(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)
Математические заметки

Том 116 выпуск 1 июль 2024

УДК 519.615.4: 517.537.32

Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов

А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский

В статье развит метод Эйлера–Лагранжа вычисления всех корней произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами, на базе подсчета пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли–Эйткена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: корень полинома, ряд Тейлора, ряд Лорана, определитель Адамара, определитель Вандермонда.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14296

1. Введение и постановка задачи. Методы приближенного подсчета корней полиномов в том направлении, о котором идет речь в настоящей статье, имеют долгую и содержательную историю.

В 1728 г. Бернулли в статье [1] для полиномов с действительными коэффициентами

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0, a_n \neq 0$$

(т.е. $P(x)$ – полином степени n, для которого 0 не является корнем) описал метод (названный последователями в его честь) нахождения наибольшего по модулю действительного корня с помощью вычисления предела последовательности t_{m+1}/t_m отношений соседних по номерам решений разностного уравнения

$$a_0t_m + a_1t_{m-1} + \cdots + a_nt_{m-n} = 0, \qquad m = n, n+1, \ldots, \tag{1.1}$$

построенного по коэффициентам полинома $P(x)$ (подробности, см., например, в [2; гл. 10]. Обоснования этому методу Бернулли не дал. В 1748 г. Эйлер в книге [3] посвятил главу 17 анализу метода типа метода Бернулли для нахождения наибольшего (наименьшего) по модулю действительного корня многочлена $P(x)$, не имеющего кратных корней. Эйлер использовал степенные ряды (он называл их рекуррентными рядами), построенные по функции $1/P(x)$ и подсчитывал пределы отношения соседних коэффициентов этих рядов. Он обнаружил (на примерах), что

© А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, 2024

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

в ситуации, когда $P(x)$ имеет пару наибольших по модулю комплексно сопряженных корней, метод может не работать – предел отношения соседних коэффициентов может не существовать. В 1798 г. Лагранж, развивая идеи Эйлера, в [4] описал соответствующий метод для подсчета наибольшего (наименьшего) по модулю действительного корня многочлена $P(x)$, обладающего кратными корнями. Для этого он рассматривал ряды, построенные по функции $P'(x)/P(x)$. В 1927 г. Эйткен в [5] обобщил метод Бернулли для подсчета произведений упорядоченных по модулю корней полинома $P(x)$. Он использовал при этом пределы отношений определителей, составленных из последовательных по номерам решений разностного уравнения (1.1) (подробности см., например, в [2; гл. 10], где содержится также обзор иных сходных по духу методов подсчета корней полиномов с действительными коэффициентами).

В настоящей статье мы развиваем метод Эйлера–Лагранжа и вычисляем все корни произвольного полинома $P(z)$ с комплексными коэффициентами, на базе подсчета пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли–Эйткена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции $P'(z)/P(z)$.

Соответствующие методы для вычисления наибольшего и наименьшего по модулю корня полинома $P(z)$ получены в [6], [7].

Часть утверждений данной работы без доказательств и просчета конкретных примеров анонсированы в [8].

2. Метод приближенного вычисления корней полиномов. Пусть

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C},$$

$a_0, a_n \neq 0$ – произвольный полином степени n, для которого 0 не является корнем, т.е.

$$P(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_p)^{m_p}, \tag{2.1}$$

где $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$ – сумма кратностей корней z_j и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$ и $z_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, p$. Вместе с полиномом $P(z)$ рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{2.2}$$

Здесь правая часть – разложение функции $P'(z)/P(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля.

Отметим сразу же, что современными средствами компьютерной математики (например, система Maple или Wolfram Mathematica) элементарно осуществляется вычисление любого числа коэффициентов этого ряда для произвольного заданного полинома $P(z)$. В разделе 3 мы продемонстрируем разработанный метод приближенного вычисления корней полинома на конкретном примере.

По коэффициентам c_k ряда (2.2) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел (k, r), $k \geqslant 0$, $r > 0$ *определителем Адамара* $H_{k,r}$

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] D. Bernulli, “Observationes de serbus recurrentibus”, *Comment. acad. sc. Petrop.*, **3** (1732 (1728)), 85–100.

[2] J. M. Mc Namee, V. Y. Pan, *Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part* II, Stud. Comput. Math., **16**, Academic Press, Boston, 2013.

[3] Л. Эйлер, *Введение в анализ бесконечных*, т. 1, ГИФМЛ, М., 1961.

[4] J. L. Lagrange, “(1798) Sur la Méthode d’Approximation tirée des séries récurrentes // Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés”, J. L. Lagrange – Paris, **6**, 1826, 130–137.

[5] A. C. Aitken, “On Bernulli’s numerical solution of algebraic equations”, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **46** (1927), 289–305.

[6] Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, “Расходящиеся степенные ряды и формулы приближенного аналитического нахождения решений алгебраических уравнений”, *Вест. Вит. ун-та*, **101**:4 (2018), 5–17.

[7] Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, “Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов”, *Вест. Вит. ун-та*, **110**:1 (2021), 13–25.

[8] А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский, “О методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов”, *Докл. НАН Беларуси*, **67**:5 (2023), 359–365.

А. В. Лебедев
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Республика Беларусь
E-mail: lebedev@bsu.by

Ю. В. Трубников
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Республика Беларусь
E-mail: yurii_trubnikov@mail.ru

М. М. Чернявский
Витебский государственный университет
им. П. М. Машерова, Республика Беларусь
E-mail: misha360ff@mail.ru

Поступило
26.02.2024
Принято к публикации
28.02.2024