УДК 512.542

О проблеме Бейдельмана–Брюстера–Хаука в теории фиттинговых функторов

Е.А. Витько
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором называется отображение f, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество ее $\mathfrak{X}$-подгрупп $f(G)$ такое, что выполняются следующие условия: (i) если $\alpha: G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$; (ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$. В работе решена обобщенная версия проблемы Бейдельмана–Брюстера–Хаука для сопряженного Λ-нормально вложенного π-разрешимого фиттингова функтора f: описано строение функтора f_* – наименьшего по сильному вложению элемента секции Локетта функтора f. При этом секцией Локетта сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f называется множество Locksec(f) = {g: g – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и $f^* = g^*$}, где f^* – отображение, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ множество $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Ключевые слова: *оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.*

On the problem of Beidleman–Brewster–Hauck in the theory of Fitting functors

E.A. Vitko
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

Let $\mathfrak{X}$ be a non-empty Fitting class. A map f that assigns to each group $G \in \mathfrak{X}$ a non-empty set of its $\mathfrak{X}$-subgroups $f(G)$ is a Fitting $\mathfrak{X}$-functor provided that the following hold: (i) if $\alpha: G \to \alpha(G)$ is an isomorphism, then $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$; (ii) if N is a normal subgroup of a group G, then $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$. In this paper we solved a generalized version of the problem of Beidleman–Brewster–Hauck for the conjugate Λ-normally embedded π-soluble Fitting functor f. Let f_* be the smallest element of the Lockett section of the Fitting functor f. We presented a description of f_*. By the Lockett section of a conjugate Fitting $\mathfrak{X}$-functor f we mean the set Locksec(f) = {g: g is a conjugate Fitting $\mathfrak{X}$-functor and $f^* = g^*$} and f^* is a map that assigns to each group $G \in \mathfrak{X}$ a set $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Key words: *Lockett's, operation, Lockett section, Fitting $\mathfrak{X}$-functor.*

В работе рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{X}$-максимальная нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$ группы G.

В исследовании структуры классов и их характеризации определяющую роль играют отображения «*» и «$_*$» – операторы Локетта [1] (см. также гл. X [2]), которые определяются свойствами прямых произведений радикалов групп следующим образом. Каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор «*» сопоставляет класс $\mathfrak{F}^*$ – наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и «$_*$» – класс $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. В последующем классы Фиттинга стали называть классами Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{F}^*=\mathfrak{X}^*$, называют [2] секцией Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и обозначают Locksec($\mathfrak{F}$). Основополагающим моментом для многих исследований в теории классов явился тот факт, что каждая секция Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ содержит наименьший и наибольший по включению и по сильному вложению элементы, которыми являются классы Фиттинга $\mathfrak{F}_*$ и $\mathfrak{F}^*$ соответственно (см., например, теорему X.1.17 [2]).

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Синтезируя понятия радикала и инъектора, в работе [3] мы определяем понятие фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора как отображения f, сопоставляющего каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество ее $\mathfrak{X}$-подгрупп $f(G)$ такое, что выполняются следующие условия:

(i) если $\alpha: G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то $f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\}$;

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то $f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}$.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор мы называем сопряженным, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$, множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G. Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ классу всех конечных разрешимых групп, фиттинговы $\mathfrak{S}$-функторы изучались в серии крупных работ [4–6]. В частности, если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то отображения $f = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}$ и $g = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}$, сопоставляющие каждой группе $G \in \mathfrak{S}$ множества $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее $\mathfrak{F}$-инъек-торов и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{F}}(G)$ ее $\mathfrak{F}$-радикалов, являются примерами фиттинговых $\mathfrak{S}$-функторов (см. например, лемму IX.1.1 [2] и замечание IX.1.3 [2]). Введем на множестве сопряженных фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов отношение “ ” следующим образом. Если f и g – сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то функтор f назовем сильно вложенным в g и обозначим f g в том и только в том случае, когда для любой подгруппы $X \in f(G)$ существует такая подгруппа $Y \in g(G)$, что $X \leq Y$.

В связи с этим естественен поиск функторных аналогов операторов Локетта и секции Локетта, в частности, определения $\mathfrak{X}$-функтора Локетта и секции Локетта таких функторов. Исследованиям в этом направлении были посвящены работы [5; 7]. В [7] нами определено понятие секции Локетта для произвольного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора и доказано существование наибольшего и наименьшего по сильному вложению элементов секции Локетта для любого сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора (теорема 3.3 [7]) и для сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора с заданными свойствами (теорема 3.7 [7]) соответственно. Вместе с тем одной из трудных задач даже в специальных случаях $\mathfrak{S}$-функтора является задача описания наименьшего по сильному вложению элемента секции Локетта. Ориентиром для таких исследований служит следующая

Проблема (Бейдельман, Брюстер, Хаук [5, проблема 8 (7)]): *описать строение наименьшего элемента f_* секции Локетта для нормально вложенного сопряженного фиттингова $\mathfrak{S}$-функтора f. В частности, является ли f_* произведением фиттинговых $\mathfrak{S}$-функторов f и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{S}_*}$, если $f = \mathrm{Hall}_\pi$?*

Положительное решение данной проблемы было получено в [6]. Основная цель настоящей работы – положительное решение обобщенной версии указанной проблемы. Нами получено полное описание строения функтора f_* для нормально вложенного π-разрешимого функтора f.

В определениях и обозначениях мы следуем [2].

Напомним, что подгруппа H группы G называется пронормальной в G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x\rangle$. Подгруппу X группы G называют π-нормально вложенной, если холлова π-подгруппа группы X является холловой π-подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы G.

Мы будем использовать следующую классификацию $\mathfrak{X}$-функторов из [3]. Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор мы называем

1) *π-разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^\pi$ классу всех π-разрешимых групп;

2) *наследственным*, если класс $\mathfrak{X}$ наследственен;

3) *пронормальным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G;

4) *π-нормально вложенным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-нормально вложенной подгруппой группы G.

Если f и g – наследственные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то их произведением называется [8] отображение $f \circ g$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество подгрупп $\{X: X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)\}$, которое по теореме 2.4 [3] является фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором.

Если f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то множество всех простых чисел p, для которых существуют такая группа $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем $|X|$, называют характеристикой функтора f и обозначают $\mathrm{Char}\, f$.

Следуя [2] (см. также [9], определение 20.2 [10]), холловой системой π-разрешимой группы G будем называть такое множество Σ холловых подгрупп из G, что выполняются следующие условия:

1) для всякого множества ρ из π множество Σ содержит в точности одну холлову ρ-подгруппу и в точности одну холлову $(\rho \cup \pi')$-подгруппу;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $HK = KH$.

Пусть Σ – холлова система π-разрешимой группы G и R – подгруппа группы G. Через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R: S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холлова система группы R, то говорят, что Σ редуцирует холлову систему Σ_R подгруппы R и обозначают Σ R.

В этом случае Σ называется продолжением холловой системы Σ_R.

Определение 1. *Фиттинговы π-разрешимые функторы f и g назовем перестановочными, если $XY = YX$ для любых подгрупп $X \in f(G)$ и $Y \in g(G)$ таких, что существует холлова система группы G, которая редуцируется в X и Y.*

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппу A группы G называют π-связанной [11], если либо порядок подгруппы A, либо ее индекс в G является π-числом. Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор будем называть π-свя-занным, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-связанной подгруппой группы G.

Определение 2. *Пусть $\{f_i: i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-свя-занных фиттинговых функторов и* $\mathrm{Char}\, f_i \cap \mathrm{Char}\, f_j = \varnothing$ *для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Определим операцию $\vee$ следующим образом:*

$(\bigvee_{i\in I} f_i)(G) = \{\prod_{i\in I} X_i :\ X_i \in f_i(G),$ *существует холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I$*$\}$.

В работе [11] доказано, что π-связанная подгруппа H π-разрешимой группы G пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холлова система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H, а также, что произведение π-связанных пронормальных перестановочных подгрупп π-разрешимой группы является π-связанной пронормальной подгруппой. В связи с этим можно определить операцию $\vee$ на множестве пронормальных π-разрешимых фиттинговых функторов. Это представляет

Лемма 1. *Пусть $\{f_i: i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и* $\mathrm{Char}\, f_i \cap \mathrm{Char}\, f_j = \varnothing$ *для всех $i, j \in I$, если $i \neq j$. Тогда $\bigvee_{i\in I} f_i$ – пронормальный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.*

Пусть I – множество индексов, π – некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i: i \in I\}$ – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i\in\Lambda} \pi_i = \mathbf{P}$.

Следуя [6], π-разрешимый фиттингов функтор f назовем Λ-нормально вложенным, если функтор f является π_i-нормально вложенным для всех $\pi_i \in \Lambda$.

Определим теперь на множестве фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов функторную версию известных в теории классов Фиттинга [1] операторов Локетта и секции Локетта.

Определение 3. *Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор назовем $\mathfrak{X}$-функтором Локетта, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ и $V \in f(G \times G)$ подгруппа*

$$V = (V \cap (G \times 1)) \times (V \cap (1 \times G)).$$

Напомним также понятия оператора «*» и секции Локетта фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора, которые были предложены нами в [7].

Пусть f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π_1 – проекция первой координаты подгруппы из $G \times G$ в G. Тогда отображение f^* сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ множество $\{\pi_1(T): T \in f(G \times G)\}$.

Если f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то секция Локетта – множество функторов

$$\mathrm{Locksec}(f) = \{g: g \text{ – сопряженный фиттингов } \mathfrak{X}\text{-функтор и } g^* = f^*\}.$$

Для доказательства основного результата мы будем использовать также конструкцию класса Фиттинга $L_\pi(f)$, который был определен нами [3] следующим образом. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π – множество простых чисел. Группа $G \in L_\pi(f)$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$ и индекс $|G : X|$ является π'-числом для всех $X \in f(G)$.

Нами получены следующие свойства операторов Локетта и класса $L_\pi(f)$.

Лемма 2. *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) f^* – $\mathfrak{X}$-функтор Локетта;

2) если f – сопряженный π-разрешимый функтор Локетта, то $L_\pi(f)$ – класс Локетта;

3) если f – сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор, то $(L_\pi(f))^* = L_\pi(f^*)$.

Используя свойства холловых π-подгрупп и класса $L_\pi(f)$, полученные нами ранее (следствие 4.3 [3]), мы описываем строение Λ-нормально вложенных π-разрешимых фиттинговых функторов, которое представляет

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если $\{\mathfrak{X}_i: i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то $f = \bigvee_{\pi_i\in\Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i}\right)$ – сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор и $L_{\pi_i}(f) = \mathfrak{X}_i \mathbf{S}^{\pi}_{\pi_i'}$ для всех $\pi_i \in \Lambda$;

2) если f – сопряженный π-разрешимый Λ-нормально вложенный фиттингов функтор, то $f = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)} \right)$;

3) если f и g – сопряженные Λ-нормально вложенные π-разрешимые фиттинговы функторы, то $f \sqsubseteq g$ тогда и только тогда, когда $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$ *для всех* $\pi_i \in \Lambda$.

Следующая теорема и следствие из нее дает положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмана, Брюстера и Хаука и представляет описание наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных Λ-нормально вложенных π-разрешимых фиттинговых функторов.

Теорема. *Пусть f – сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор, f_* – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f. Тогда*

$$f_* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*} \right).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathsf{X}_i = \left(L_{\pi_i}(f)\right)_* \qquad (1)$$

и $h = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*} \right)$. Ввиду утверждения 1) леммы 3 получим, что h является сопряженным Λ-нормально вложенным фиттинговым функтором и

$$L_{\pi_i}(h) = \mathsf{X}_i \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} \qquad (2)$$

для всех $\pi_i \in \Lambda$. Следовательно, с учетом утверждения 3) леммы 2 и (2) получаем, что

$$L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(h)^* = \left(\mathsf{X}_i \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'}\right)^*.$$

Тогда по лемме 3 [12]

$$\left(\mathsf{X}_i \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'}\right)^* = \mathsf{X}_i^* \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'}.$$

Используя свойства оператора «*» (см. теорему X.1.15 [2]) и (1), получим

$$\mathsf{X}_i^* \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} = \left(\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*\right)^* \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} = \left(L_{\pi_i}(f)\right)^* \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'}.$$

Снова используем утверждение 3) леммы 2

$$\left(L_{\pi_i}(f)\right)^* \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(f^*) \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(f^*).$$

Таким образом, $L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(f^*)$. Теперь, применяя утверждения 2) леммы 3,

$$f^* = \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f^*)} \right) =$$

$$= \bigvee_{\pi_i \in \Lambda} \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(h^*)} \right) = h^*.$$

Итак, $h \in \mathrm{Locksec}(f)$.

Пусть g – произвольный π-разрешимый функтор из $\mathrm{Locksec}(f)$. Тогда

$$\left(L_{\pi_i}(g)\right)^* = L_{\pi_i}(g^*) = L_{\pi_i}(f^*) = \left(L_{\pi_i}(f)\right)^*.$$

Следовательно, $L_{\pi_i}(g) \in \mathrm{Locksec}\left(L_{\pi_i}(f)\right)$. Но тогда для любого $\pi_i \in \Lambda$ получим $\mathsf{X}_i = \left(L_{\pi_i}(f)\right)_* \subseteq L_{\pi_i}(g)$. Кроме того, ввиду (2)

$$L_{\pi_i}(h) = \mathsf{X}_i \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} \subseteq L_{\pi_i}(g) \mathsf{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(g).$$

Следовательно, по утверждению 3) леммы 3 получим, что $h \sqsubseteq g$. Ввиду произвольности выбора функтора g мы заключаем, что h – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f, то есть $f_* = h$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть π – множество простых чисел, π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Hall}_{\pi}$, тогда наименьший элемент секции Локетта* $f_* = f \circ \mathrm{Rad}_{\left(\mathsf{S}^{\pi}\right)_*}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockett, F.P. The Fitting class f^* / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Витько, Е.А. Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1253–1263.
4. Beidleman, J.C. Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359–384.
5. Beidleman, J.C. Fitting functors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.
6. Beidleman, J.C. Conjugate π-normally embedded fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65–82.
7. Витько, Е.А. О наименьших и наибольших элементах секции Локетта фиттингова функтора / Е.А. Витько // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 9–14.
8. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларус. навука, 2003. – 254 с.
9. Гольберг, П.А. Холловские θ-базы конечных групп / П.А. Гольберг // Изв. высш. учеб. заведений. – 1961. – № 1(20). – С. 36–43.
10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
11. Сементовский, В.Г. О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2000. – № 3. – С. 55–59.
12. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

Поступила в редакцию 07.06.2012. Принята в печать 24.08.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: alenkavit@tut.by – Витько Е.А.