pi_i}(g^*) = L_{\pi_i}(f^*) = (L_{\pi_i}(f))^*.$$

Следовательно, $L_{\pi_i}(g) \in \text{Locksec}(L_{\pi_i}(f))$. Но

тогда для любого $\pi_i \in \Lambda$ получим $X_i = (L_{\pi_i}(f))^* \subseteq L_{\pi_i}(g)$. Кроме того, ввиду (2)

$$L_{\pi_i}(h) = X_i S_{\pi_i'}^{\pi} \subseteq L_{\pi_i}(g) S_{\pi_i'}^{\pi} = L_{\pi_i}(g).$$

Следовательно, по утверждению 3) леммы 3 получим, что $h \sqsubseteq g$. Ввиду произвольности выбора функтора g мы заключаем, что h – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f , то есть $f_* = h$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть π – множество простых чисел, π -разрешимый фиттингов функтор $f = \text{Hall}_{\pi}$ тогда наименьший элемент секции Локетта $f_* = f \circ \text{Rad}_{(S^{\pi})_*}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathbb{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Витько, Е.А. Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.
4. Beidleman, J.C. Fittingfunctoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.
5. Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.
6. Beidleman, J.C. Conjugate π -normally embedded fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.
7. Витько, Е.А. О наименьших и наибольших элементах секции Локетта фиттингова функтора / Е.А. Витько // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 9–14.
8. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларус. навука, 2003. – 254 с.
9. Гольберг, П.А. Холловские θ -базы конечных групп / П.А. Гольберг // Изв. высш. учеб. заведений. – 1961. – № 1(20). – С. 36–43.
10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
11. Сементовский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π -разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2000. – № 3. – С. 55–59.
12. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

Поступила в редакцию 07.06.2012. Принята в печать 24.08.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: alenkavit@tut.by – Витько Е.А.