Матэматыка

УДК 517.9

Преобразование Лапласа *p*-адических функций

М.А. Заренок
Белорусский государственный университет

В данной статье рассматривается преобразование Лапласа p-адической функции. Преобразование Лапласа p-адической функции определено при помощи интеграла Волкенборна. Проведено исследование свойств преобразования Лапласа p-адических функций. Получена формула преобразования Лапласа от m-ой функции Малера. Доказано, что образ Лапласа m-ой функции Малера имеет устранимую точку разрыва $a = 1$ и является непрерывной функцией на $B_1(1)$. Далее доказаны существование преобразования Лапласа непрерывно-дифференцируемых функций и непрерывность образа Лапласа непрерывно-дифференцируемых функций в шаре $B_1(1)$. Последний результат получилось значительно усилить, показав, что образ Лапласа непрерывно-дифференцируемой функции является аналитической на шаре $B_1(1)$ функцией. Установлена связь между преобразованием Лапласа и разностным оператором Δ, заменяющим производную во многих задачах p-адического анализа. Получена формула обращения (обратного преобразования Лапласа) и описан класс аналитических функций, для которых она применима. Доказано, что преобразование Лапласа непрерывно-дифференцируемой функции допускает дифференцирование по параметру.

Ключевые слова: *преобразование Лапласа, p-адическая функция.*

Laplass transformation of *p*-adic functions

M.A. Zarenok
Belarusian State Medical University

The article considers Laplass transformation of p-adic function. Laplass transformation of p-adic function is defined with the help of the Volkenborn integral. Study of the properties of Laplass transformation of p-ardic functions is conducted. Laplass transformation formula from m-Maler function is obtained. It is proven that Laplass image of m-Maler function has removable point of distortion $a=1$ and is a continuous function on $B_1(1)$. Further, the existence of Laplass transformation of continuously differentiated functions as well as continuity of Laplass image of continuously differentiated functions in sphere $B_1(1)$ is proven. We managed to considerably increase the last result by showing that Laplass image of continuously differentiated function is an analytical on sphere $B_1(1)$ function. Connection is found out between Laplass transformation and difference operator Δ, which substitutes the initial in many tasks of p-adic analysis. Transformation formula (reverse Laplass transformation) is obtained and analytical function class, for which it is applicable, is described. It is proven that Laplass transformation of continuously differentiated function lets parameter differentiation.

Key words: *Laplass transformation, p-adic function.*

Классическое преобразование Лапласа $(\mathrm{L}f)(s)=\int_0^{+\infty} f(t)a^s\frac{dt}{t}$, где $s\in C$, от функции действительной переменной широко используется в научных и инженерных расчетах благодаря тому, что многим соотношениям и операциям над оригиналами соответствуют более простые соотношения над их изображениями. Так, свертка двух функций сводится в пространстве изображений к операции умножения, а линейные дифференциальные уравнения становятся алгебраическими.

В данной статье рассматривается преобразование Лапласа p-адических функций. Дано определение преобразования Лапласа. Проведено исследование свойств преобразования Лапласа p-адических функций. В частности, доказаны существование преобразования Лапласа непрерывно-дифференцируемых функций и его аналитичность в шаре $B_1(1)$, а также установлена связь между преобразованием Лапласа и разностным оператором Δ, заменяющим производную во многих задачах p-адического анализа. Была получена формула обращения для преобразования Лапласа и описан класс аналитических функций, для которых она применима.

Пусть $B_1(1):=\{x\in C_p:|x-1|_p<1\}$ – открытый в $\mathbb{C}_p$ шар с центром в точке $x_0=1$ радиуса 1. p-Адический логарифм определяется на $B_1(1)$ с помощью ряда Тейлора [1]:

$$\log(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}. \qquad (1)$$

Определение 1. *Преобразованием Лапласа функции $f\in C^1(Z_p\to Q_p)$ назовем функцию $(\mathrm{L}f)(a)$ такую, что*

$$(\mathrm{L}f)(a)=V\int_{Z_p}f(x)a^x dx,$$

где $a\in B_1(1)$, а $V\int\limits_{Z_p}$ – интеграл Волкенборна [1, с. 167].

Замечание 1. Ограничение гладкости функции f продиктовано свойствами интеграла Волкенборна.

Замечание 2. Несложно видеть, что преобразование Лапласа $(\mathrm{L}f)(a)$ является линейным функционалом на $C^1(Z_p)$.

Поскольку функции Малера в p-адическом анализе используются в качестве базиса, то в первую очередь вычислим преобразование Лапласа от функции Малера $f(x)=\binom{x}{m}$.

Напомним некоторые свойства функций Малера и интеграла Волкенборна, которые понадобятся в дальнейших рассуждениях:

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}dx=\frac{(-1)^m}{m+1}; \qquad (2)$$

$$\left[\binom{x}{m}\right]'_{x=0}=\frac{(-1)^{m-1}}{m}; \qquad (3)$$

$$\binom{x+1}{m}=\binom{x}{m}+\binom{x}{m-1}; \qquad (4)$$

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{0}a^x dx=V\int_{Z_p}a^x dx=\frac{1}{a-1}\log a; \qquad (5)$$

$$V\int_{Z_p}f(x+1)dx=V\int_{Z_p}f(x)dx+f'(0), \quad \forall f(x)\in C^1(Z_p\to Q_p). \qquad (6)$$

Вышеперечисленные свойства с полными доказательствами можно найти в [1].

Теорема 1. *1. Пусть $f(x)=\binom{x}{m}$ – m-ая функция Малера, тогда преобразование Лапласа функции f вычисляется по формуле*

$$(\mathrm{L}f)(a)=V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx=\frac{(-1)^m a^m\log a}{(a-1)^m}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}. \qquad (7)$$

2. Образ Лапласа (7) имеет устранимую точку разрыва $a=1$ и является непрерывной функцией на $B_1(1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Вычисления проведем методом производящей функции. На первом этапе доказательства рассмотрим интеграл Волкенборна от функции $g(x+1)=\binom{x+1}{m}a^{x+1}$. Тогда с учетом свойств (3) и (6) получаем

$$V\int_{Z_p}\binom{x+1}{m}a^{x+1}dx=V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+\left[\binom{x}{m}a^x\right]'_{x=0}=V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

С другой стороны, с учетом свойства (4)

$$V\int_{Z_p}\binom{x+1}{m}a^{x+1}dx=aV\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+aV\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx.$$

Приравняем левые части предыдущих равенств

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}=aV\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+aV\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx.$$

Откуда следует, что

$$(a-1)V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx=-aV\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx+\frac{(-1)^{m-1}}{m}. \qquad (8)$$

Пусть $I_m(a)=V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx$. Тогда с учетом свойства (5) получаем

$$\begin{cases} I_m(a)=\dfrac{1}{a-1}\left(-aI_{m-1}(a)+\dfrac{(-1)^{m-1}}{m}\right), & m\ge 1,\\ I_0(a)=\dfrac{1}{a-1}\log a, & m=0,\end{cases}$$

Введем ряд

$$F(a;z)=\sum_{m=0}^{+\infty} I_m(a)z^m,\ F(a,0)=\frac{1}{a-1}\log a,$$

который при фиксированном $a\in B_1(1)$ сводится к формальному степенному ряду по переменной z. Несложно видеть, что m-ый коэффициент в разложении Тейлора функции $F(a,z)$ будет равен преобразованию Лапласа от m-ой функции Малера. Найдем формальную производную введенной функции по переменной z

$$\frac{d}{dz}F(a,z)=\sum_{m=1}^{+\infty} I_m(a)mz^{m-1}=\sum_{m=0}^{+\infty} I_{m+1}(a)(m+1)z^m.$$

Приведем выражение $I_{m+1}(a)(m+1)$ к более удобному виду для дальнейших вычислений:

$$I_{m+1}(a)(m+1)=\frac{1}{a-1}\Big((-1)^m-aI_m(a)(m+1)\Big)=$$

$$=\frac{1}{a-1}\Big((-1)^m-aI_m(a)m-aI_m(a)\Big).$$

Подставим результат в формулу для $\frac{d}{dz}F(a,z)$ и преобразуем полученное выражение:

$$(a-1)\frac{d}{dz}F(a,z)=(a-1)\sum_{m=0}^{+\infty} I_{m+1}(a)(m+1)z^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}((-1)^m-aI_m(a)m-aI_m(a))z^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m z^m-az\sum_{m=0}^{+\infty} I_m(a)mz^{m-1}-a\sum_{m=0}^{+\infty} I_m(a)z^m=$$

$$=\frac{1}{1+z}-az\frac{d}{dz}F(a,z)-aF(a,z).$$

Таким образом, для нахождения функции $F(a,z)$ достаточно решить дифференциальное уравнение

$$(a-1)\frac{d}{dz}F(a,z)=\frac{1}{1+z}-az\frac{d}{dz}F(a,z)-aF(a,z).$$

Приведем подобные слагаемые и выделим полный дифференциал:

$$((a-1)+az)\frac{d}{dz}F(a,z)+aF(a,z)=\frac{1}{1+z},$$

$$\frac{d}{dz}\big[((a-1)+az)F(a,z)\big]=\frac{1}{1+z}.$$

Решением данного дифференциального уравнения является функция

$$F(a,z)=\frac{\log(1+z)+C(a)}{(a-1)+az},$$

где $C(a)$ – некоторая константа, зависящая от a. Вычислив значение функции $F(a,z)$ в точке $F(a,z)$, получаем, что $C(a)=\log a$. Таким образом, итоговая формула функции $F(a,z)$ имеет следующий вид:

$$F(a,z)=\frac{\log(1+z)+\log a}{(a-1)+az}.$$

Последовательно дифференцируя функцию $F(a,z)$ по z, получаем формулу m-ой производной $F_z^{(m)}(a,z)$

$$F_z^{(m)}(a,z)=\frac{(-1)^m a^m(\log a+\log(1+z))m!}{(a-1+az)^{m+1}}+ \\ +\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}m!}{k(a-1+az)^{m+1-k}(1+z)^k},$$

из чего вытекает доказательство формулы (7):

$$\left(\mathrm{L}\binom{x}{m}\right)(a)=I_m(a)=\frac{F_z^{(m)}(a,0)}{m!}=$$

$$=\frac{(-1)^m a^m\log a}{(a-1)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}.$$

2. Для всех $a\in B_1(a)$ таких, что $a\neq 1$, непрерывность преобразования Лапласа вытекает из формулы (7).

Рассмотрим непрерывность преобразования Лапласа в точке $a=1$.

Оценим разность

$$|(\mathrm{L}f(a))-(\mathrm{L}f(1))|_p=$$

$$=\left|V\int_{Z_p}a^x\binom{x}{m}dx-V\int_{Z_p}\binom{x}{m}dx\right|_p=$$

$$=\left|V\int_{Z_p}(a^x-1)\binom{x}{m}dx\right|_p.$$

Известна формула оценки интеграла Волкенборна от функции $f\in C^1(Z_p)$ [1, с. 168]

$$\left|V\int_{Z_p}f(x)dx\right|_p\le p\|f\|_{C^1}.$$

Тогда

$$\left|V\int_{Z_p}(a^x-1)\binom{x}{m}dx\right|_p\le p\left\|(a^x-1)\binom{x}{m}\right\|_{C^1}.$$

В свою очередь,

$$\left\|(a^x-1)\binom{x}{m}\right\|_{C^1}=\sup_{x\in Z_p}\left|(a^x-1)\binom{x}{m}\right|_p+$$
$$+\sup_{x,y\in Z_p}|\Phi(x,y)|_p=:A+B.$$

Последовательно оценим слагаемые A и B с учетом того, что $|a^x-a^y|_p\le\tau^{ord_p(x-y)}|a-1|_p$, где $\tau=\max(|a-1|_p,p^{-1})$ [1, с. 101]. Следует обратить внимание на то, что $\tau<1$, а также для любых $a\in B_1(1)$ и $x\in Z_p$ верно $a^x\in B_1(1)$ [1, с. 101].

$$A=\sup_{x\in Z_p}\left|(a^x-1)\binom{x}{m}\right|_p\le\sup_{x\in Z_p}\left|(a^x-1)\right|_p\le$$
$$\le|a-1|_p\to0,\ \text{при}\quad a\to1.$$
$$B=\sup_{x,y\in Z_p}|\Phi(x,y)|_p=$$
$$=\sup_{x,y\in Z_p}\left|\frac{(a^{x+y}-1)\binom{x+y}{m}-(a^x-1)\binom{x}{m}}{y}\right|_p=$$
$$=\sup_{x,y\in Z_p}\left|\frac{(a^{x+y}-1)\left[\binom{x+y}{m}-\binom{x}{m}\right]+\binom{x}{m}\left[(a^{x+y}-1)-(a^x-1)\right]}{y}\right|_p\le$$
$$\le\sup_{x,y\in Z_p}\max\left\{\left|(a^{x+y}-1)\frac{\left[\binom{x+y}{m}-\binom{x}{m}\right]}{y}\right|_p,\ \left|\frac{(a^{x+y}-1)-(a^x-1)}{y}\right|_p\right\}\le$$
$$\le\sup_{x,y\in Z_p}\max\left\{\left|(a^{x+y}-1)\right|_p\max_{i=\overline{1,m}}\frac{1}{|i|_p},\left|\frac{a^x(a^y-1)}{y}\right|_p\right\}\le$$
$$\le\max\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{x,y\in Z_p}\left|(a^{x+y}-1)\right|_p\max_{i=\overline{1,m}}\dfrac{1}{|i|_p},\\ \sup\limits_{x,y\in Z_p}\left|\dfrac{a^x(a^y-1)}{y}\right|_p\end{array}\right\}.\qquad(9)$$

Очевидно, что $\left|(a^{x+y}-1)\right|_p\max_{i=\overline{1,m}}\dfrac{1}{|i|_p}\to0$ при $a\to1$ для любых $x,y\in Z_p$. С другой стороны, для любых $x,y\in Z_p$

$$\left|\frac{a^x(a^y-1)}{y}\right|_p\le\frac{|a^x|_p|a-1|_p\,\tau^{ord_py}}{|y|_p}\le$$
$$\le\frac{|a^x|_p|a-1|_p\,\tau^{ord_py}}{p^{-ord_py}}\le|a^x|_p|a-1|_p\,(p\tau)^{ord_py}\le$$
$$\le|a^x|_p|a-1|_p\,(\max\{1,p|a-1|_p\})^{ord_py}\to0,\qquad(10)$$
при $a\to1$.

Следовательно,

$$\left|V\int_{Z_p}a^x\binom{x}{m}dx-V\int_{Z_p}\binom{x}{m}dx\right|_p\to0,\ \text{при}\quad a\to1.$$

$\triangleleft$

Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in C^1(Z_p)$. *Тогда преобразование Лапласа* $(\mathrm{L}f)(a)$ *функции* f *непрерывно на* $B_1(1)$.

Доказательство. Так как $f(x)\in C^1(Z_p)$, то имеет место разложение функции f по базису Малера $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\binom{x}{n}$, причем ряд сходится абсолютно. Тогда

$$(\mathrm{L}f)(a)=\mathrm{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\binom{x}{n}\right)(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\left(\mathrm{L}\binom{x}{n}\right)(a).\ (11)$$

В теореме 1 получена следующая оценка $\left(\mathrm{L}\binom{x}{n}\right)(a)$ (9):

$$\left|\left(\mathrm{L}\binom{x}{n}\right)(a)\right|_p\le\max\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{x\in Z_p}\left|a^x-1\right|_p,\\ \sup\limits_{x,y\in Z_p}\left|a^{x+y}-1\right|_p\max_{i=\overline{1,n}}\dfrac{1}{|i|_p},\\ \sup\limits_{x,y\in Z_p}\left|\dfrac{a^x(a^y-1)}{y}\right|_p\end{array}\right\}.$$

Рассмотрим произвольное $0<r<1$ и замкнутый шар $B_r[1]\in C_p$ с центром в точке 1 и радиуса r. Тогда для любого $a\in B_r[1]$ имеем оценку $|a-1|_p\le r$ и $|a^x-1|\le|a-1|\le r$ для любого $x\in Z_p$. $\dfrac{a^y-1}{y}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(a-1)^n}{n}$ задается рядом, который равномерно сходится на $B_1(1)$. Из этого следует, что он ограничен на любом шаре $B_r[1]$. Значит,

$$\left|\left(\mathrm{L}\begin{pmatrix}x\\ n\end{pmatrix}\right)(a)\right|_p\le\max\left\{r, r\max_{i=\overline{1,n}}\frac{1}{|i|_p}, rC_r\right\}.$$

Так как $f\in C^1(Z_p)$, то имеет место равенство $\lim\limits_{n\to+\infty}n|f_n|_p=0$. Тогда с учетом оценки $\left|\left(\mathrm{L}\begin{pmatrix}x\\ n\end{pmatrix}\right)(a)\right|_p$ получаем, что общий член ряда (11) стремится к нулю

$$\lim_{n\to+\infty}\left|f_n\left(\mathrm{L}\begin{pmatrix}x\\ n\end{pmatrix}\right)(a)\right|_p=0.$$

Это и есть необходимое и достаточное условие сходимости ряда (11) в точке a. Ряд (11) сходится для любого $a\in B_r[1]$. С учетом оценки преобразования Лапласа от функции Малера несложно увидеть, что ряд сходится равномерно на $B_r[1]$, следовательно, он задает непрерывную на $B_r[1]$ функцию для любого $0<r<1$. Из этого факта вытекает непрерывность преобразования Лапласа на $B_1(1)$. ⊲

Последний результат можно значительно усилить, усложнив доказательство.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)\in C^1(Z_p)$. *Тогда преобразование Лапласа* $(\mathrm{L}f)(a)$ *функции* f *является аналитической функцией на шаре* $B_1(1)$ *и представляется в виде ряда* $(\mathrm{L}f)(a)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(a-1)^n$, *где*

$$f_n=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\begin{aligned}&(-1)^{m+1}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^kC^{m+n+1-k}}{k}+\\&+\frac{C_m^n}{m+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}C_m^k}{m+1+n-k}\end{aligned}\right)f_m,$$

а f_m – m*-ый коэффициент Малера в разложении функции* $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим преобразование Лапласа от функции Малера и представим его в виде разложения по степеням $a-1$. Тогда с учетом разложений

$$\log a=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(a-1)^k}{k},\quad a^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i(a-1)^i$$

получаем

$$(\mathrm{L}f)(a)=\int_{Z_p}\begin{pmatrix}x\\ m\end{pmatrix}a^xdx=$$

$$=\frac{(-1)^ma^m\log a}{(a-1)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}=$$

$$=\frac{(-1)^ma^m}{(a-1)^{m+1}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(a-1)^k}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+k-1}a^m}{k(a-1)^{m-k+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+k-1}a^m}{k(a-1)^{m+1-k}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}+$$

$$+\frac{(-1)^{2m}a^m}{m+1}+\sum_{k=m+2}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+k-1}a^m(a-1)^{k-(m+1)}}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+m-1}\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i(a-1)^i}{k(a-1)^{m-k+1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}\sum\limits_{i=0}^{m-k}C_{m-k}^i(a-1)^i}{k(a-1)^{m-k+1}}+$$

$$+\frac{(-1)^{2m}\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i(a-1)^i}{m+1}+$$

$$+\sum_{k=m+2}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1+k}\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i(a-1)^i(a-1)^{k-(m+1)}}{k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{k+m-1}C_m^i(a-1)^{k+i-(m+1)}}{k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{m-k}\frac{(-1)^{m+1}C_{m-k}^i(a-1)^{k+i-(m+1)}}{k}+$$

$$+\frac{(-1)^{2m}\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i(a-1)^i}{m+1}+\tag{12}$$

$$+\sum_{k=m+2}^{+\infty}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-1+k}C_m^i(a-1)^{k+i-(m+1)}}{k}.$$

С учетом того, что преобразование Лапласа от функции Малера непрерывная на $B_1(1)$ функция, то коэффициенты при отрицательных степенях $a-1$ будут равны нулю.

Для любой функции $f(x)\in C^1(Z_p)$ имеет место представление в виде ряда Малера $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty} f_m\binom{x}{m}$. Тогда

$$(\mathrm{L}f)(a)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\mathrm{L}\binom{x}{m}\right)(a)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a-1)^n. \qquad (13)$$

Используя полученное разложение преобразования Лапласа функции Малера (12), соберем коэффициенты при соответствующих степенях $a-1$ в представлении (13). Коэффициент f_0 при $(a-1)^0$ равен

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left((-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k C_m^{m+1-k}}{k}+\frac{C_m^0}{m+1}\right)f_m,$$

коэффициент f_1 при $(a-1)^1$ равен

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left((-1)^{m-1}\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k C_m^{m+2-k}}{k}+\frac{C_m^1}{m+1}+\frac{(-1)^1 C_m^0}{m+2}\right)f_m.$$

Для произвольного $n\ge 0$ получаем, что коэффициент f_n при $(a-1)^n$ равен

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\begin{array}{l}(-1)^{m-1}\sum\limits_{k=n+1}^{m}\dfrac{(-1)^k C_m^{m+n+1-k}}{k}+\dfrac{C_m^n}{m+1}+\\ +\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^{n-k} C_m^k}{m+1+n-k}\end{array}\right)f_m. \qquad (14)$$

Таким образом, f_n представляются в виде ряда $f_n=\sum\limits_{m=0}^{+\infty} L_{n,m} f_m$, где f_m – коэффициенты Малера функции f, а

$$\begin{aligned}L_{n,m}&=(-1)^{m-1}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{(-1)^k C_m^{m+n+1-k}}{k}+\\ &+\frac{C_m^n}{m+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k} C_m^k}{m+1+n-k}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Стоит отметить, что $L_{n,m}$ не зависит от функции f. Тогда для коэффициентов разложения преобразования Лапласа по степеням $a-1$ можно записать формулу

$$\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ \ldots\\ f_n\\ \ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{0,0} & L_{0,1} & \ldots & L_{0,m} & \ldots\\ L_{1,0} & L_{1,1} & \ldots & L_{1,m} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ L_{n,0} & L_{n,1} & \ldots & L_{n,m} & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ \ldots\\ f_m\\ \ldots\end{pmatrix},$$

где $L_{n,m}$ выражаются формулой (15).

Из формулы (15) непосредственно вытекает, что $|L_{n,m}|_p\le \max_{k=\overline{n,m+n+1}}\dfrac{1}{|k|_p}$, тогда

$$\begin{aligned}|f_n|_p&\le\sup_{m\ge 0}\left\{|f_m|_p\max_{k=\overline{n+1,m+n+1}}\frac{1}{|k|_p}\right\}\le\\ &\le\sup_{m\ge 0}\left\{|f_m|_p\max_{k=\overline{1,m+n+1}}\frac{1}{|k|_p}\right\}\le\\ &\le\sup_{m\ge 0}\left\{|f_m|_p\, p^{[\log_p n]+1}\max_{k=\overline{1,m+1}}\frac{1}{|k|_p}\right\}\le\\ &\le p^{[\log_p n]+1}\sup_{m\ge 0}\left\{|f_m|_p\max_{k=\overline{1,m+1}}\frac{1}{|k|_p}\right\}.\end{aligned}$$

Так как $f\in C^1(Z_p)$, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty}|f_m|_p\max\limits_{k=\overline{1,m+1}}\dfrac{1}{|k|_p}=0$. Это означает, что

$$C_{\sup}:=\sup_{m\ge 0}\left\{|f_m|_p\max_{k=\overline{1,m+1}}\frac{1}{|k|_p}\right\}$$

существует и не зависит от n. Получаем, что $|f_n|_p\le p^{[\log_p n]+1}C_{\sup}\le pnC_{\sup}$. Из этого следует, что норма коэффициентов $|f_n|_p$ в разложении (13) ограничена сверху линейной по n функцией.

Рассмотрим произвольное $0<r<1$ и замкнутый шар $B_r[1]\in C_p$ с центром в точке 1 и радиуса r. Тогда для любого $a\in B_r[1]$ имеем оценку $|a-1|_p\le r<1$. Рассмотрим ряд $(\mathrm{L}f)(a)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(a-1)^n$. Для любого $a\in B_r[1]$ получаем, что $|f_n(a-1)^n|_p\le nr^n\to 0$ при $n\to+\infty$. Из этого вытекает равномерная сходимость ряда на любом шаре $B_r[1]$. Следовательно, преобразование Лапласа является аналитической функцией на шаре $B_r[1]$ для любого $0<r<1$, а значит и на шаре $B_1(1)$.

◁

Замечание 3. Установим связь между преобразованием Лапласа и разностным оператором Δ, заменяющим производную во многих задачах p-адического анализа. Пусть $f(x)=\binom{x}{m}$, тогда

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \binom{x+1}{m} - \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$$

для любого $m \ge 1$. Значит,

$$\left(\mathrm{L}\Delta\binom{x}{m}\right)(a) = \left(\mathrm{L}\binom{x}{m-1}\right)(a).$$

С учетом формулы (7) получаем, что для любого $m \ge 1$

$$\left(\mathrm{L}\binom{x}{m-1}\right)(a) = -\frac{a-1}{a}\left(\mathrm{L}\binom{x}{m}\right)(a) + \frac{(-1)^m}{ma}.$$

При $m=0$ имеем $\left(\mathrm{L}\Delta\binom{x}{0}\right)(a) = 0$. С другой стороны,

$$\left(\mathrm{L}\Delta\binom{x}{0}\right)(a) = -\frac{a-1}{a}\left(\mathrm{L}\binom{x}{0}\right)(a) + \frac{\log a}{a}.$$

Рассмотрим $f(x) \in C^1(Z_p)$, $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \binom{x}{m}$. Тогда получаем, что для произвольной функции $f(x) \in C^1(Z_p)$ верна формула

$$\left(\mathrm{L}\Delta f\right)(a) = -\frac{a-1}{a}\left(\mathrm{L}f\right)(a) + $$
$$+ f_0 \frac{\log a}{a} + \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{+\infty} f_m \frac{(-1)^m}{m}.$$

Замечание 4. Известно, что интеграл Волкенборна от m-ой функции Малера равен $V\int_{Z_p}\binom{x}{m}dx = \frac{(-1)^m}{m+1}$ [1, с. 168]. Из (13) непосредственно вытекает равенство

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}dx = \left(\mathrm{L}\binom{x}{m}\right)(1) = f_0.$$

Покажем, что $f_0 = \frac{(-1)^m}{m+1}$.

С учетом того, что для m-ой функции Малера $f_m = 1$, а $f_i = 0$ для всех $i \ne m$, и формул (14) и (15) получаем, что

$$f_0 = L_{0,m} = (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k C_m^{m+1-k}}{k} + \frac{C_m^0}{m+1} =$$

$$= (-1)^{m-1}\left(\begin{array}{l}\dfrac{(-1)^1 C_m^m}{1} + \dfrac{(-1)^2 C_m^{m-1}}{2} + \ldots \\ + \dfrac{(-1)^{m-1} C_m^2}{m-1} + \dfrac{(-1)^m C_m^1}{m}\end{array}\right) + \frac{C_m^0}{m+1} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{m+1}\left(\begin{array}{l}\dfrac{C_m^0(m+1)}{1} - \dfrac{C_m^1(m+1)}{2} + \ldots \\ +(-1)^{m-1}\dfrac{C_m^{m-1}(m+1)}{m} + (-1)^m C_m^m\end{array}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\left(\begin{array}{l}1 - C_{m+1}^1 + C_{m+1}^2 + \ldots \\ +(-1)^m C_{m+1}^m + (-1)^{m+1} C_{m+1}^{m+1} - 1\end{array}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\left((1-1)^{m+1} - 1\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{m}.$$

Это означает, что формула (14) согласуется с полученной ранее формулой вычисления интеграла Волкенборна от m-ой функции Малера.

Перейдем к обсуждению формулы обращения преобразования Лапласа. Для этого нам понадобятся свойства корней из единицы в C_p.

Корень из единицы порядка N будем обозначать через ε_N, т.е. $\varepsilon_N^{p^N} = 1$. Примитивным корнем из единицы будем называть такой корень из единицы ε_N, что $\varepsilon_N^{p^N} = 1$, но $\varepsilon_N^{p^{N-1}} \ne 1$. Покажем, что для любого натурального N все корни из единицы порядка N лежат в шаре $B_1(1)$. Для этого проведем оценку $|\varepsilon_N - 1|_p$. Рассмотрим многочлен $f(x)$ следующего вида:

$$f(x) = \frac{x^{p^N} - 1}{x^{p^{N-1}} - 1} = x^{p^N - p^{N-1}} + x^{p^N - 2p^{N-1}} + \ldots + x^{p^{N-1}} + 1.$$

Несложно видеть, что корнями данного многочлена будут примитивные корни из единицы порядка N. Введем многочлен $g(x) = f(x+1)$, корнями которого будут числа $\varepsilon_N - 1$, где ε_N – примитивные корни из единицы степени N. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем, что

$$g(x) = \frac{(x+1)^{p^N} - 1}{(x+1)^{p^{N-1}} - 1} = (x+1)^{p^N - p^{N-1}} +$$
$$+(x+1)^{p^N - 2p^{N-1}} + \ldots + (x+1)^{p^{N-1}} + 1 =$$
$$= x^{p^N - p^{N-1}} + \ldots + p.$$

Коэффициенты данного многочлена удовлетворяют признаку Эйзенштейна [2], и, как следствие, многочлен является неприводимым над Q_p. Отсюда с учетом теоремы о продолжении нормирования [1, с. 98] вытекает, что произведение корней многочлена равно p, т.е.

$$\prod_{\varepsilon_N^{p^N}=1,\,\varepsilon_N^{p^{N-1}}\ne 1} (\varepsilon_N - 1) = p.$$

И таким образом, так как количество примитивных корней из единицы порядка N равно $p^N - p^{N-1}$, получаем, что

$$|\varepsilon_N - 1|_p = \sqrt[p^N - p^{N-1}]{|p|_p} = p^{-\frac{1}{p^N - p^{N-1}}} < 1$$

для любого натурального N и $\lim\limits_{N\to+\infty} |\varepsilon_N - 1|_p = 1$. Таким образом, для любого натурального N все корни из единицы порядка N лежат в шаре $B_1(1)$.

Теорема 4. *Пусть* $f \in C^1(Z_p \to Q_p)$. *Обозначим через* A_L *множество всех аналитических в круге* $B_1(1)$ *функций, являющихся образом преобразования Лапласа от непрерывно-дифференцируемой функции, т.е.*

$$A_L = \left\{F(a) \in A(B_1(1)) : \exists f \in C^1(Z_p), (\mathrm{L}f)(a) = F(a)\right\}.$$

Тогда для любой $F(a) \in A_L$ *имеет место формула обращения (обратное преобразование Лапласа)*

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\varepsilon_N^{p^N}=1} F(\varepsilon_N)\varepsilon_N^x =: (\mathrm{L}^{-1}F)(x). \quad (16)$$

Ряд сходится равномерно, но, вообще говоря, не сходится по норме C^1.

Доказательство. Пусть $\chi_p(x) = e^{2\pi i\{x\}_p}$ – аддитивный характер на Z_p со значениями в C_p. Тогда $\chi_p(k) = \varepsilon_{N,k}$, где $\varepsilon_{N,k}$ – корень из единицы порядка N, а $k \in Q_p / Z_p$ такое, что $|k|_p \le p^N$. Покажем это. Так как $|k|_p \le p^N$, следовательно, $|kp^N|_p \le 1$ и $\{kp^N\}_p = 0$. Тогда с учетом предыдущего равенства получаем, что $\left(\chi_p(k)\right)^{p^N} = \chi\left(kp^N\right) = e^{2\pi i 0} = 1$. Из этого вытекает, что $\chi_p(k)$ является корнем из единицы порядка N.

В [3] доказано, что ряд Фурье непрерывно-дифференцируемой функции f сходится равномерно на Z_p, т.е. $S_N f \,\Gamma\, f$ при $N \to +\infty$, где $(S_N f)(x) = \sum\limits_{|k|_p \le N} f_k \chi_p kx$, f_k – коэффициенты Фурье. Запишем частичные суммы ряда Фурье в несколько ином виде:

$$(S_N f)(x) = \sum_{|k|_p \le N} f_k \chi_p kx =$$

$$= \sum_{|k|_p \le N} f_k \varepsilon_{k,N}^x = \sum_{\varepsilon_N^{p^N}=1} (\mathrm{L}f)(\varepsilon_N)\varepsilon_N^x,$$

где

$$f_k = V\int_{Z_p} f(x)\chi_p(kx)dx =$$

$$= V\int_{Z_p} f(x)\varepsilon_{N,k}^x dx = (\mathrm{L}f)(\varepsilon_{N,k}).$$

Тогда из $S_N f \,\Gamma\, f$ при $N \to +\infty$ вытекает, что $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{\varepsilon_N^{p^N}=1} F(\varepsilon_N)\varepsilon_N^x$.

◁

Замечание 5. Вообще говоря, предел (16) в виде непрерывной функции существует не для всех аналитических в круге $B_1(1)$ функций. Рассмотрим функцию $F(a) = \sum\limits_m^{+\infty} F_m (a-1)^m$ аналитическую в круге $B_1(1)$ и применим к ней формулу обращения (16).

Известно, что для любого $m \in N$

$$\sum_{\varepsilon_N^{p^N}} \varepsilon_N^m = \begin{cases} p^N, \text{ если } m \bmod p^N = 0, \\ 0, \text{ если } m \bmod p^N \ne 0, \end{cases} \quad (17)$$

а так как множество натуральных чисел плотно в Z_p, то приведенная выше формула верна для любого $x \in Z_p$.

Тогда

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{\varepsilon_N^{p^N}} F(\varepsilon_N)\varepsilon_N^x =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{\varepsilon_N^{p^N}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} F_m (\varepsilon_N - 1)^m \right) \varepsilon_N^x =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m \left(\sum_{\varepsilon_N^{p^N}} (\varepsilon_N - 1)^m \varepsilon_N^x \right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m \left[\sum_{\varepsilon_N^{p^N}} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i \varepsilon_N^i \right) \varepsilon_N^x \right] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m \left[\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{\varepsilon_N^{p^N}} (-1)^{m-i} C_m^i \varepsilon_N^{i+x} \right) \right].$$

Обозначим через $E_{N,m}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \left(\sum\limits_{\varepsilon_N^{p^N}} (-1)^{m-i} C_m^i \varepsilon_N^{i+x} \right)$.

Функция $E_{N,m}(x)$ является локально-постоянной функцией с радиусом постоянства p^{-N}, так как $\varepsilon_N^{i+x} = \varepsilon^{i+x+kp^N}$ для любого $k \in N$. Рассмотрим $x = 0$, тогда с учетом формулы (17) получаем, что предыдущий предел равен

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} F_m \left[\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{\varepsilon_N^{p^N}} (-1)^{m-i} C_m^i \varepsilon_N^i \right) \right] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} F_m \left[\begin{array}{c}(-1)^m C_m^0 p^N + (-1)^{m-p^N} C_m^{p^N} p^N + \dots \\ +(-1)^{m-kp^N} C_m^{kp^N} p^N + \dots\end{array}\right] =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[\begin{array}{c}\sum\limits_{m=0}^{p^N-1}(-1)^m F_m p^N + \\ +\sum\limits_{m=p^N}^{+\infty} F_m\left(\sum\limits_{k,m\ge kp^N}(-1)^{m-kp^N} C_m^{kp^N} p^N\right)\end{array}\right].$$

Тогда необходимым условием существования предыдущего предела является существование предела $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{m=0}^{p^N-1}(-1)^m F_m p^N$, а предел существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{N\to+\infty}\left|p^N F_{p^N}\right|_p = 0$, что равносильно $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|mF_m\right|_p = 0$ и означает, что коэффициенты аналитической функции возрастают по модулю медленнее, чем линейная функция. Это условие верно не для всех аналитических в круге $B_1(1)$ функций.

Теорема 5. *Пусть* $f(x)\in C^1(Z_p)$. *Тогда для преобразования Лапласа* $(\mathrm{L}f)(a)$ *имеет место следующая формула:*

$$\frac{d}{da}(\mathrm{L}f)(a) = \frac{d}{da}\left(V\int_{Z_p} f(x)a^x dx\right) = \\ = V\int_{Z_p} f(x)\frac{d}{da}a^x dx. \qquad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно видеть, что производная функции $f(a)=a^x$ по a равна $f_a'(a) = xa^{x-1}$ для любого $x\in Z_p$. Это вытекает из того, что $\left(a^n\right)_a' = na^{n-1}$ для любого $n\in N$ и множество натуральных чисел N плотно в Z_p.

Докажем утверждение теоремы для случая, когда f является функцией Малера. Пусть $f(x)=\binom{x}{m}$. Используя формулу (7), получаем, что

$$\frac{d}{da}(\mathrm{L}f)(a) = \frac{d}{da}\left(V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx\right) =$$

$$= \frac{d}{da}\left(\frac{(-1)^m a^m \log a}{(a-1)^{m+1}} + \sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}\right) =$$

$$= (-1)^m\,\frac{\begin{array}{c}(ma^{m-1}\log a + a^{m-1})(a-1)^{m+1} - \\ -a^m(m+1)(a-1)^m\log a\end{array}}{(a-1)^{2m+2}} +$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\frac{\begin{array}{c}(m-k)a^{m-k-1}(a-1)^{m+1-k} - \\ -a^{m-k}(m-k+1)(a-1)^{m-k}\log a\end{array}}{(a-1)^{2(m+1-k)}}\right) =$$

$$= (-1)^m\left(\begin{array}{c}\dfrac{ma^{m-1}\log a}{(a-1)^{m+1}} + \dfrac{a^{m-1}}{(a-1)^{m+1}} - \\ -\dfrac{a^m(m+1)\log a}{(a-1)^{m+2}}\end{array}\right) +$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\frac{\begin{array}{c}(a-1)^{m-k}a^{m-k-1}((m-k)(a-1) - \\ -(m+1-k)a)\end{array}}{(a-1)^{2(m-k+1)}}\right) =$$

$$= (-1)^m\log a\left(\frac{ma^{m-1}}{(a-1)^{m+1}} - \frac{a^m(m+1)}{(a-1)^{m+2}}\right) +$$

$$+\frac{(-1)^m a^{m-1}}{(a-1)^{m+1}} + (-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(\frac{a^{m-k-1}(-m+k-a)}{(a-1)^{m-k+2}}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}a^{m-1}(a+m)\log a}{(a-1)^{m+2}} + (-1)^m \times \\ \times\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{m-k-1}(a+m-k)}{k(a-1)^{m-k+2}} + \frac{(-1)^m a^{m-1}}{(a-1)^{m+1}}. \qquad (19)$$

С другой стороны, с учетом формул (3), (4), (6) получаем следующие равенства:

$$V\int_{Z_p}\binom{x+1}{m}(x+1)a^{x+1}dx =$$

$$= aV\int_{Z_p}\left(\binom{x}{m}+\binom{x}{m-1}\right)(x+1)a^x dx =$$

$$= aV\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx + aV\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx +$$

$$+aV\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}xa^x dx + aV\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx,$$

$$V\int_{Z_p}\binom{x+1}{m}(x+1)a^{x+1}dx =$$

$$= V\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx + \left[\binom{x}{m}xa^x\right]'_{x=0}.$$

Приравняв правые части предыдущих равенств, несложно получить рекурсивную формулу для $V\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx$. Тогда

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}\frac{d}{da}a^x dx=\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx=$$

$$=-\frac{1}{a-1}\left(\begin{array}{c}V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+V\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx+\\ +V\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}xa^x dx\end{array}\right).$$

При упрощении суммы первого и второго слагаемых полученного выражения с учетом формулы (7) получаем:

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}a^x dx+V\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}a^x dx=$$

$$=\frac{(-1)^m a^m\log a}{(a-1)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m-1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m+1-k}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}a^{m-1}\log a}{(a-1)^m}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-2}a^{m-1-k}}{k(a-1)^{m-k}}=$$

$$=\frac{(-1)^{m-1}a^{m-1}\log a}{(a-1)^m}\left(\frac{-a}{a-1}+1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-2}a^{m-1-k}}{k(a-1)^{m-k}}\left(\frac{-a}{a-1}+1\right)+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{m(a-1)}=$$

$$=\frac{(-1)^m a^{m-1}\log a}{(a-1)^{m+1}}+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-1}a^{m-1-k}}{k(a-1)^{m-k+1}}+\frac{(-1)^{m-1}}{m(a-1)}.$$

Тогда

$$V\int_{Z_p}\binom{x}{m}\frac{d}{da}a^x dx=\frac{(-1)^{m+1}a^{m-1}\log a}{(a-1)^{m+2}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^m a^{m-1-k}}{k(a-1)^{m-k+2}}+\frac{(-1)^m}{m(a-1)^2}- \qquad (20)$$

$$-\frac{1}{a-1}V\int_{Z_p}\binom{x}{m-1}xa^x dx.$$

Для $m=0$ имеем

$$\frac{1}{a}V\int_{Z_p}xa^x dx=\frac{1}{a(a-1)}-\frac{\log a}{(a-1)^2}.$$

Далее путем несложных тождественных преобразований, используя формулу (20), получаем, что при $m=1$

$$\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{1}xa^x dx=\frac{(a+1)\log a}{(a-1)^3}-\frac{2}{(a-1)^2}.$$

При $m=2$

$$\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{2}xa^x dx=-\frac{a(a+2)\log a}{(a-1)^4}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{a^{2-k}(a+2-k)}{k(a-1)^{2-k+2}}+\frac{a}{(a-1)^3}.$$

Пусть для произвольного m верна формула

$$\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx=$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}a^{m-1}(a+m)\log a}{(a-1)^{m+2}}+ \qquad (21)$$

$$+(-1)^m\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{m-k-1}(a+m-k)}{k(a-1)^{m-k+2}}+\frac{(-1)^m a^{m-1}}{(a-1)^{m+1}}.$$

Несложно видеть, что формулы для $m=1$ и $m=2$ удовлетворяют приведенной формуле. Докажем ее для $m+1$. Используя формулу (20), получаем

$$\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{m+1}xa^x dx=$$

$$=\frac{(-1)^{m+2}a^m\log a}{(a-1)^{m+3}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m-k+3}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}a}{(m+1)(a-1)^2}-$$

$$-\frac{1}{a-1}\left(\begin{array}{c}\frac{(-1)^{m+1}a^m(a+m)\log a}{(a-1)^{m+2}}+\\ +(-1)^m\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{m-k}(a+m-k)}{k(a-1)^{m-k+2}}+\frac{(-1)^m a^m}{(a-1)^{m+1}}\end{array}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^{m+2}a^m\log a}{(a-1)^{m+3}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{m+1}a^{m-k}}{k(a-1)^{m-k+3}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}a}{(m+1)(a-1)^2}+\frac{(-1)^{m+2}a^m(a+m)\log a}{(a-1)^{m+3}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{m-k}(a+m-k)}{k(a-1)^{m-k+3}}+\frac{(-1)^m a^m}{(a-1)^{m+1}}=$$

$$=\frac{(-1)^{m+2}a^m(a+m+1)\log a}{(a-1)^{m+3}}+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{m-k}(a+m+1-k)}{k(a-1)^{m-k+3}}+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)(a-1)^2}+\frac{(-1)^{m+1}a^m}{(a-1)^{m+2}}=$$

$$=\frac{(-1)^{m+2}a^m(a+m+1)\log a}{(a-1)^{m+3}}+ \quad ,$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a^{m-k}(a+m+1-k)}{k(a-1)^{m-k+3}}+\frac{(-1)^{m+1}a^m}{(a-1)^{m+2}}$$

что и требовалось показать. Теперь, сравнив формулы (19) и (21), получаем, что утверждение теоремы верно для произвольной функции Малера.

Рассмотрим произвольное $0<r<1$ и шар замкнутый $B_r[1]\in C_p$ с центром в точке 1 и радиуса r. Так как $x\in Z_p$ и с учетом оценки, полученной в теореме 2, имеем следующее неравенство:

$$\left|V\int_{Z_p}\binom{x}{m}\frac{d}{da}a^x dx\right|_p=\left|\frac{1}{a}V\int_{Z_p}\binom{x}{m}xa^x dx\right|_p\le$$
$$\le\frac{1}{a}\max\left\{r, r\max_{i=\overline{1,n}}\frac{1}{|i|_p}, rC_r\right\}. \quad (22)$$

Из того, что $f(x)\in C^1(Z_p)$, следует, что имеет место разложение функции f по базису Малера $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\binom{x}{n}$, причем ряд сходится абсолютно. Тогда

$$\frac{d}{da}(\mathrm{L}f)(a)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\frac{d}{da}\left(\mathrm{L}\binom{x}{n}\right)(a)=$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n\left(V\int_{Z_p}\binom{x}{n}xa^{x-1}dx\right).$$

Используя свойство коэффициентов Малера непрерывно-дифференцируемой функции $\lim_{n\to+\infty}n|f_n|_p=0$ и полученную оценку (22), получаем, что предыдущий ряд сходится на шаре $B_r[1]$, а следовательно, определяет непрерывную на шаре $B_r[1]$ функцию для любого $0<r<1$, а значит и непрерывную на шаре $B_1(1)$. Утверждение теоремы доказано для произвольной функции $f\in C^1(Z_p)$. ⊲

ЛИТЕРАТУРА

1. Schikhof, W.H. Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis / W.H. Schikhof. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – C. 71.
2. Радына, А.Я. Пачаткі неархімедавага аналізу / А.Я. Радына, Я.М. Радына, Я.В. Радына. – Мінск: БДУ, 2010. – С. 91.
3. Заренок, М.А. Сходимость рядов Фурье непрерывно-дифференцируемых функций p-адического аргумента / М.А. Заренок // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2012. – № 1(67). – С. 12–17.

Поступила в редакцию 18.06.2012. Принята в печать 24.08.2012
Адрес для корреспонденции: zarenokma@gmail.com – Заренок М.А.