Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра геометрии и математического анализа

**М.Н. Подоксенов, С.А. Шлапаков,
О.Ю. Кочергина**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по естественнонаучным специальностям*

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2014*

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73
П44

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 6 от 25.06.2014 г.

Авторы: заведующий кафедрой геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **М.Н. Подоксенов;** доцент кафедры геометрии и математического анализа ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук **С.А. Шлапаков;** студентка V курса математического факультета ВГУ имени П.М. Машерова **О.Ю. Кочергина**

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математического анализа УО «БГПУ имени М. Танка»;
доцент кафедры высшей математики и математической физики БГУ,
кандидат физико-математических наук *Л.Л. Березкина*

Подоксенов, М.Н.

П44 Высшая математика. Практикум : учебное пособие / М.Н. Подоксенов, С.А. Шлапаков, О.Ю. Кочергина. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2014. – 199 с.
ISBN 978-985-517-445-6.

Данное учебное пособие подготовлено в соответствии с типовой учебной программой по курсу «Высшая математика» для студентов биологического факультета, обучающихся по специальностям «Биология», «Биоэкология», «География». Излагаются теоретический материал, примеры решения задач и прилагаются индивидуальные задания.

УДК 510(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-517-445-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов биологического факультета, обучающихся по специальностям «Биология», «Биоэкология», «География». Оно сочетает в себе конспект лекций по предмету «Высшая математика» (разделы «Высшая алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика»), примеры решения задач и индивидуальные задания для самостоятельного решения. Приводятся также советы по поводу возможных особых ситуаций, которые могут возникнуть при решении. Объем теоретического материала рассчитан с учетом учебного времени, реально выделяемого на предмет с учетом самостоятельной работы студентов. Некоторые разделы, выделенные мелким шрифтом, следует рассматривать как дополнительные. Звездочкой (*) обозначены примеры повышенной сложности. Авторы рекомендуют предлагать эти разделы для самостоятельного изучения только тем студентам, которые претендуют на отличные оценки.

Формулы и теоремы нумеруются в каждой главе отдельно. Например, формула (7.1) есть формула 1 из главы 7.

Номер варианта для индивидуального практического занятия выбирается в соответствии с порядковым номером студента по журналу преподавателя. Задания по каждому из разделов следует сдавать отдельно в срок, указанный преподавателем. Решены должны быть все задачи. Прежде, чем решать задачу, изучите пример ее решения. Решение заданий по алгебре обязательно должно включать в себя проверку. Если в результате проверки оказалось, что полученный результат не удовлетворяет условию задачи, то следует искать ошибки в решении. В случае если возникнут непредвиденные трудности, следует проконсультироваться у преподавателя.

В конце данного пособия размещены тестовые задания, которые рекомендуются использовать для самоподготовки к экзамену.

Значок ■ в тексте означает завершение доказательства.

Г Л А В А 1. **ВЫСШАЯ АЛГЕБРА**

§ 1. Матрицы и определители

Определение. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Матрицу принято обозначать большой буквой латинского алфавита, а ее элементы – такой же строчной буквой с двумя индексами, первый (или верхний) из которых обозначает номер строки, а второй (или нижний) – номер столбца, в котором находится данный элемент.

Например,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Это матрица, состоящая из 2 строк и 4 столбцов. Говорим, что она имеет размеры 2×4. В ней $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, а $a_{21}=5$. Вместо чисел в матрице могут находиться переменные величины. Две матрицы считаются *равными*, если они имеют одинаковый размер и равны все их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определение. Матрица размеров $n\times n$ называется *квадратной* матрицей порядка n. Элементы квадратной матрицы, у которых номера строки и столбца совпадают, образуют *главную диагональ*. Если все элементы, стоящие вне диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, называется *единичной* и обозначается буквой **E**. Например, единичная матрица порядка 3 имеет вид:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*). Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается **O**.

Транспонированием матрицы **A** называется такая перестановка ее элементов, при которой каждый элемент a_{ij} меняется местами с элементом a_{ji}. Матрицу, которая получается в результате транспонирования, обозначаем $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Например, для матрицы (1.1)

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Понятие *определитель* вводится только для квадратных матриц. Определитель матрицы **A** обозначается $\det\mathbf{A}$ или $|\mathbf{A}|$. Если вместо круглых скобок вокруг элементов матрицы стоят прямые скобки, то это тоже означает определитель матрицы. Определитель матрицы порядка 2 вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Предположим, что мы уже знаем, как вычисляется определитель матрицы порядка $n-1$, а $\mathbf{A}$ – матрица порядка n. Обозначим M_{ij} – это определитель матрицы, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Он называется *минором*, *дополнительным к элементу* a_{ij}. Добавим к этому минору знак минус в том случае, когда $i+j$ нечетно. Получившееся число называется *алгебраическим дополнением к элементу* a_{ij}; будем обозначать его A_{ij}. Можно записать, что

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Выберем теперь произвольную строку в матрице $\mathbf{A}$ и каждый из элементов этой строки умножим на его алгебраическое дополнение; получившиеся числа сложим. Величина, которую мы таким образом вычислили, называется *определителем матрицы* $\mathbf{A}$. Можно доказать, что результат вычисления не зависит от того, какую из строк матрицы выберем. Например, если выбрать первую строку, то получим формулу, которая называется разложением определителя по первой строке:

$$\det\mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Для матрицы порядка 3 эта формула выглядит так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Второе слагаемое взяли со знаком минус, потому, что $1+2$ нечетно.

Пример. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2\cdot(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3\cdot(4\cdot 8 - 5\cdot 7) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Следующие свойства мы формулируем только для строк, но они верны и для столбцов.

Свойства определителя

1. Если одна строка определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

2. Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки, то он равен нулю.

3. При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак.

4. Общий множитель элементов одной строки выносится за знак определителя.

В предыдущем примере все элементы третьего столбца кратны трем. Поэтому можем вынести множитель 3 за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Если одна строка определителя представлена в виде суммы двух строк, то определитель равен сумме двух соответствующих определителей. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+a & 5+b & 6+c \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

6. Если к элементам одной строки матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки, домноженные на некоторое число, то определитель матрицы не изменится.

В нашем примере прибавим ко второй и третьей строкам первую строку, домноженную на –1 (сама первая строка при этом остается на своем месте без изменений):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

Мы получили две пропорциональные строки, следовательно, определитель равен нулю.

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 9 = -27.$$

Диагональная матрица является частным случаем треугольной. Поэтому ее определитель тоже равен произведению диагональных элементов.

§ 2. Линейные операции над матрицами

Линейными операциями над матрицами называются операции сложения двух матриц и умножения матрицы на число.

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров. При этом складываются их элементы, стоящие на одинаковых местах. В результате сложения получается матрица таких же размеров.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1+1 & 4-1 \\ 2-2 & 5+2 \\ 3+3 & 6-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

При *умножении матрицы на число* каждый ее элемент умножается на это число:

$$\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, для матрицы $\mathbf{A}$ из предыдущего примера

$$3\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 15 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $-1\cdot\mathbf{A}$ обозначаем $-\mathbf{A}$.

Свойства линейных операций над матрицами

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$;
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A}=\lambda(\mu\mathbf{A})$;
8. $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

§ 3. Правило Крамера

Пусть дана система линейных уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных. Мы ограничимся случаем, когда это число равно 3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а числа b_1, b_2, b_3 – *свободными членами*. *Решением системы линейных уравнений* называется любой набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, при подстановке которых вместо неизвестных x_1, x_2, x_3 все уравнения системы превращаются в верные равенства. Коэффициенты системы образуют матрицу $\mathbf{A}$, а свободные члены – столбец $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = \det\mathbf{A}$, а Δ_i – определитель матрицы, которая получается из $\mathbf{A}$ заменой i-го столбца на столбец $\mathbf{B}$. Например,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

***Теорема* 1.1 (*Правило Крамера*).** *Если* $\Delta\neq 0$, *то система линейных уравнений* (1.2) *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам*

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Эта теорема верна и для систем, состоящих из произвольного числа n уравнений и неизвестных. Обратите внимание, что теорема состоит из двух утверждений. Первое предложение о существовании и единственности решения имеет важное самостоятельное значение.

Примеры решения задач

1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x+9y=3, \\ 3x+5y=1. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-2,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=6,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{6}{-2}=-3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-4}{-2}=2.$$

Ответ: (–3, 2).

2. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6, \\ 3x_1+x_2-3x_3=2, \\ 2x_1+x_2-x_3=3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Ответ: (1, 2, 1).

§ 4. Умножение матриц

Пусть

$$a = (a_1 \ \ a_2 \ \dots \ a_k) \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} -$$

строка и столбец, состоящие из одинакового количества элементов. Определим:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k.$$

Пусть теперь **A** – матрица размеров $m \times k$, а **B** – матрица размера $k \times n$, т.е. количество столбцов в матрице **A** равно количеству строк в матрице **B**, или, что то же самое, длина сроки матрицы **A** равна высоте столбца в матрице **B**. Тогда мы можем умножать строки матрицы **A** на столбцы матрицы **B**. Пусть $a_i = (a_{i1} \ \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik})$ – i-ая строка матрицы **A**, а $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$ – j-ый столбец матрицы **B**. Обозначим:

$$c_{ij} = a_i \cdot b_j = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \ \ j = 1, \dots, n.$$

Числа c_{ij} образуют матрицу **C** размеров $m \times n$, которая называется произведением матриц **A** и **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \dots & a_1 \cdot b_n \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \dots & a_2 \cdot b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m \cdot b_1 & a_m \cdot b_2 & \dots & a_m \cdot b_n \end{pmatrix}.$$

***Замечание* 1.** Умножение матриц, вообще говоря, некоммутативно. Если определено произведение **AB**, то произведение **BA** может быть не определено. Если определены оба произведения, то матрицы **AB** и **BA** обязательно являются квадратными, но они могут иметь разный порядок. Например, если **A** имеет размеры 2×3, а **B** имеет размеры 3×2, то **AB**

имеет порядок 2, а **BA** имеет порядок 3; получается, что эти матрицы вообще нельзя сравнивать.

Даже, если оба произведения **AB** и **BA** определены и имеют одинаковый порядок, то может получиться $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получается, что $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$, а $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$.

Определение. Если выполнено $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то говорят, что матрицы **A** и **B** коммутируют.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 56 \\ -56 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

***Замечание* 2.** Из равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ автоматически не следует, что одна из матриц является нулевой. Это показывает следующий пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц (выборочно)

2. Если **A** – квадратная матрица порядка n, а **E** – единичная матрица того же порядка, то $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$. Таким образом, единичная матрица при умножении ведет себя как число 1.

3. $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$, $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$ (если определены соответствующие произведения).

4. Умножение матриц ассоциативно. Если определены произведения **AB** и $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$, то определены произведения **BC** и $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$; при этом $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

5. Если имеет смысл $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$, то $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$. Если имеет смысл $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$, то $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

6. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$.

7. Если определено произведение **AB**, то определено $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и выполнено $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

8. Если **A** и **B** – квадратные матрицы одного порядка, то $\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$.

§ 5. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Определение. Матрица $\mathbf{X}$ называется *обратной к матрице* $\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{AX}=\mathbf{XA}=\mathbf{E}$$

($\mathbf{E}$ – единичная матрица). Тогда обозначаем $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$. Матрица, которая имеет обратную к ней матрицу, называется *обратимой*.

Из определения следует, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ обязательно являются квадратными одного порядка.

***Теорема* 1.2.** *Матрица* $\mathbf{A}$ *является обратимой тогда и только тогда, когда она невырождена* (*т.е.* $\det\mathbf{A}\neq 0$).

Далее мы будем рассматривать только квадратные матрицы порядка 3 и системы из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Но все сказанное будет верно и для квадратных матриц произвольного порядка, а также для систем линейных уравнений (СЛУ), содержащих n уравнений и n неизвестных ($n>0$).

Пусть дана СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Обозначим

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ называется матрицей СЛУ (1.2), $\mathbf{X}$ – столбец неизвестных, $\mathbf{B}$ – столбец свободных членов. Тогда систему (1.2) можно записать в матричном виде так:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}. \tag{1.3}$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

а это равносильно (1.2).

Предположим, что матрица $\mathbf{A}$ невырождена. Умножим обе части равенства (1.3) слева на обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \iff \mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \iff \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{1.4}$$

Тем самым, если мы знаем обратную матрицу, мы можем вычислить столбец решений.

Напомним, что минором, дополнительным к элементу a_{ij} называется определитель матрицы, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Этот минор обозначается M_{ij}. Алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} задается равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Оно отличается от минора только знаком в том случае, когда $i+j$ нечетно.

***Теорема* 1.3.** *Для невырожденной квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *порядка* 3

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того, чтобы составить $\mathbf{A}^{-1}$, *мы на место каждого элемента матрицы* $\mathbf{A}$ *ставим его алгебраическое дополнение, получившуюся матрицу транспонируем* (*т.е. превращаем строки в столбцы*), *и затем умножаем на* $(\det \mathbf{A})^{-1}$.

Пример. Найти решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение. Составляем матрицу данной системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем алгебраические дополнения. При этом стараемся располагать их на листе бумаги так же, как расположены элементы матрицы. При этом важно помнить, что следует поставить знак минус в тех случаях, когда $i+j$ нечетно.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -19 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad (1.5)$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

После того, как уже найдены алгебраические дополнения, мы можем вычислить определитель матрицы $\mathbf{A}$ с помощью разложения по первой строке:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-19) + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 14 = -35.$$

(умножаем каждый элемент первой строки матрицы на его алгебраическое дополнение и получившиеся числа складываем). Точно так же можно использовать разложение по любой другой строке. Заметим, что если $\det \mathbf{A} = 0$, то решить СЛУ с помощью обратной матрицы невозможно.

Выписываем матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, и при этом не забываем, что элементы первой строки в вычислениях (1.5) записываются в первый столбец, второй строки – во второй столбец, третьей строки – в третий столбец:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим решение по формуле (1.4):

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & -7 \\ 14 & -7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -19\cdot 5 - 3\cdot 1 + 7\cdot 9 \\ -1\cdot 5 - 2\cdot 1 - 7\cdot 9 \\ 14\cdot 5 - 7\cdot 1 - 7\cdot 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -35 \\ -70 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тем самым мы нашли, что:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0.$$

Прежде, чем писать ответ, делаем проверку:

$$\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5 & \text{– верно} \\ 3\cdot 1 - 2 + 4\cdot 0 = 1 & \text{– верно,} \\ -1 + 5\cdot 2 - 0 = 9 & \text{– верно.} \end{cases}$$

Ответ: $(1, 2, 0)$.

Если проверка не получается.

1. Проверьте, не забыли ли вы поставить знак минус при вычислении алгебраических дополнений.

2. Проверьте, не забыли ли вы при составлении обратной матрицы выписать алгебраические дополнения по принципу: строка – в столбец.

3. Проверьте, не пропустили ли вы при составлении самой матрицы $\mathbf{A}$ где-нибудь знак минус.

4. Проверьте, правильно ли вы переписали условие.

5. Пересчитайте еще раз алгебраические дополнения.

6. Пересчитайте $\det \mathbf{A}$.

7. Если по-прежнему проверка не получается, проверьте правильность составления $\mathbf{A}^{-1}$ путем умножения матриц: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Если, например, при умножении 1 строки матрицы $\mathbf{A}$ на второй столбец матрицы $\mathbf{A}^{-1}$

получается не 0, а другое число, то ошибку следует искать во втором столбце матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Аналогично, сделав проверку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$, мы можем определить номер строки в $\mathbf{A}^{-1}$, в которой содержится ошибка. Если вместо единичной матрицы получается диагональная матрица, у которой на диагонали стоит не 1, а другое число, то неверно найден $\det\mathbf{A}$.

§ 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Будем излагать метод Гаусса для систем из 3 линейных уравнений с тремя неизвестными. Тем не менее, он может быть использован для систем произвольного размера.

Пусть дана СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$, то неизвестная величина x_1 вообще не участвует в уравнении, и она может принимать любое значение. Пусть среди коэффициентов a_{11}, a_{21}, a_{31} хотя бы один не равен нулю. Если $a_{11}=0$, то среди a_{21}, a_{31} выберем то число, которое не равно нулю, и переставим соответствующее уравнение на первое место. В новой системе будет $a_{11}\neq 0$. На практике, мы на первое место ставим такое уравнение, чтобы a_{11} оказалось делителем для a_{21} и a_{31}. Лучше всего, если после перестановки окажется $a_{11}=1$.

1 шаг. К второму уравнению прибавляем первое уравнение, домноженное на $-a_{21}/a_{11}$, а к третьему уравнению прибавляем первое уравнение, домноженное на $-a_{31}/a_{11}$ (само первое уравнение остается без изменений). В результате этих действий исключим x_1 из 2 и 3 уравнений, т.е. получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ \qquad\qquad c_{32}x_2 + c_{33}x_3 = d_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

2 шаг. К третьему уравнению мы прибавляем второе уравнение, домноженное на $-c_{32}/c_{22}$ (само второе уравнение остается без изменений). В результате этих действий мы исключим x_2 из третьего уравнения, т.е. получим систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f_{33}x_3 = g_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

Эту операцию нельзя сделать, если $c_{22}=0$. В этом случае мы переставим местами 2 и 3 уравнения и сразу получим СЛУ вида (1.7).

3 шаг. Из третьего уравнения можем найти x_3 и подставить найденное значение во второе уравнение. Тогда из второго уравнения можем найти значение x_2. Теперь подставляем эти значения в первое уравнение и находим значение x_1.

В процессе решения может получиться уравнение, которое можно нацело разделить на некоторое число. Тогда это стоит сделать. Может получиться уравнение вида $0=k$, где k – некоторое число не равное нулю. В этом случае делаем вывод: система не имеет решений. Может получиться уравнение вида $0=0$. Тогда такое уравнение можем вычеркнуть. Как далее поступать в этом случае, будет рассмотрено в примере 2.

***Пример* 1.** $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$$

Переставим второе уравнение на первое место. Зададимся далее вопросом: на какое число надо это уравнение домножить, чтобы в результате сложения со вторым (по новому порядку) уравнением у нас сократилось x_1? Ответ очевиден: надо перед сложением первое уравнение домножить на -3. Точно также определяем, что перед сложением с третьим уравнением надо первое домножить на 4. Мы совершаем указанные выше действия. При этом первое уравнение само остается без изменений. Данные действия мы обозначаем стрелочками:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases} \quad -3 \quad 4 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -7x_2 + 7x_3 = -14, \\ 7x_2 - 2x_3 = 14. \end{cases}$$

Если вы не обладаете достаточными вычислительными навыками, то можете отдельно в стороне от общего решения совершить указанные выше действия по частям. А именно: сначала умножьте первое уравнение на -3, а затем уже сложите его со вторым уравнением; сначала умножьте первое уравнение на 4, а затем сложите его с третьим уравнением. При оформлении решения оставьте эти действия на черновике.

Далее видим, что второе уравнение можно разделить на -7. Но это удобнее сделать только после того, как к третьему уравнению прибавим второе. Данные действия тоже обозначаем.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -7x_2 + 7x_3 = -14, \\ 7x_2 - 2x_3 = 14. \end{cases} \quad \begin{matrix} :(-7) \\ + \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad (1.7')$$

Рисуем фигурную скобку на три строчки и начинаем писать с последней строки: $x_3 = 0$. Затем пишем на второй строке, выражая x_2, а в конце – на первой, выражая x_1.

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 = x_3 + 2 = 2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Проверка: $\begin{cases} 1+2\cdot 2-0=5 \text{ – верно,} \\ 3\;-\;2+4\cdot 0=1 \text{ – верно,} \\ -4-2+2\cdot 0=-6 \text{ – верно.} \end{cases}$

Ответ: $(1,2,0)$.

Преобразования можно совершать не над системой уравнений, а над ее расширенной матрицей, приводя ее правую часть к треугольному виду. Покажем эти действия на предыдущем примере.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \\ 4 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & 7 & -2 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-7) \\ + \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

После этих преобразований мы можем снова выписать систему линейных уравнений $(1.7')$. Но можем продолжить преобразования и привести матрицу системы уравнений (не расширенную) к диагональному виду. Для этого сначала мы в последней строке получаем единицу и с ее помощью зануляем все стоящие выше нее элементы. При этом действия совершаются над всей строкой, но, поскольку в последнем столбце третий элемент равен нулю, то элементы последнего столбца не изменятся.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :5 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \\ -4 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На следующем шаге получаем нули во втором столбце выше диагонали. Для этого мы сначала делим вторую строку на число, стоящее в этой строке на диагонали с целью получить на месте этого числа единицу. В нашем примере уже имеем единицу на нужном нам месте.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Если мы теперь по данной матрице выпишем систему линейных уравнений, то она будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad x_2 \qquad = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = 0. \end{cases}$$

По сути получили готовое решение. Для систем, состоящих из двух или трех уравнений, использование матриц не приводит к сокращению времени, потраченного на решение. Но при решении систем с большим числом уравнений использование матриц полностью оправдано. Покажем это в примере 4.

***Пример* 2.** $\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-11x_3=1, \\ x_1+5x_2-25x_3=7, \\ -5x_1-9x_2+13x_3=13. \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ -1 \quad 5 \\ \\ \end{array}$ $\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-11x_3=1, \\ 2x_2-14x_3=6, \\ 6x_2-42x_3=18. \end{array}\right. \begin{array}{l} :2 \\ \\ -3 \end{array}$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-11x_3=1, \\ x_2-7x_3=3, \\ 0=0. \end{array}\right.$$

Последнее уравнение мы можем вычеркнуть. У нас число уравнений оказалось меньше числа неизвестных. Любую из неизвестных x_2 или x_3 можем перенести в правую часть и придать ей произвольное значение, например, 0 или 1 (как вам покажется более удобным). В нашей системе удобнее перенести x_3 в правую часть и придать ей значение $x_3=0$. Затем найдем соответствующие значения x_1 и x_2:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2=1, \\ x_2=3, \\ x_3=0. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1=1-3x_2=1-9=-8, \\ x_2=3, \\ x_3=0. \end{array}\right.$$

То, что нашли, называется *частным решением системы*. Но оно не является единственным: мы могли придать вместо x_3 любое другое значение и получить другой ответ. *Общее решение* системы ищется следующим образом. Придаем x_3 не числовое значение, а значение произвольного параметра, а потом находим соответствующие значения x_1 и x_2 (которые тоже будут зависеть от этого параметра):

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2=1+11a, \\ x_2=3+7a, \\ x_3=a,\ a\in\boldsymbol{R}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1=1+11a-3x_2=1+11a-3(3+7a)=-8-10a, \\ x_2=3+7a, \\ x_3=a,\ a\in\boldsymbol{R}. \end{array}\right.$$

***Ответ*:** $(-8-10a,\ 3+7a,\ a),\ a\in\boldsymbol{R}$.

***Пример* 3.** Это пример несовместной системы линейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=-4, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-3, \\ -6x_1-7x_2+9x_3=20. \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ -2 \quad 3 \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=-4, \\ -x_2-3x_3=5, \\ 2x_2+6x_3=-2. \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ 2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2-x_3=-4, \\ -x_2-3x_3=5, \\ 0=8. \end{array}\right.$$

Мы получили неверное равенство $8=0$.

***Ответ*:** Система не имеет решений.

***Пример* 4*.** Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1-3x_2-x_3-10x_4-5x_5=0, \\ x_1-x_2-6x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-6x_2-x_3-14x_4-10x_5=0, \\ -2x_1+x_2+6x_3+7x_4-7x_5=0. \end{array}\right.$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{2} & -3 & -1 & -10 & -5 & 6 \\ 1 & \mathbf{-1} & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 3 & -6 & \mathbf{-1} & -14 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 6 & \mathbf{7} & -7 & -1 \end{array}\right).$$

При этом мы выделили диагональные элементы. Сначала нам следует получить нули ниже диагонали. Однако, следует сразу заметить, что удобнее поставить вторую строчку на первое место.

$$-2\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & -10 & -5 & 6 \\ 3 & -6 & -1 & -14 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 6 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right) \ -3 \ \ 2 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & -13 & 10 \end{array}\right) \ -3 \ \ -1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & -14 & 14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :2 \\ :7 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Получили две одинаковые строки. Если теперь прибавить к четвертой строке третью, домноженную на –1 (т.е. вычесть из четвертой строки третью), то получим строку, состоящую только из нулей. Такую строку мы можем вычеркнуть. Это равносильно вычеркиванию уравнения вида $0 = 0$. Поэтому при наличии двух одинаковых строк одну из них можно вычеркнуть

Кроме этого, выделили квадратную верхнетреугольную матрицу. Она включает в себя столбцы соответствующие неизвестным x_1, x_2, x_3. Эти неизвестные называются базисными, а остальные неизвестные называются параметрическими. Выделенную матрицу мы продолжим преобразовывать к диагональному виду, совершая при этом действия над строками расширенной матрицы системы.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) - \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) +$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

По получившейся матрице теперь выписываем систему линейных уравнений и при этом параметрические неизвестные переносим вправо.

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 7x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + x_4 - x_5, \\ x_3 = 2 + x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Параметрическим неизвестным мы придаем значения произвольных параметров: $x_4 = a$, $x_5 = b$.

Ответ: $(3 + 7a + 2b, 2 + a - b, 2 + a + 2b, a, b), a, b \in \mathbf{R}$.

Советы по поводу особых ситуаций

Если при x_1 все коэффициенты «нехорошие», можно сделать дополнительное действие с тем, чтобы получить среди них единицу. Например:

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases} \quad -1 \qquad\qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 5x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$$

Тем самым вы избежите использования дробных чисел. Точно так же можно поступить и на втором шаге, если все коэффициенты, стоящие около x_2, окажутся «нехорошими».

§ 7. Приведение к диагональному виду

Свойства 3, 4, 6 и 7 определителя (см. §1) позволяют использовать для вычисления определителя метод приведения к диагональному виду с помощью элементарных преобразований, который будем коротко называть методом Гаусса. Он очень похож на соответствующий метод решения систем линейных уравнений. Но есть отличия.

1. В процессе решения систем линейных уравнений мы могли свободно переставлять уравнения и делить уравнение на какое-либо число. При вычислении определителя следует учитывать, что он при этом изменяется.

2. В процессе решения систем линейных уравнений мы совершали действия только над строками, а при вычислении определителя можно совершать такие же действия и над столбцами.

Итак, к элементарным преобразованиям определителя будем относить следующие действия.

1. Перестановка двух строк или столбцов. При этом определитель меняет знак.

2. Умножение строки или столбца на некоторое число, отличное от нуля. При этом определитель тоже умножится на это число. Другими словами, мы используем свойство: общий множитель элементов одной строки или одного столбца выносится за знак определителя.

3. Прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), домноженного на некоторое число. При этом та строка (столбец), которую мы прибавляем, сам не меняется.

Рассмотрим этот метод на примере вычисления определителя четвертого порядка. Наша задача – с помощью элементарных преобразований определителя получить нули ниже главной диагонали.

Пример. Вычислить определитель Δ с помощью метода Гаусса, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 13 & -12 & 11 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 15 & -30 & 5 \\ 2 & 6 & -8 & 5 \end{vmatrix}.$$

<u>*1 шаг*</u>. Сначала хотим получить нули в первом столбце во всех строках, кроме первой. В следующем определителе нам удобнее поставить на

первое место четвертую строку. Для этого понадобится поменять ее местами поочередно с 3, 2 и 1 строками. Это значит, мы совершаем три перестановки строк. Каждая из таких перестановок меняет знак определителя, значит, при полной перестановке знак тоже поменяется.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 4 & 13 & -12 & 11 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 15 & -30 & 5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ -3 \end{array}$$

Здесь же стрелочками мы обозначили дальнейшие действия: ко второй строке определителя прибавляем первую, домноженную на -2, а к четвертой строке прибавляем первую, домноженную на -3 (сама первая строка, при этом, остается без изменений). Получили нули в первом столбце ниже главной диагонали.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -10 \end{vmatrix}.$$

<u>2 *шаг*</u>. Следующим действием мы должны получить нули во втором столбце ниже главной диагонали. Для этого мы к третьей строке матрицы прибавляем вторую, домноженную на -2, а к четвертой строке прибавляем вторую домноженную на 3.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -10 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -2 \\ 3 \end{array} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}.$$

<u>3 *шаг*</u>. Далее должны получить нули в третьем столбце ниже главной диагонали.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}$$

В итоге имеем верхнетреугольную матрицу, определитель которой мы вычисляем, как произведение диагональных элементов.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-7) = -42.$$

Задания для решения на практических занятиях

1. Даны матрицы **A** и **B**. Найти матрицы **а)** $\mathbf{A}+2\mathbf{B}$, **б)** $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & -8 & 10\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель в соответствии с его определением (разложением по любой строке).

а) $\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель, используя свойства определителя.

а) $\begin{vmatrix}151 & 241\\ 150 & 240\end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix}2 & 11 & 97\\ 0 & -5 & 52\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}$; **в)** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 5 & 15 & 35\\ 12 & 12 & 24\end{vmatrix}$.

4. Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера.

а) $\begin{cases}5x+8y=-1,\\ 10x+4y=2.\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3x+11y=1,\\ 2x+9y=-1.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1+x_2-3x_3=1,\\ 2x_1+x_2-x_3=2.\end{cases}$

5. Решить систему линейных уравнений с помощью метода Гаусса.

а) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ 3x_1+x_2-3x_3=1,\\ 2x_1+x_2-x_3=2.\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x+2y-z=5,\\ 3x-y+4z=1,\\ -x+5y-z=9.\end{cases}$

6. Найти произведение матриц **AB**.

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\\ 2 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$; **б)** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

7. Решить системы линейных уравнений **5а)** и **5б)** с помощью обратной матрицы.

Задания для самостоятельного решения

***Задача* 1.** *Даны матрицы* **A** и **B**. *Вычислить произведения* **AB**, **BA**, $\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, *если эти произведения определены.*

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$;

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 6\\ 0 & 4\end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}12 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 8 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 4 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}11 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9 & 1 & -4\\ 7 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -5 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 8 & 5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 3 & 0\\ -2 & 9\end{pmatrix}$;

11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -3 & -1\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & 9\end{pmatrix}$;

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$;

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ 3 & -2 & -7\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 12\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 9 & 5\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$;

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 9\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & 5\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 4 & 6\\ 1 & -3 & -2\end{pmatrix}$;

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\3&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&2&3\end{pmatrix}$;

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&5&-6\\2&0&3\end{pmatrix}$;

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&2&-1\\2&5&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-4&1\\2&-2\\2&3\end{pmatrix}$;

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\8&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-7&3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}$;

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&3\\-2&1\end{pmatrix}$;

26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&0\\1&4\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&2&4\\2&-2&1\end{pmatrix}$;

27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\\2&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&3&7\\2&-1&1\end{pmatrix}$;

28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&3&6\\2&-3&1\end{pmatrix}$;

29. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\-2&-5\\-1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&4&1\\3&3&4\end{pmatrix}$;

30. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&4&9\\1&-3&-2\end{pmatrix}$.

***Задача* 2.** *Решить систему уравнений с помощью правила Крамера. Сделать проверку.*

1. $\begin{cases}6x+11y=14,\\8x-5y=-1.\end{cases}$

2. $\begin{cases}6x+7y=9,\\9x-5y=-2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}9x+12y=3,\\6x+10y=3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}6x-11y=-7,\\9x-5y=1.\end{cases}$

5. $\begin{cases}6x-7y=2,\\8x-5y=7.\end{cases}$

6. $\begin{cases}5x+12y=1,\\7x+4y=-5.\end{cases}$

7. $\begin{cases}8x+9y=11,\\5x-12y=1.\end{cases}$

8. $\begin{cases}8x+9y=7,\\4x-12y=-2.\end{cases}$

9. $\begin{cases}6x+10y=14,\\9x-7y=-1.\end{cases}$

10. $\begin{cases}4x+11y=5,\\6x+5y=-4.\end{cases}$

11. $\begin{cases}11x-6y=14,\\5x+8y=1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}7x-6y=9,\\5x+9y=2.\end{cases}$

13. $\begin{cases}12x-9y=3,\\10x-6y=3.\end{cases}$

14. $\begin{cases}11x+6y=7,\\5x+9y=-1.\end{cases}$

15. $\begin{cases}7x+6y=-2,\\5x+8y=-7.\end{cases}$

16. $\begin{cases}12x-5y=1,\\4x-7y=-5.\end{cases}$

17. $\begin{cases}9x-8y=11,\\12x+5y=-1.\end{cases}$

18. $\begin{cases}9x-8y=7,\\12x+4y=2.\end{cases}$

19. $\begin{cases}10x-6y=14,\\7x+9y=1.\end{cases}$

20. $\begin{cases}11x-4y=5,\\5x-6y=-4.\end{cases}$

21. $\begin{cases}9x+7y=1,\\5x-3y=4.\end{cases}$

22. $\begin{cases}5x-3y=-4,\\9x+7y=-1.\end{cases}$

23. $\begin{cases}11x+2y=3,\\8x-9y=-2.\end{cases}$

24. $\begin{cases}9x+8y=2,\\2x-11y=3.\end{cases}$

25. $\begin{cases}11x-2y=5,\\8x+7y=-2.\end{cases}$

26. $\begin{cases}2x-11y=-5,\\7x+8y=-2.\end{cases}$

27. $\begin{cases}5x-7y=2,\\2x+6y=3.\end{cases}$

28. $\begin{cases}7x+5y=-2,\\6x-2y=3.\end{cases}$

29. $\begin{cases}11x+6y=5,\\3x+2y=3.\end{cases}$

30. $\begin{cases}2x+3y=2,\\5x+9y=8.\end{cases}$

***Задача* 3.** *Решить систему линейных уравнений:*
а) *с помощью метода Гаусса;*
б) *с помощью обратной матрицы.*

1. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -11, \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - 7x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -8, \\ -2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 - 12x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 = -10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3, \\ -3x_1 - 12x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 7. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 - 12x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8, \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 12x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 12x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -10. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 15. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2\,, \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 = 13, \\ 4x_1 - 4x_2 + 11x_3 = 15. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 - 11x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 - 13x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 13x_2 - 7x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -12, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -12, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 14, \\ 4x_1 - 10x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 14, \\ 4x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -6, \\ 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = -6. \end{cases}$

Г Л А В А 2. **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

§ 1. Системы координат на плоскости

Выберем на прямой точку O, которую будем называть началом координат, и направление, которое будем называть положительным. Такая прямая называется *осью*. Направление, противоположное положительному, будем называть отрицательным. Положительное направление на чертеже обычно изображается справа от точки и обозначается стрелочкой. В положительном направлении оси от точки O мы отложим отрезок OE, который мы будем считать единичным (он задает масштаб). Точку E мы подпишем цифрой 1. Теперь можем говорить про расстояние между двумя точками на оси.

Пусть M – произвольная точка прямой. Пусть $x=|OM|$ (расстояние между точками O и M), если M принадлежит положительному направлению, и $x=-|OM|$, если M принадлежит отрицательному направлению. Тогда x называется *координатой точки* M *на оси* (рис. 2.1).

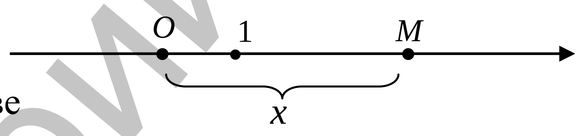


Рис. 2.1

Пусть на плоскости выбраны две взаимно перпендикулярные оси, которые пересекаются в точке O, называемой *началом координат*. Будем называть эти оси *координатными осями* и обозначим их Ox и Oy. При этом еще потребуем, чтобы поворот на $90°$, который совмещает положительное направление оси Ox с положительным направлением оси Oy, осуществлялся против часовой стрелки. Говорим, что эти оси вместе с точкой O образуют *декартову систему координат* Oxy *на плоскости* (рис. 2.2).

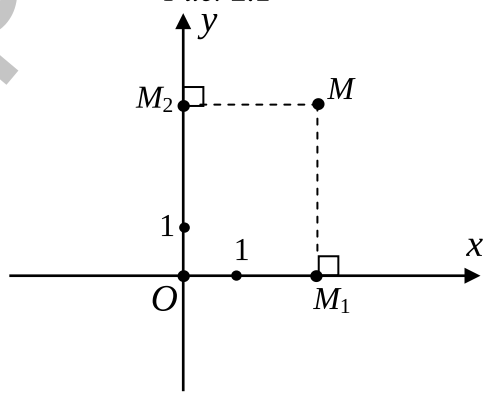


Рис. 2.2

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим перпендикуляры MM_1 на ось Ox и MM_2 на ось Oy. Пусть точка M_1 имеет координату x на оси Ox, а точка M_2 имеет координату y на оси Oy. Тогда говорим, что точка M имеет координаты (x, y) и пишем $M(x, y)$. Координата x называется *абсциссой* точки M, а координата y называется *ординатой* точки M. Пара чисел (x, y) называется *декартовыми координатами точки* M.

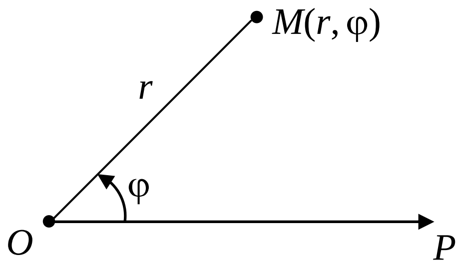


Рис. 2.3

Пусть на плоскости задан произвольный луч OP. Будем называть его *полярной осью*, а точку O – *началом координат* или *полюсом*. Пусть M – произвольная точка плоскости. Обозначим $r=|OM|$, а φ – угол между лучами OP и OM. При этом, если поворот от луча OP к лучу OM осуществляется против часовой стрелки, мы считаем φ положительным (рис. 2.3), а если по часовой стрелке – то считаем φ отрицательным.

Определение. Пара (r,φ) называется *полярными координатами точки* M, а совокупность точки O и оси OP называется *полярной системой координат на плоскости*.

Очевидно, что $0\le r<+\infty$, а для угла φ обычно условливаются, что $0\le\varphi<2\pi$, либо, что $-\pi<\varphi\le\pi$. При этом, если $r=0$, то φ считается неопределенным.

Пусть теперь на плоскости одновременно заданы декартова и полярная системы координат с общим началом O, а положительное направление оси Ox совпадает с положительным направлением оси OP (рис. 2.4). Тогда из ΔOMM_1 и ΔOMM_2 получаем

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi=x/r,\ \sin\varphi=y/r. \end{cases} \tag{2.2}$$

Подчеркнем, что знание синуса, косинуса, или тангенса в отдельности не позволяет однозначно определить угол φ. Именно поэтому в формулах (2.2) следует писать оба равенства $\cos\varphi=x/r$, $\sin\varphi=y/r$.

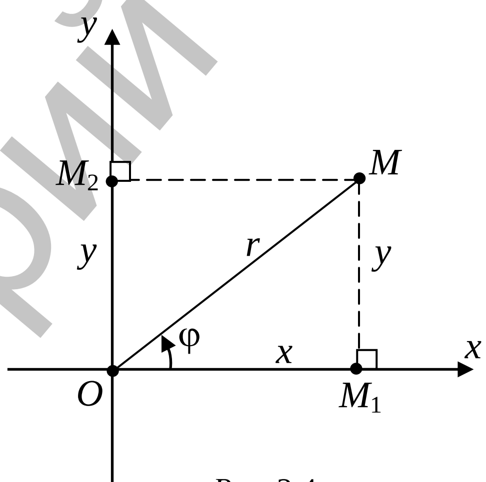


Рис. 2.4

§ 2. Понятие вектора

Определение. *Отрезок* AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая концом. Если A – начало, а B – конец, то этот отрезок обозначается $\overrightarrow{AB}$, а на чертеже его конец обозначается стрелочкой (рис. 2.5).

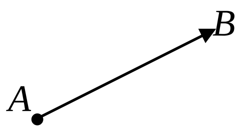


Рис. 2.5

Определение. Направленные *отрезки* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если лучи AB и A_1B_1 сонаправлены (противоположно направлены). Пишем соответственно $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{A_1B_1}$). Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *эквивалентными* или *равными*, если они совмещаются параллельным переносом (т.е. они сонаправлены и имеют одинаковую длину). Пишем $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.6).

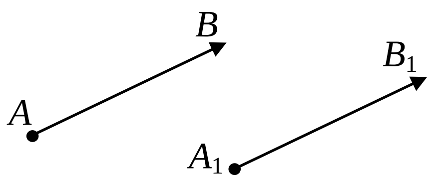


Рис. 2.6

Определение. *Вектором* называется класс эквивалентных друг другу направленных отрезков. Другими словами, *каждый направленный отрезок задает вектор, при этом эквивалентные отрезки задают один и тот же вектор*.

Векторы обозначаем строчными буквами латинского алфавита со стрелочкой сверху: $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\ldots$ Если вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, и говорим, что $\overrightarrow{AB}$ есть *вектор* $\vec{\mathbf{a}}$, *отложенный от точки* A. На чертеже вектор изображается любым из задающих его направленных отрезков.

Длиной вектора называется длина любого из направленных отрезков, задающих этот вектор. Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ обозначается $|\vec{\mathbf{a}}|$. *Направлением вектора* называется направление любого из отрезков, задающих этот вектор.

Другими словами, у вектора есть длина, есть направление, но нет конкретного начала и конца. Отложить вектор из точки A – значит указать направленный отрезок $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{a}}$.

Пример. Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 2.7). Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, и поэтому эти направленные отрезки они задают один и тоже вектор. Аналогично $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ задают один и тот же вектор.

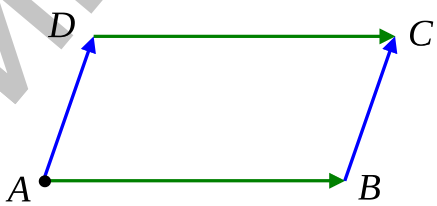


Рис. 2.7

Определение. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым* и обозначается $\vec{\mathbf{o}}$; он задается направленным отрезком, у которого начало и конец совпадают. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным*.

Определение. Векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если задающие их направленные отрезки сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными*. Пишем $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$. Считается, что у $\vec{\mathbf{o}}$ направление не определено и он коллинеарен любому вектору. Векторы параллельные одной плоскости называются *компланарными*.

Еще раз подчеркнем, что вектор задается направленным отрезком; т.е. для того чтобы задать вектор, надо указать направленный отрезок, который его определяет. У самого вектора нет начала и конца. Мы можем отложить вектор от любой точки, и тогда получится направленный отрезок, у которого уже есть начало и конец.

§ 3. Операции над векторами

Определение. Пусть заданы два произвольных вектора $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Выберем любую точку O и отложим от нее вектор $\vec{\mathbf{a}}$: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$. Затем от точки A отложим вектор $\vec{\mathbf{b}}$: $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{AB}$. Пусть $\vec{\mathbf{c}}$ – вектор, который задается направленным отрезком $\overrightarrow{OB}$. Тогда $\vec{\mathbf{c}}$ называется *суммой векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$. Пишем $\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$.

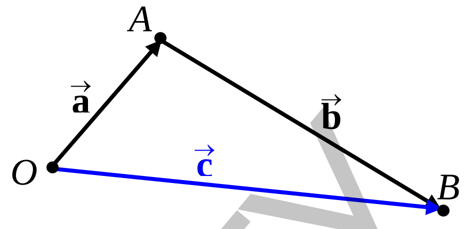


Рис. 2.8

Этот способ построения суммы двух векторов называется *правилом треугольника* (рис. 2.8). Для того чтобы построить сумму векторов по этому правилу, мы должны *второй вектор отложить от конца направленного отрезка, задающего первый вектор*. Принимаем без доказательства, что результат построения не зависит от выбора точки O.

Пусть вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, а вектор $\vec{\mathbf{x}}$ – направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$. Такой вектор $\vec{\mathbf{x}}$ называется *противоположным* вектору $\vec{\mathbf{a}}$ и обозначается $-\vec{\mathbf{a}}$. По правилу треугольника вектор $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}$ задается направленным отрезком $\overrightarrow{AA}$, а значит он является нулевым. Тем самым, $\vec{\mathbf{a}}+(-\vec{\mathbf{a}})=\vec{\mathbf{o}}$.

Свойства операции сложения векторов

1. $\forall\ \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ выполнено $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ (*коммутативность*);

2. $\forall\ \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ выполнено $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})+\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}+(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})$ (*ассоциативность*);

3. $\forall\ \vec{\mathbf{a}}$ выполнено $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{o}}=\vec{\mathbf{a}}$.

4. $\forall\ \vec{\mathbf{a}}\ \exists!\ \vec{\mathbf{x}}$ такой что $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{o}}$.

Значок $\forall$ читается «для любого» или «для любых». Значок $\exists$ читается «существует». Пара значков $\exists!$ читается «существует, и притом, единственный». Свойство 2 позволяет использовать обозначение $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}$ без расстановки скобок.

Доказательство. Мы докажем только первое свойство для неколлинеарных векторов. Отложим $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ от одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$. Достроим ΔOAB до параллелограмма $OACB$. Пусть $\vec{\mathbf{c}}$ – это вектор, который задается направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$ (рис. 2.9). С одной стороны, очевидно, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, т.е. $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{AC}$. Тогда по правилу треугольника $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OC}$. С другой стороны, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$, поэтому $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{BC}$ и по правилу треугольника $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{c}}$. ■

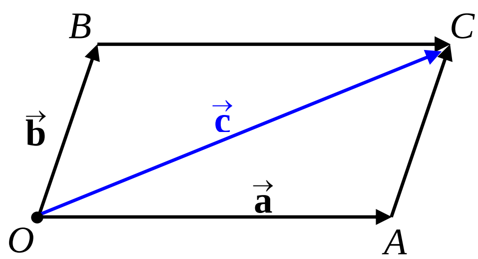


Рис. 2.9

Попутно мы узнали еще один способ построения суммы векторов, который называется *правилом параллелограмма*. Данные векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ откладываем из одной точки O, получившийся треугольник достраиваем до параллелограмма. Тогда диагональ параллелограмма, исходящая из точки O, задает сумму $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$.

Определение. *Разностью двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой вектор $\vec{\mathbf{d}}$, что $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}$. Пишем $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$.

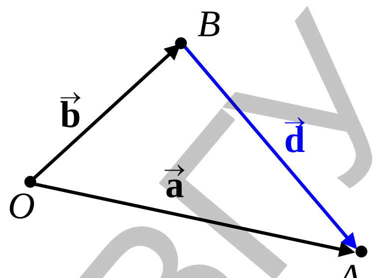


Рис. 2.10

Как построить разность на чертеже? Отложим $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ от одной точки O: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{OB}$, и пусть $\vec{\mathbf{d}}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 2.10). Тогда по правилу треугольника $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}$. Значит, $\vec{\mathbf{d}}=\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}$. Тем самым, если мы достроим ΔOAB до параллелограмма $OACB$, то диагональ $\overrightarrow{OC}$ задает сумму, а диагональ $\overrightarrow{BA}$ задает разность векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 2.11).

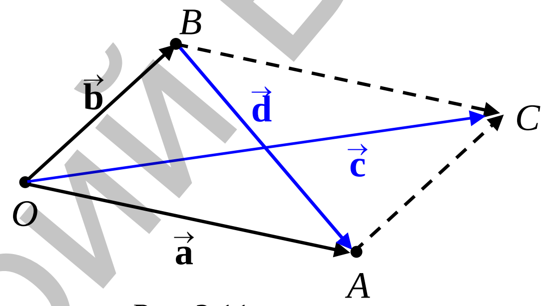


Рис. 2.11

Определение. *Произведением вектора* $\vec{\mathbf{a}}$ *на число* λ называется такой вектор $\vec{\mathbf{b}}$, что:

1. $\vec{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda>0$, и $\vec{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda<0$;

2. $|\vec{\mathbf{b}}|=|\lambda|\cdot|\vec{\mathbf{a}}|$.

Пишем $\vec{\mathbf{b}}=\lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Другими словами, векторы $2\vec{\mathbf{a}}$ и $-2\vec{\mathbf{a}}$ имеют длину в 2 раза больше, чем $\vec{\mathbf{a}}$, но $2\vec{\mathbf{a}}$ имеет такое же направление, что и вектор $\vec{\mathbf{a}}$, а вектор $-2\vec{\mathbf{a}}$ имеет направление противоположное к $\vec{\mathbf{a}}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число еще называются *линейными операциями*.

Примеры. **1.** Пусть A_1B_1 – средняя линия в треугольнике ΔABC, параллельная к стороне AB, $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}}=\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.12). Тогда $\vec{\mathbf{b}}=\frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}$, потому, что эти векторы сонаправленные, а длина вектора $\vec{\mathbf{b}}$ в 2 раза меньше, чем у вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

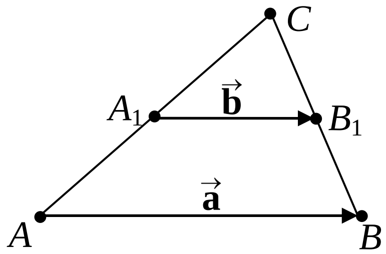


Рис. 2.12

2. Пусть AM – медиана в ΔABC, и $\vec{\mathbf{c}}=\overrightarrow{AM}$. Достроим треугольник до параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.13). Пусть M – точка пересечения диагоналей, и пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{\mathbf{b}}$. Тогда $\overrightarrow{AD}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$, а $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Значит, вектор $\vec{\mathbf{c}}$, который задается медианой $\overrightarrow{AM}$, равен полусумме векторов, задаваемых сторонами треугольника $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\vec{\mathbf{c}}=\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})$.

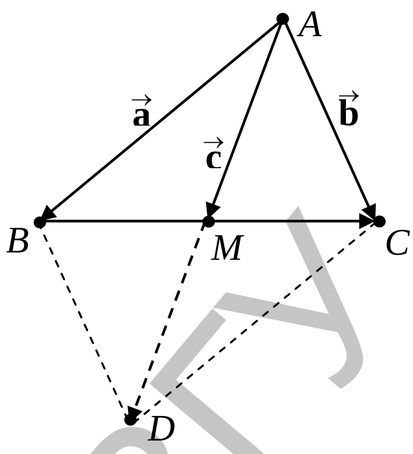


Рис. 2.13

Свойства операции умножения вектора на число (без доказательства)**.** Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ и для любых $\lambda,\mu\in \boldsymbol{R}$ выполнено

5. $\lambda(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})=\lambda\vec{\mathbf{a}}+\lambda\vec{\mathbf{b}}$;

6. $(\lambda+\mu)\vec{\mathbf{a}}=\lambda\vec{\mathbf{a}}+\mu\vec{\mathbf{a}}$;

7. $\lambda(\mu\vec{\mathbf{a}})=(\lambda\mu)\vec{\mathbf{a}}$;

8. $1\cdot\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{a}}$.

§ 4. Координаты вектора

Пусть дан вектор $\vec{\mathbf{a}}$. Отложим его из начала координат: $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{OM}$. Пусть точка M имеет координаты $M(a_1, a_2)$ (рис. 2.14). Тогда мы припишем вектору $\vec{\mathbf{a}}$ такие же координаты: $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$.

Из ΔOAA_1 по теореме Пифагора находим:

$$|OA|=\sqrt{|OA_1|^2+|OA_2|^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

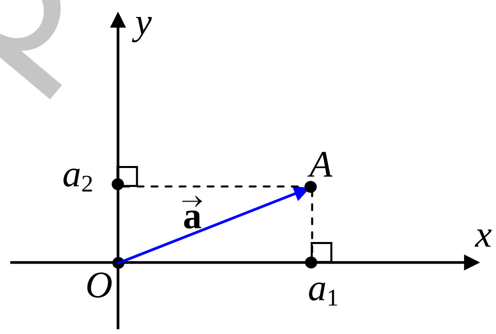


Рис. 2.14

Значит, длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{\mathbf{a}}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}. \qquad (2.3)$$

Пусть нам известны координаты концов вектора $\vec{\mathbf{a}}=\overrightarrow{AB}$: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (рис. 2.15). Тогда координаты вектора $\vec{\mathbf{a}}$ находятся следующим образом: $\vec{\mathbf{a}}(x_2-x_1, y_2-y_1)$ (без доказательства).

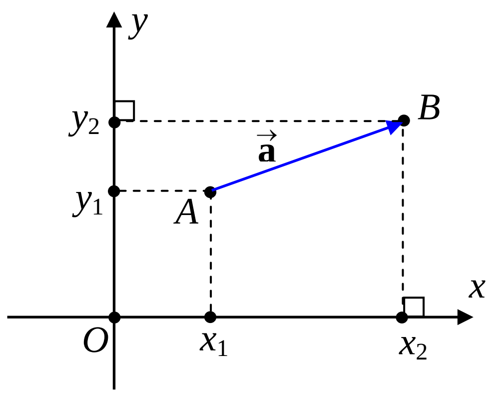


Рис. 2.15

Итак, следует выучить наизусть правило: *для того, чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала*. Очевидно, что $B(x_1+a_1, y_1+a_2)$, т.е. *для того, чтобы найти координаты конца вектора, надо к координатам его начала прибавить координаты самого вектора*.

Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ совпадает с длиной отрезка AB. Эта величина еще называется *расстоянием между точками* A и B. Из формулы (2.3) следует формула для вычисления расстояния между точками:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \tag{2.4}$$

Пусть нам известны координаты векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$: $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2)$ и $\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$. Тогда координаты вектора $\vec{\mathbf{c}}$ можно найти так: $\vec{\mathbf{c}}(a_1+b_1,a_2+b_2)$. Если $\vec{\mathbf{d}}=\lambda\vec{\mathbf{a}}$, то $\vec{\mathbf{d}}(\lambda a_1,\lambda a_2)$. Таким образом, следует выучить наизусть правило: *при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число*.

Теорема **2.1** (Признак коллинеарности векторов). *Для того, чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны*:

$$\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2)\,||\,\vec{\mathbf{b}}(b_1,b_2) \;\Leftrightarrow\; \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}.$$

Единичные векторы, сонаправленные с положительными направлениями координатных осей, называются ортами. Их принято обозначать $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ или $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$. Их координаты: $\vec{\mathbf{i}}(1,0)$, $\vec{\mathbf{j}}(0,1)$ (рис. 2.16). Произвольный вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1,a_2)$ можно представить в виде комбинации этих векторов: $\vec{\mathbf{a}}=a_1\vec{\mathbf{i}}+a_2\vec{\mathbf{j}}$.

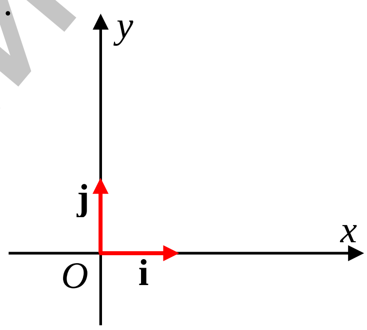


Рис. 2.16

§ 5. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется *число*

$$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|\,\cos\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}). \tag{2.5}$$

Число $\vec{\mathbf{a}}^2=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

Из определения получаем

$$\vec{\mathbf{a}}^2=|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{a}}|\cos 0^\circ=|\vec{\mathbf{a}}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{\mathbf{a}}|=\sqrt{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{a}}}\,.$$

Также из определения очевидно, что равенство $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$ возможно только в следующих случаях: 1. $|\vec{\mathbf{a}}|=0$, 2. $|\vec{\mathbf{b}}|=0$, 3. $\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}})=\pi/2$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема **2.2.** **1.** *Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

2. *Для того, чтобы ненулевые векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю* ($\vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}} \;\Leftrightarrow\; \vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=0$).

Из определения следует формула, по которой можно вычислить угол между векторами:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}. \quad (2.6)$$

Примем без доказательства, что скалярное произведение векторов $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$ и $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2)$ вычисляется по формуле:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (2.7)$$

Из формул (2.6) и (2.7) вытекает формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad (2.8)$$

и условие перпендикулярности векторов:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0. \quad (2.9)$$

В дальнейшем, при решении задач мы будем позволять себе достаточно распространенную вольность: направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ мы будем называть вектором.

Пример. Даны координаты вершин четырехугольника: $A(-3,-1)$, $B(7,-3)$, $C(8, 2)$, $D(-2, 4)$. Докажите, что $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство. Находим координаты векторов, которые задаются противоположными сторонами. Для того, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, из координат точки B вычитаем координаты точки A; для того, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{DC}$, из координат точки C вычитаем координаты точки D:

$\overrightarrow{AB}(7-(-3),-3-(-1))$, $\overrightarrow{AB}(7+3,-3+1)$, $\overrightarrow{AB}(10,-2)$

$\overrightarrow{DC}(8-(-2), 2-4)$, $\overrightarrow{DC}(8+2,-2)$, $\overrightarrow{DC}(10,-2)$.

Видим, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т.е. противоположные стороны четырехугольника параллельны и равны. Значит, $ABCD$ – параллелограмм. Нам надо проверить, что две смежные стороны перпендикулярны. Координаты $\overrightarrow{AB}$ мы уже знаем. Найдем координаты $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD}$ (1, 5). Вычисляем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 10 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = 10 - 10 = 0.$$

Значит, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. Следовательно, $ABCD$ – прямоугольник.

§ 6. Середина отрезка. Площадь параллелограмма и треугольника

Пусть нам известны координаты концов отрезка AB: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Пусть точка C делит отрезок AB пополам (рис. 2.17). Требуется найти ее координаты (x, y).

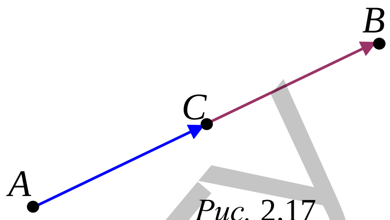


Рис. 2.17

По чертежу мы видим, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Находим координаты этих векторов: $\overrightarrow{AC}$ $(x-x_1, y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2-x, y_2-y)$. Векторы равны, значит и их координаты равны:

$$x-x_1=x_2-x, \quad y-y_1=y_2-y.$$

Отсюда находим, что $2x=x_1+x_2$, $2y=y_1+y_2$. Окончательно

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2.10}$$

То есть координаты середины отрезка – это среднее арифметическое от координат его концов.

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $ABCD$ *– параллелограмм, и пусть нам известны координаты векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{AD}(b_1, b_2)$ (рис. 2.18). *Тогда площадь параллелограмма вычисляется по формуле:*

$$S_{ABCD}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

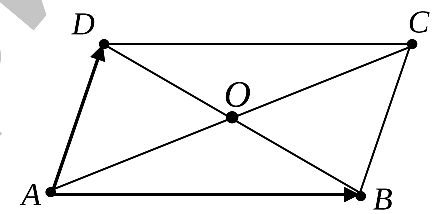


Рис. 2.18

(здесь mod означает модуль: определитель может быть отрицательным, а площадь обязательно неотрицательная).

Следствие. *Пусть известны координаты векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{AC}(b_1, b_2)$ (рис. 2.19). *Тогда площадь треугольника* ABC *вычисляется по формуле*:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

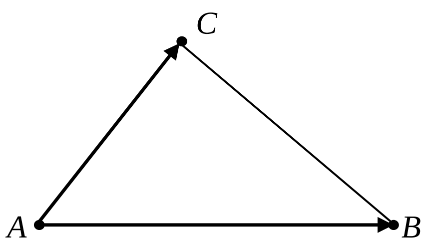


Рис. 2.19

§ 7. Уравнение прямой на плоскости

Еще в рамках школьной программы вы изучали, что уравнение

$$y=kx+b \tag{2.13}$$

задает на плоскости прямую. Это значит, что прямая состоит из тех и только тех точек, у которых координаты (x, y) удовлетворяют уравнению (2.13).

При $x=0$ мы находим из (2.13), что $y=b$. Отсюда следует геометрический смысл коэффициента b: это отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (он может быть и отрицательным). Выберем на прямой направление, которое соответствует возрастанию y, и назовем его положительным. Угол между положительным направлением оси Ox и положительным направлением прямой называется *углом наклона прямой* (рис. 2.20). Геометрический смысл коэффициента k: $k=\operatorname{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона прямой. Поэтому k называется *угловым коэффициентом*.

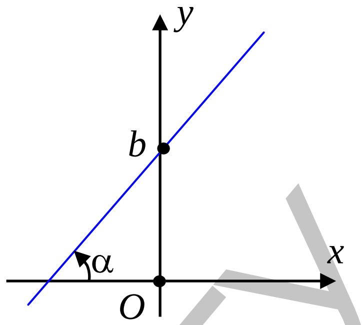


Рис. 2.20

Определение. Углом между прямыми на плоскости называется меньший из двух углов, которые прямые образуют при пересечении (рис. 2.21).

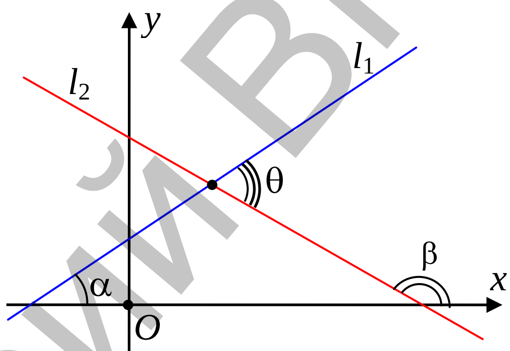


Рис. 2.21

***Теорема* 2.4.** *Пусть две прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом*

$$l_1\colon y=k_1x+b_1, \qquad l_2\colon y=k_2x+b_2.$$

Тогда:

1) *угол между ними вычисляется по формуле* $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{|k_2-k_1|}{|1+k_1k_2|}$;

2) *прямые совпадают тогда и только тогда, когда* $k_1=k_2,\ b_1=b_2$;

3) *прямые параллельны тогда и только тогда, когда* $k_1=k_2,\ b_1\neq b_2$;

3) *прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда* $k_2=-1/k_1$.

Например, прямые $l_1\colon y=2x+5$ и $l_2\colon y=2x-3$ параллельны, а прямые $l_1\colon y=2x+5$ и $l_3\colon y=-0{,}5x-3$ перпендикулярны.

Заметим, что не любую прямую на плоскости можно задать с помощью уравнения с угловым коэффициентом. Прямые параллельные оси Oy задаются уравнениями вида $x=c$. Оба эти вида уравнений объединяются уравнением вида:

$$ax+by+c=0, \tag{2.14}$$

которое называется *общим уравнением прямой*. И обратно, любое уравнение вида (2.14) задает на плоскости прямую. Для того, чтобы из (2.13) получить (2.14), достаточно перенести все члены уравнения в одну часть.

Напомним, что расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую (рис. 2.22).

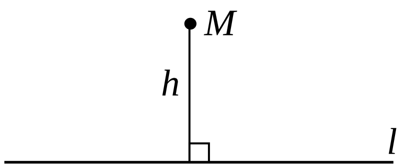


Рис. 2.22

Теорема 2.5. *Пусть прямая* l *на плоскости задана общим уравнением* (2.12). *Тогда расстояние от точки* $M(x, y)$ *до этой прямой вычисляется по формуле:*

$$h = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (2.15)$$

Пусть нам известны координаты двух точек на прямой l: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Вопрос: как составить уравнение прямой l? Находим сначала угловой коэффициент:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

После этого пишем уравнение:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Остается раскрыть скобки и перенести y_1 в правую часть уравнения. Пример составления уравнения приводится в параграфе 9.

§ 8. Применение определителей к вычислению площадей и объемов в пространстве

Не будем подробно останавливаться на том, как определяется декартова система координат в пространстве. Для примера на рис. 2.23 показано, как строятся точки $B(5,–1, 2)$ и $C(4, 5,–3)$ по их координатам.

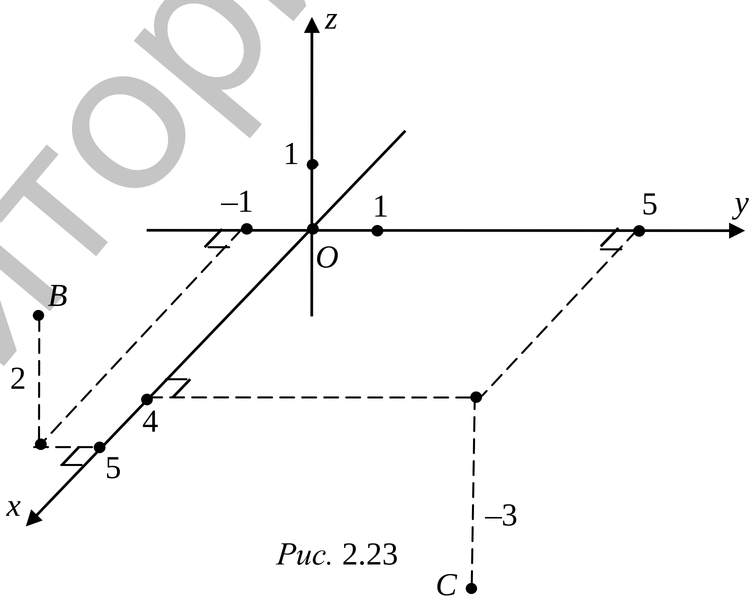


Рис. 2.23

Точно так же, как и на плоскости действует правило: *для того, чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.*

Пусть в пространстве дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.24). Пусть $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ – направленные отрезки, лежащие на ребрах параллелепипеда, исходящих из одной точки, $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ – векторы, которые за-

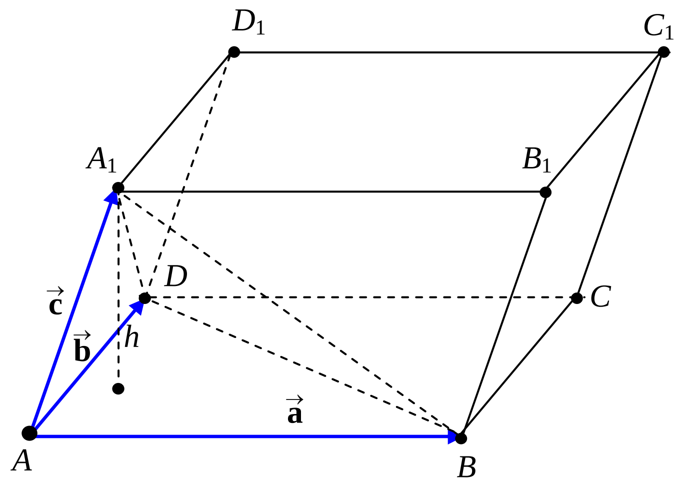


Рис. 2.24

даются этими направленными отрезками. Тогда говорим, что параллелепипед построен на векторах $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$, отложенных из одной точки A.

***Теорема* 2.6.** *Пусть нам известны координаты векторов* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3)$. *Тогда объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных из одной точки, вычисляется по формуле*:

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.16)$$

В данном случае $\mathrm{mod}\,x$ означает модуль числа x. Определитель может получиться отрицательным, а объем всегда неотрицателен. Объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ (она тоже показана на чертеже) составляет 1/6 от объема параллелепипеда. Поэтому верно следующее утверждение.

Следствие. *Пусть нам известны координаты векторов* $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{\mathbf{c}}(c_1, c_2, c_3)$. *Тогда объем треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, отложенных из одной точки, вычисляется по формуле*:

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.17)$$

***Теорема* 2.7.** *Пусть параллелограмм ABCD*, расположенный в пространстве, построен на векторах $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$, *отложенных из одной точки A. Тогда его площадь вычисляется по формуле:*

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}. \qquad (2.18)$$

Площадь треугольника ΔABD, построенного на векторах $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$, отложенных из точки A составляет половину площади параллелограмма.

§ 9. Уравнения прямой и плоскости в пространстве

Плоскость π в пространстве можно задать с помощью трех точек $M_o, M_1, M_2 \in \pi$, не лежащих на одной прямой. В этом случае мы можем рассмотреть два неколлинеарных вектора $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{M_o M_1}$ и $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{M_o M_2}$ параллельных плоскости (рис. 2.25).

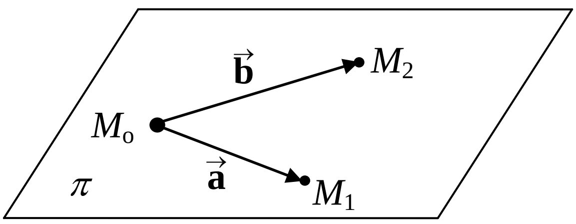


Рис. 2.25

***Теорема* 2.8.** *Плоскость π, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ задается уравнением:*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.19}$$

Следствие. *Плоскость π, проходящая через три точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой задается уравнением:*

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ x_2-x_o & y_2-y_o & z_2-z_o \end{vmatrix} = 0. \tag{2.20}$$

После раскрытия определителя (2.19) или (2.20) и приведения подобных слагаемых мы получим уравнение вида:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2.21}$$

которое называется *общим уравнением плоскости*. Оказывается, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(a, b, c)$ перпендикулярен плоскости, которая задается уравнением (2.21), и он называется *вектором нормали* к плоскости.

***Теорема* 2.9.** *Пусть плоскость π задается общим уравнением* (2.21). Тогда расстояние от произвольной точки $M(x_o, y_o, z_o)$ *до плоскости вычисляется по формуле:*

$$h = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2.22}$$

***Теорема* 2.10.** *Прямая l, проходящая через точку $M_o(x_o, y_o, z_o)$, параллельно вектору $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ задается каноническим уравнением:*

$$\frac{x-x_o}{a_1} = \frac{y-y_o}{a_2} = \frac{z-z_o}{a_3}, \tag{2.23}$$

параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t, \\ y = y_o + a_2 t, \\ z = z_o + a_3 t, \ t \in \boldsymbol{R}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Вектор $\vec{\mathbf{a}} \| l$ называется направляющим вектором прямой l.

Следствие. *Прямая, проходящая через две различные точки $M_o(x_o, y_o, z_o)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, задается уравнением:*

$$\frac{x-x_o}{x_1-x_o} = \frac{y-y_o}{y_1-y_o} = \frac{z-z_o}{z_1-z_o}. \tag{2.25}$$

§ 10. Уравнение окружности

Определение. *Окружностью* радиуса r с центром в точке M_o называется множество на плоскости, состоящее из всех точек, расстояние от каждой из которых до M_o равно r.

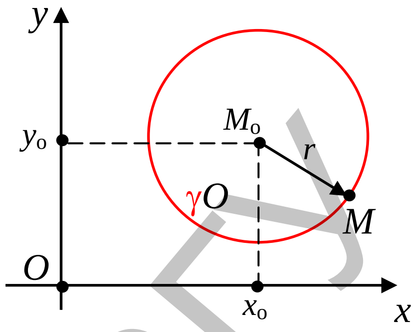


Рис. 2.26

***Теорема* 2.11.** *Окружность* ω *радиуса* r, *имеющая центр в точке* $M_o(x_o, y_o)$ (рис. 2.26), *задается уравнением*

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2. \qquad (2.23)$$

Например, окружность радиуса 5 с центром в точке $M_o(2,-3)$ задается уравнением $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

§ 11. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Известны координаты трех вершин параллелограмма*: $A(-5,1)$, $B(1,3)$, $D(-4,5)$ (рис. 2.27).

а) *найти координаты четвертой вершины* C;

б) *вычислить площадь параллелограмма*;

в) *найти его высоту, проведенную из вершины* D *к стороне* AB;

г) *найти координаты точки* O *пересечения диагоналей.*

Решение. а) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Для этого от координат точки B мы вычитаем координаты точки A:

$$\overrightarrow{AB}(1-(-5), 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(6,2).$$

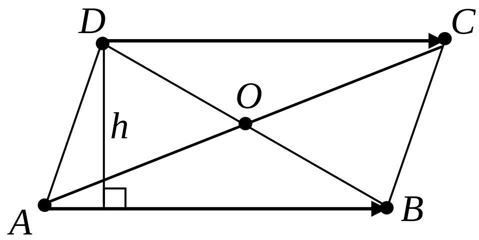


Рис. 2.27

Но $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Поэтому $\overrightarrow{DC}(6,2)$. Для того, чтобы найти координаты точки C, мы к координатам точки D прибавляем координаты вектора $\overrightarrow{DC}$: $C(-4+6, 5+2)$; $C(2,7)$.

б) Находим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$. Для этого из координат точки D вычитаем координаты точки A: $\overrightarrow{AD}(-4-(-5), 5-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1,4)$. Применяем формулу (2.11):

$$S_{ABCD}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=|6\cdot 4-2\cdot 1|=22.$$

в) Из школьной программы мы знаем формулу $S_{ABCD}=|AB|\cdot h$. Отсюда $h=\dfrac{S_{ABCD}}{|AB|}$. Находим длину стороны AB: $|AB|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Тогда $h=\dfrac{22}{2\sqrt{10}}=\dfrac{11}{\sqrt{10}}=\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$.

г) Координаты точки O вычисляем как среднее арифметическое от координат любых двух противоположных вершин: например, B и D. $O\left(\frac{1-4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \Leftrightarrow O(-1{,}5; 4)$.

Ответ: $C(2, 7)$; $S_{ABCD} = 22$; $h = \frac{11\sqrt{10}}{10}$, $O(-1{,}5; 4)$.

Задача 2. *Вершины четырехугольника находятся в точках* $A(1, 2)$, $B(7,-6)$, $C(11,-3)$, $D(8, 1)$. *Показать, что ABCD – трапеция. Найти длины оснований трапеции, ее площадь и* $\cos\angle DAB$ (рис. 2.28).

Решение. Находим координаты векторов $\vec{AB}(6,-8)$, $\vec{BC}(4, 3)$, $\vec{CD}(-3, 4)$, $\vec{AD}(7,-1)$. Проверяем векторы, определяемые противоположными сторонами четырехугольника на коллинеарность:

$-\frac{6}{3} = -\frac{8}{4}$ – верно, значит $\vec{AB}$ коллинеарен $\vec{CD}$.

$\frac{4}{7} = \frac{3}{-1}$ – неверно, значит $\vec{BC}$ неколлинеарен $\vec{AD}$.

Таким образом, в четырехугольнике две противоположные стороны коллинеарны, а две – нет. Значит это – трапеция, и основаниями являются AB и CD. Находим длины сторон:

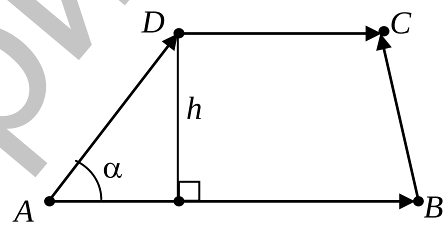


Рис. 2.28

$$|\vec{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

и аналогично $|\vec{BC}| = 5$; $|\vec{CD}| = 5$; $|\vec{AD}| = 5\sqrt{2}$.

Обозначим $\alpha = \angle BAD$. Тогда:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|\vec{AB}||\vec{AD}|} = \frac{6\cdot 7 + (-8)\cdot(-1)}{10\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

следовательно $\angle BAD = 45^\circ$. Не всегда может получиться табличный угол, поэтому можем поступить так: зная $\cos\alpha$, находим:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $h = |\vec{AD}|\cdot\sin\alpha = 5$. Зная высоту и длины оснований, находим площадь: $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)\cdot h = \frac{75}{2}$. Другой способ вычисления высоты с помощью уравнения прямой, приводится в следующей задаче.

Ответ: $|\vec{AB}| = 10$, $|\vec{BC}| = 5$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $S_{ABCD} = \frac{75}{2}$.

***Задача* 3.** *Известны координаты вершин треугольника*: $A(-1,3)$, $B(11,0)$, $C(9,9)$ (рис. 2.29).

а) *составить уравнение стороны* AB, *высоты* CD *и найти координаты точки* D;

б) *вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой;*

в) *вычислить длину основания* AB *и площадь треугольника по формуле* $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot h$;

г) *вычислить площадь* ΔABC *по формуле* (2.12). *Сравните с ранее полученным результатом.*

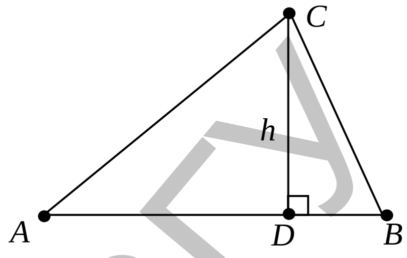


Рис. 2.29

Решение. а) Находим угловой коэффициент прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{11-(-1)}=-\frac{1}{4}.$$

Составляем уравнение прямой AB:

$$y-y_A=k_{AB}(x-x_A)\;\Leftrightarrow\; y-3=-\frac{1}{4}(x-(-1))\;\Leftrightarrow\; y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}.$$

Прямые AB и CD перпендикулярны. Поэтому $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=4$. Составляем уравнение прямой CD:

$$y-y_C=k_{CD}(x-x_C)\Leftrightarrow\; y-9=4(x-9)\;\Leftrightarrow\; y=4x-27.$$

Точка D является общей точкой для прямых AB и CD. Значит, ее координаты должны удовлетворять одновременно уравнениям этих двух прямых. Поэтому для нахождения координат точки D мы объединяем уравнения прямых AB и CD в одну систему и решаем эту систему.

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-27=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}, \\ y=4x-27. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow D(7,1).$$

б) Перепишем уравнение прямой AB в виде общего уравнения:

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}\;\Leftrightarrow\; 4y=-x+11\;\Leftrightarrow\; x+4y-11=0.$$

Применим формулу (2.15) к этому уравнению и к точке C:

$$h=\frac{|9+4\cdot 9-11|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|34|}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}.$$

в) Находим координаты векторов $\vec{AB}(12,-3)$, $\vec{AC}(10,6)$. Тогда длина основания и площадь треугольника:

$$|\vec{AB}|=\sqrt{12^2+(-3)^2}=3\sqrt{4^2+1^2}=3\sqrt{17};$$

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}=3\cdot 17=51.$$

г) $$S_{ABC}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}12 & -3\\ 10 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|12\cdot 6-10\cdot(-3)|=\frac{1}{2}|72+30|=\frac{1}{2}\cdot 102=51.$$

Это совпадает с ранее полученным результатом.

Ответ: а) AB: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$, CD: $y=4x-27$; $D(7,1)$;

б) $h=2\sqrt{17}$; в) $|AB|=3\sqrt{17}$, $S=51$.

***Задача* 4.** *Вершина A треугольника ΔABC находится в полюсе, а вершины B и C имеют полярные координаты*: $B(6,\frac{5\pi}{4})$, $C(4,\frac{7\pi}{12})$. *Вычислить площадь ΔABC и длину стороны BC. Изобразить данный треугольник.*

Решение. Нарисуем чертеж к задаче, построив точки B и C по их полярным координатам (рис. 2.30). Из чертежа и геометрического смысла полярных координат находим, что:

$AB=6$, $AC=4$, $\angle BAC=|\varphi_2-\varphi_1|=\frac{5\pi}{4}-\frac{7\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$.

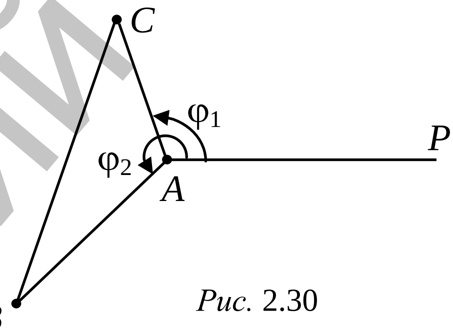


Рис. 2.30

Тогда:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

По теореме косинусов:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=36+16-2\cdot 6\cdot 4\cdot(-\frac{1}{2})=76,$$

$$BC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$, $BC=2\sqrt{19}$.

***Задача* 5.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$*: $A(4,0,1)$, $B(5,-1,1)$, $C(4,7,-5)$, $S(7,5,2)$ (рис. 2.31).

а) *найти объем пирамиды, площадь основания ABC и высоту*;

б) *изобразить данную пирамиду в декартовой системе координат* (*построить точный чертеж)*;

в) *составить уравнение плоскости основания и вычислите высоту по формуле расстояния от точки до плоскости. Сравнить с ранее полученным результатом.*

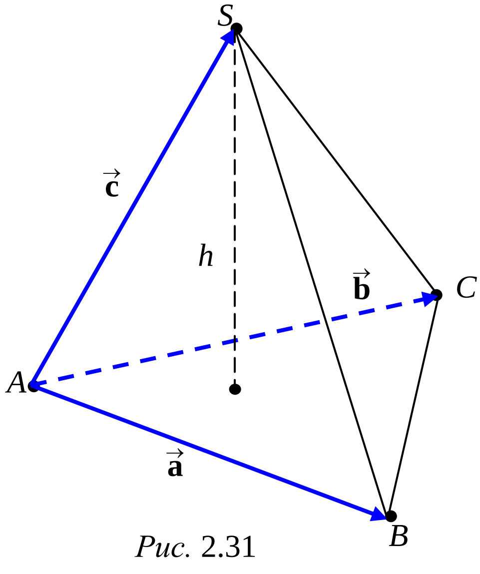


Рис. 2.31

Решение. а) Из одной вершины A исходят векторы $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{AS}$. Находим их координаты:

$$\vec{\mathbf{a}}\,(1,-1,0),\quad \vec{\mathbf{b}}(0,7,-6),\quad \vec{\mathbf{c}}\,(3,5,1).$$

Объем пирамиды (согласно формуле (12.7)):

$$V = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\left(1\cdot\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\,|37+18| = \frac{55}{6}.$$

Основанием пирамиды служит треугольник. Его площадь равна половине площади параллелограмма. Поэтому:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+36+49} = \frac{11}{2}.$$

Из школьной математики должно быть известно, что $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}\cdot h$. Отсюда:

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{55/2}{11/2} = 5.$$

б) Построим изображение данной пирамиды в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 2.32).

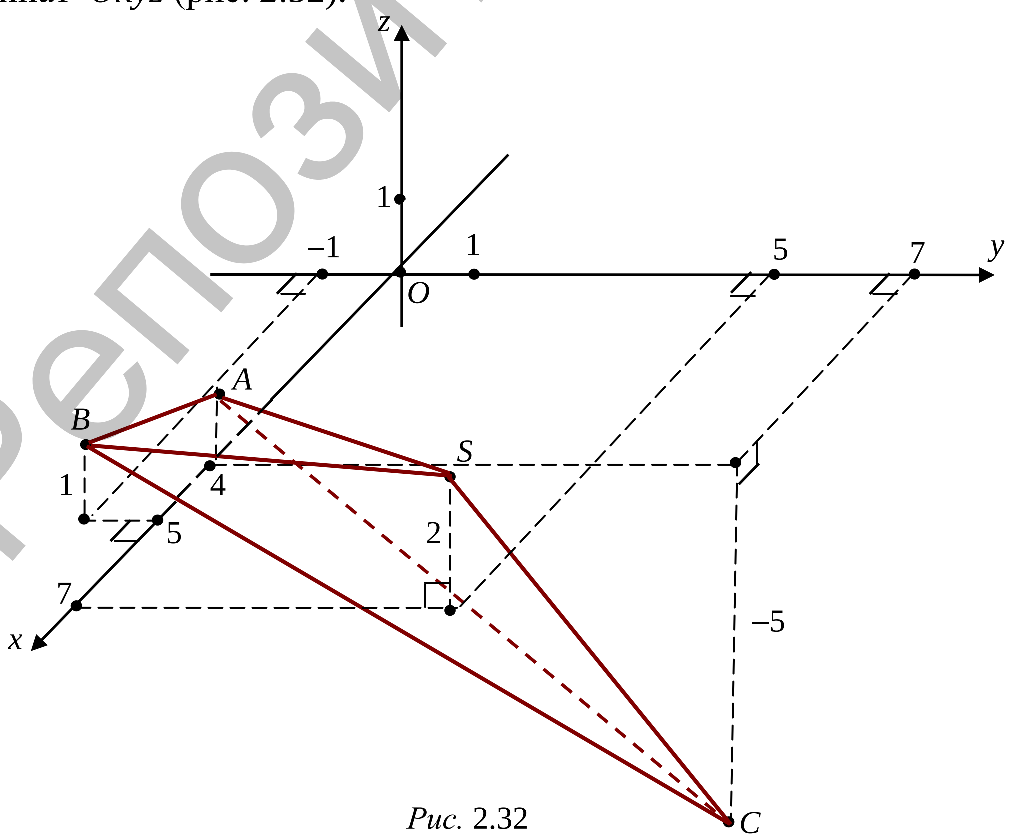


Рис. 2.32

в) Плоскость, проходящая через точку $A(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум данным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ задается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляем в это уравнение координаты точки A и векторов $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+0 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$6(x-4) + 6y + 7(z-1) = 0 \iff 6x + 6y + 7z - 31 = 0.$$

Желательно сделать проверку, подставив в это уравнение координаты точек A, B, C.

Высота пирамиды равна расстоянию от точки S до плоскости $\pi = ABC$. Мы ее можем вычислить по формуле (2.22):

$$h = \frac{|6\cdot 7 + 6\cdot 5 + 7\cdot 2 - 31|}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2}} = \frac{|42 + 30 + 14 - 31|}{\sqrt{36 + 36 + 49}} = \frac{55}{11} = 5.$$

Это совпадает с ранее полученным результатом.

Ответ: а) $V = \frac{55}{6}$, $S_{осн.} = \frac{11}{2}$, $h = 5$; в) ABC: $6x + 6y + 7z - 31 = 0$, $h = 5$.

***Задача* 6.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды $SABC$, где ABC – основание, а S – вершина*: $A(-3, 7, 1)$, $B(-1, 9, 2)$, $C(-3, 6, 6)$ $S(6, -5, -2)$ (рис. 2.33).

а) *составить уравнение плоскости основания* $\pi = ABC$;

б) *составить уравнение прямой SH (высоты), найти координаты точки H падения высоты*;

в) *вычислить высоту пирамиды по формуле расстояния между точками.*

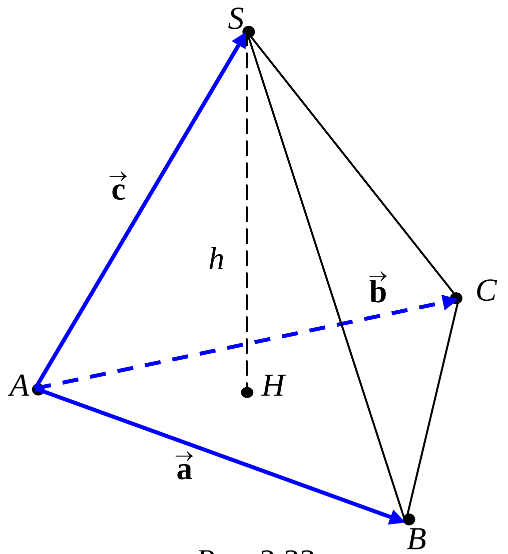


Рис. 2.33

Решение. а) Найдем координаты двух векторов параллельных плоскости основания $\pi = ABC$:

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}(2, 1, 1), \ \vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{AC}(0, -1, 5).$$

Плоскость, проходящая через точку $A(x_o, y_o, z_o)$, параллельно двум данным векторам $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\mathbf{b}}(b_1, b_2, b_3)$ задается уравнением (2.19). Подставляем в это уравнение наши данные:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 & z-1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$11(x-3)-10(y-7)-2(z-1)=0\,,$$
$$11x-10y-2z+105=0\,.$$

б) Из уравнения плоскости находим, что вектор $\vec{\mathbf{n}}(11,–10,–2)$ является вектором нормали к плоскости. Этот же вектор будет направляющим для прямой $h = SH$. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_о, y_о, z_о)$ с направляющим вектором $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2, a_3)$ имеет вид

$$\begin{cases} x = x_о + a_1 t, \\ y = y_о + a_2 t, \\ z = z_о + a_3 t. \end{cases}$$

В нашем случае получаем уравнение:

$$SH\colon \begin{cases} x = \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем основание перпендикуляра. Это точка пересечения прямой SH с плоскостью π. Для этого мы должны решить совместно уравнения SH и π. Подставляем x, y, z из уравнения SH в уравнение π:

$$11(6+11t)-10(-5-10t)-2(-2-2t)+105=0,$$
$$66+121t+50+100t+4+4t+105=0,$$
$$225y=-225, \quad t=-1.$$

Найденное t подставляем в уравнение SH и находим координаты точки H:

$$\begin{cases} x = \ 6 + 11\cdot(-1) = -5, \\ y = -5 - 10\cdot(-1) = 5\,, \\ z = -2 - 2\cdot(-1) = 0\,. \end{cases}$$

$H(-5, 5, 0)$.

в) Вычисляем длину отрезка CH:

$$|CH| = \sqrt{(-5-6)^2 + (5-(-5))^2 + (0-(-2))^2} = 15.$$
$$11x-10y-2z+105=0\,.$$

***Ответ*:** а) Уравнение плоскости основания: $11x-10y-2z+105=0$;

б) уравнение высоты SH: $\begin{cases} x = \ 6 + 11t, \\ y = -5 - 10t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$ в) высота $|CH| = 15$.

Задания для решения на практических занятиях

1. На чертеже изображен параллелограмм $ABCD$, середины его сторон и векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ (рис. 2.34). Построить векторы а) $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$; б) $2\vec{\mathbf{b}}$; в) $-2\vec{\mathbf{b}}$.

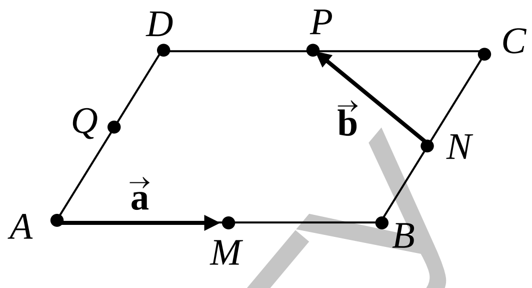


Рис. 2.34

2. Пусть $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AN}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{DQ}$. Задания те же.

3. $\vec{\mathbf{a}}(5,-2)$, $\vec{\mathbf{b}}(2,2)$. Найти координаты вектора $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + 5\vec{\mathbf{b}}$. Найти длину этого вектора.

4. Даны координаты трех вершин параллелограмма $A(1,2)$, $B(4,3)$, $D(2,9)$. Найти координаты вершины C. Вычислить площадь параллелограмма и найти его высоту, проведенную из вершины D.

5. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(2,\ 2)$, $B(3,\ 4)$, $C(6,\ 1)$, $D(8,-4)$. Показать, что $ABCD$ – трапеция. Найти длины оснований трапеции, ее площадь и $\cos\angle DAB$.

6. Даны координаты вершин ΔABC: $A(1,2)$, $B(4,3)$, $C(2,9)$.

а) Найти длины его сторон и доказать, что треугольник прямоугольный (использовать теорему Пифагора). Найти углы этого треугольника (вспомнить определение синуса и косинуса, как отношения катетов к гипотенузе).

б) Составить уравнения катетов, и убедиться, что данные прямые перпендикулярны.

7. Даны координаты двух вершин правильного треугольника: $A(-3,\ 2)$, $C(1,6)$. Вычислить его площадь. Составить уравнение медианы BM.

8. а) Даны координаты двух противоположных вершин квадрата: $A(1,-7)$, $C(-3,5)$. Вычислить его площадь.

б) Найти координаты точки пересечения диагоналей. Составить уравнение обеих диагоналей квадрата.

в)* Найти координаты остальных вершин.

9. а) Вычислить площадь треугольника, заключенного между координатными осями и прямой l: $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

б) Составить уравнение прямой, параллельной к l и отсекающей от координатного угла треугольник такой же площади (рис. 2.35).

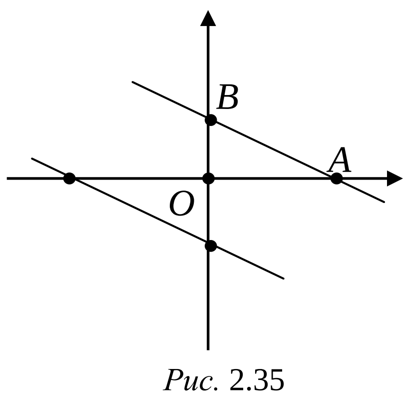


Рис. 2.35

10. Даны координаты вершин ΔABC: $A(6,-5)$, $B(-2,1)$, $C(4,4)$.

а) Составить уравнение сторон AB и BC. Найти угол $\beta=\angle ABC$;
б) Составить уравнение высоты AD и найти координаты точки D;
в) Найти координаты точки M – середины стороны BC. Составить уравнение средней линии MN, параллельной к стороне AB.

11. Вычислить угол между прямыми:
а) $y=\frac{1}{2}x+5$ и $y=3x$; б) $y=x+1$ и $y=-3x$.

12. Составить уравнение окружности, которая имеет центр в точке $A(-1,2)$ и проходит через точку $B(-4,6)$.

Задания для самостоятельного решения

***Задача* 1.** *Известны координаты вершин треугольника* ΔABC (рис. 2.29).

а) *составить уравнение стороны* AB*, высоты* CD *и найти координаты точки* D;

б) *вычислить высоту в треугольнике по формуле расстояния от точки до прямой;*

в) *вычислить длину основания* AB *и площадь треугольника по формуле* $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot h$;

г) *вычислить площадь* ΔABC *по формуле* (2.12). *Сравнить с ранее полученным результатом.*

1. $A(-3,1)$, $B(9,5)$, $C(-2,8)$.
2. $A(-2,-5)$, $B(1,7)$, $C(8,1)$.
3. $A(-5,-4)$, $B(10,-1)$, $C(-1,2)$.
4. $A(0,1)$, $B(12,-3)$, $C(5,6)$.
5. $A(0,2)$, $B(9,-4)$, $C(7,6)$.
6. $A(-1,2)$, $B(5,-2)$, $C(6,6)$.
7. $A(0,4)$, $B(3,-2)$, $C(-4,-3)$.
8. $A(0,-4)$, $B(8,0)$, $C(4,-7)$.
9. $A(0,-3)$, $B(9,0)$, $C(5,-8)$.
10. $A(0,-3)$, $B(-12,0)$, $C(-2,6)$.
11. $A(-6,0)$, $B(6,4)$, $C(-5,7)$.
12. $A(-1,-5)$, $B(2,7)$, $C(8,-3)$.
13. $A(-5,1)$, $B(10,-5)$, $C(2,4)$.
14. $A(-6,1)$, $B(6,-3)$, $C(-1,6)$.
15. $A(-6,2)$, $B(3,-4)$, $C(1,6)$.
16. $A(1,-2)$, $B(7,2)$, $C(8,-6)$.
17. $A(2,5)$, $B(5,-1)$, $C(-2,-2)$.
18. $A(4,0)$, $B(0,-8)$, $C(6,-6)$.
19. $A(0,3)$, $B(9,0)$, $C(5,8)$.
20. $A(-2,0)$, $B(1,-12)$, $C(8,-6)$.
21. $A(-3,2)$, $B(9,-2)$, $C(-2,-5)$.
22. $A(1,-7)$, $B(-2,5)$, $C(-8,-5)$.
23. $A(5,0)$, $B(-10,3)$, $C(1,6)$.
24. $A(0,2)$, $B(9,-1)$, $C(8,6)$.
25. $A(0,-2)$, $B(9,4)$, $C(7,-6)$.
26. $A(4,0)$, $B(0,8)$, $C(-4,1)$.
27. $A(-3,4)$, $B(0,-2)$, $C(-7,-3)$.
28. $A(-6,0)$, $B(4,2)$, $C(7,-2)$.
29. $A(8,0)$, $B(0,12)$, $C(-2,-2)$.
30. $A(0,-4)$, $B(-6,2)$, $C(0,4)$.

***Задача* 2.** *Даны координаты вершин треугольной пирамиды SABC (рис. 2.31).*

а) *найти объем пирамиды, площадь основания ABC и высоту;*

б) *составить уравнение плоскости основания и вычислите высоту по формуле расстояния от точки до плоскости. Сравнить с ранее полученным результатом.*

1. $A(-1,1,2)$, $B(-5,4,-2)$, $C(-1,2,3)$, $S(-8,-5,4)$.

2. $A(0,2,2)$, $B(0,4,3)$, $C(1,4,2)$, $D(7,-1,7)$.

3. $A(1,1,2)$, $B(1,2,4)$, $C(4,1,4)$, $S(2,-7,3)$.

4. $A(-1,1,-2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(1,-2,0)$, $S(5,-2,-12)$.

5. $A(-5,1,2)$, $B(-5,-2,6)$, $C(-4,4,-2)$, $S(2,12,4)$.

6. $A(-5,1,2)$, $B(-5,-2,6)$, $C(-4,4,-2)$, $S(2,12,4)$.

7. $A(-6,0,1)$, $B(-6,-3,5)$, $C(-5,3,-3)$, $S(1,9,-1)$.

8. $A(1,0,-1)$, $B(2,0,4)$, $C(4,2,3)$, $S(10,-11,-8)$.

9. $A(-1,3,0)$, $B(-1,-1,2)$, $C(0,5,-2)$, $S(7,2,6)$.

10. $A(1,4,2)$, $B(7,6,3)$, $C(3,4,3)$, $S(6,-7,-7)$.

11. $A(2,1,4)$, $B(3,-1,2)$, $C(3,7,6)$, $S(-7,6,-7)$.

12. $A(1,-1,0)$, $B(2,1,2)$, $C(1,1,1)$, $S(3,-2,7)$.

13. $A(-1,1,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(0,3,1)$, $S(6,-2,6)$.

14. $A(-1,-1,0)$, $B(-1,0,2)$, $C(2,-1,2)$, $S(0,-9,1)$.

15. $A(2,-1,1)$, $B(3,-1,2)$, $C(-2,-5,4)$, $S(4,-8,-5)$.

16. $A(-2,0,-3)$, $B(-2,-3,-2)$, $C(0,-3,-1)$, $S(4,-3,-13)$.

17. $A(6,1,1)$, $B(9,2,1)$, $C(6,2,3)$, $S(4,-11,11)$.

18. $A(1,0,-2)$, $B(2,-3,-2)$, $C(0,2,4)$, $S(2,4,-6)$.

19. $A(2,3,1)$, $B(6,3,0)$, $C(2,0,2)$, $S(-1,3,5)$.

20. $A(2,-2,4)$, $B(8,7,12)$, $C(2,-1,3)$, $S(5,1,0)$.

21. $A(-1,-2,2)$, $B(-2,-2,-1)$, $C(0,4,4)$, $S(-2,-6,6)$.

22. $A(3,-2,2)$, $B(3,-6,1)$, $C(0,-2,3)$, $S(3,1,6)$.

23. $A(-2,-4,0)$, $B(-1,-4,-3)$, $C(-3,0,0)$, $S(-1,-2,2)$.

24. $A(-2,0,3)$, $B(-2,3,4)$, $C(4,-2,2)$, $S(-6,-4,4)$.

25. $A(1,-1,3)$, $B(0,-5,3)$, $C(2,-1,0)$, $S(5,2,3)$.

26. $A(0,-2,2)$, $B(-1,-1,2)$, $C(8,7,8)$, $S(-4,1,5)$.

27. $A(-8,0,4)$, $B(-7,-2,4)$, $C(-7,-1,0)$, $S(-9,-1,-2)$.

28. $A(0,-6,1)$, $B(-3,-4,3)$, $C(0,-5,3)$, $S(4,-6,-1)$.

29. $A(4,-8,2)$, $B(4,-7,0)$, $C(0,-7,1)$, $S(-2,-9,1)$.

30. $A(1,3,-6)$, $B(3,0,-4)$, $C(3,3,-5)$, $S(-1,7,-6)$.

***Задача* 3.** *Вершина A треугольника ΔABC находится в полюсе, а вершины B и C имеют заданные полярные координаты*.

а) *вычислить площадь ΔABC;*

б) *вычислить длину стороны BC;*

в) *изобразить данный треугольник.*

Внимание! *Ваш рисунок не совпадает с рис. 2.31 и перерисовывать этот рисунок один в один не следует!*

1. $C(2,-\frac{\pi}{3})$, $B(3,-\pi)$;

2. $C(2,-\frac{\pi}{12})$, $B(3,\frac{\pi}{4})$;

3. $C(1,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{5\pi}{12})$;

4. $C(3,\frac{\pi}{4})$, $B(2,\frac{7\pi}{12})$;

5. $C(2,\frac{\pi}{3})$, $B(5,\frac{\pi}{12})$;

6. $B(4,-\frac{\pi}{9})$, $C(1,-\frac{5\pi}{18})$;

7. $B(2,\frac{7\pi}{12})$, $C(3,\frac{11\pi}{12})$;

8. $B(4,-\frac{\pi}{6})$, $C(7,\frac{\pi}{6})$;

9. $B(3,\pi)$, $C(4,\frac{2\pi}{3})$;

10. $C(5,\frac{7\pi}{12})$, $B(2,\frac{5\pi}{6})$;

11. $B(2,\frac{\pi}{3})$, $C(1,\frac{7\pi}{12})$;

12. $B(3,-\frac{\pi}{2})$, $C(1,\frac{\pi}{4})$;

13. $B(1,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{11\pi}{12})$;

14. $B(5,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{13\pi}{12})$;

15. $B(2,-\frac{\pi}{3})$, $C(3,-\frac{\pi}{6})$;

16. $B(1,-\frac{7\pi}{12})$, $C(2,-\frac{11\pi}{12})$;

17. $B(5,-\frac{\pi}{4})$, $C(3,-\frac{5\pi}{12})$;

18. $B(2,\frac{3\pi}{4})$, $C(5,\frac{11\pi}{12})$.;

19. $B(1,\frac{5\pi}{12})$, $C(3,\frac{7\pi}{12})$;

20. $B(2,\frac{11\pi}{12})$, $C(3,\frac{3\pi}{4})$;

21. $B(3,\frac{3\pi}{4})$, $C(4,\frac{7\pi}{12})$;

22. $B(5,\frac{5\pi}{12})$, $C(3,\frac{3\pi}{4})$;

23. $B(2,\frac{3\pi}{4})$, $C(3,\frac{\pi}{12})$;

24. $B(3,\frac{\pi}{12})$, $C(1,-\frac{\pi}{4})$;

25. $B(3,-\frac{3\pi}{4})$, $C(2,\frac{\pi}{12})$;

26. $B(1,\frac{\pi}{4})$, $C(2,\frac{11\pi}{12})$;

27. $B(3,\frac{11\pi}{12})$, $C(2,\frac{\pi}{4})$;

28. $C(5,\frac{7\pi}{12})$, $B(2,\frac{5\pi}{6})$;

29. $B(1,\frac{5\pi}{12})$, $C(3,\frac{7\pi}{12})$;

30. $C(5,\frac{7\pi}{12})$, $B(2,\frac{5\pi}{6})$.

Г Л А В А 3. **ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

§ 1. Действительные числа. Числовая прямая

Из школьной программы вам хорошо знакомы следующие числовые множества.

1. Множество всех *натуральных чисел* $\boldsymbol{N}=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

2. Множество всех *целых чисел* $\boldsymbol{Z}=\{\ldots-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

3. Множество всех *рациональных чисел* $\boldsymbol{Q}$ состоит из всех чисел вида $\frac{p}{q}$, где $p\in\boldsymbol{Z}$, $q\in\boldsymbol{N}$.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной десятичной дроби с целой частью. Например,

$$\frac{9}{8}=1{,}125;\ \frac{7}{3}=2{,}333\ldots=2{,}(3).$$

Более сложный пример. Выясним, какой десятичной дробью записывается число $\frac{1}{7}$. Для этого проведем процесс деления «столбиком».

$$\begin{array}{l|l}
1{,}0000000 & 7 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{7} & 0{,}142857 \\
\;\;30 & \\
\;\;\underline{28} & \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\underline{14} & \\
\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{56} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{35} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{49} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}$$

Мы получили вновь промежуточный остаток 1, такой же, как и был в начале. Значит, далее процесс деления будет повторяться. Итак,

$$\frac{1}{7}=0{,}(142857).$$

Точно также при делении на любое натуральное число n промежуточные остатки могут составлять только $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Значит, если процесс деления является бесконечным, то рано или поздно остатки начнут повторяться и результатом деления будет периодическая дробь. Итак, установили, что *любое рациональное число записывается в виде конечной или периодической десятичной дроби с целой частью*.

Но существуют еще числа, которые записываются в виде бесконечной непериодической десятичной дроби с целой частью. Такие числа называются *иррациональными*. К ним относятся, например, числа:

$$\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots \quad \text{и} \quad \pi=3{,}141592654\ldots$$

Действительными называются все рациональные и иррациональные числа. Совокупность всех действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$.

Действительные числа принято изображать точками на прямой. Для этого на числовой прямой необходимо выбрать начальную точку O и направление, которое будет называться положительным. Положительное направление принято изображать справа и обозначать стрелочкой. Число x изображается точкой, находящейся от точки O на расстоянии $|x|$. Положительные числа изображаются справа от точки O, отрицательные – слева.

Свойства действительных чисел, связанные с арифметическими операциями вам хорошо знакомы. Некоторые из них мы напомним в следующем параграфе. Отметим несколько других свойств.

1. $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$ выполнено одно и только одно из соотношений: $a<b$, $a=b$, $a>b$.
2. $\forall a, b \in \boldsymbol{R}$, таких, что $a<b$, $\exists c \in \boldsymbol{R}$, для которого выполнено $a<c<b$.

Определение. Совокупность всех чисел $x \in \boldsymbol{R}$, для которых выполнено $a<x<b$, обозначается (a, b) и называется *открытым интервалом*. Совокупность всех чисел $x \in \boldsymbol{R}$, для которых выполнено $a<x\le b$ (или $a\le x<b$), обозначается $(a, b]$ (или $[a, b)$) и называется *полуинтервалом*. Совокупность всех чисел $x \in \boldsymbol{R}$, для которых выполнено $a\le x\le b$, обозначается $[a, b]$ и называется *замкнутым интервалом* или *отрезком*.

Аналогично определяются *бесконечные интервалы* и *полуинтервалы*:

$(a,+\infty)=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x>a\}$ (читается так: совокупность всех действительный чисел x, таких, что $x>a$);

$[a,+\infty)=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x\ge a\}$;

$(-\infty, b)=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x<b\}$;

$(-\infty, b]=\{x\in \boldsymbol{R} \mid x\le b\}$.

Длина отрезка, интервала или полуинтервала с концами a и b вычисляется так: $|b-a|$.

Определение. *Окрестностью числа* x_0 называется любой открытый интервал, содержащий x_0. *Дельта-окрестностью числа* x_0 называется интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Определение. Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если существует такое число M, что $\forall x\in X$ выполнено $x\le M$. Оно же называется *ограниченным снизу*, если существует такое число m, что $\forall x\in X$ выполнено $x\ge m$. Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху и снизу.

§ 2. Операции над числами

Мы не будем приводить свойства действительных чисел, связанные с операциями сложения и умножения. Наибольшие трудности у некоторых студентов вызывают свойства операций со степенью:

1. $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$;
2. $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$;
3. $a^0=1$ для любого $a\in\boldsymbol{R}$, кроме $a=0$. Что такое 0^0 не определено.
4. $a^{-\alpha}=\dfrac{1}{a^{\alpha}}$. Например, $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$, $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$.

5. Пишем $\sqrt[n]{a}=b$, если n – натуральное число и $a=b^n$; также используем обозначение $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$. Если n – четное число, то $b^n\geq 0$, а значит, запись $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, только если $a\geq 0$ (речь идет только о действительных числах). Если n – нечетное число, то запись $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл для любых $a\in\boldsymbol{R}$.

Согласно пункта 2 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$. Учитывая еще пункт 4 имеем

$$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Тем самым, определили a^{α} для рационального числа α. Например, $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}=(\sqrt{a})^3$, $a^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. При этом a^{α} определено только для $a\geq 0$, если степень положительна и только для $a>0$, если степень отрицательна.

Определение. *Средним арифметическим* чисел $x_1, x_2,\ldots, x_n$ называется число $\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$. *Средним геометрическим* этих же чисел называется число $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$. *Средним гармоническим* называется число $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$.

Например, средним арифметическим двух чисел x_1, x_2 называется число $\dfrac{x_1+x_2}{2}$. Так, координаты середины отрезка – это есть среднее арифметическое от координат его концов.

Определение. *Модуль* или *абсолютная величина* числа x определяется так:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geq 0,\\ -x, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Следует запомнить, что $\sqrt{x^2}=|x|$, а также для любой четной степени n выполнено $\sqrt[n]{a^n}=|x|$. Например, $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{16}=2$.

§ 3. Комплексные числа

Комплексные числа впервые возникли в связи с необходимостью иметь решение для квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Впоследствии они нашли широкое применение во всех разделах математики и физики.

Определение. Обозначим $i=\sqrt{-1}$. Число i называется *мнимой единицей*. Таким образом, выполнено $i^2=-1$.

Определение. *Комплексным числом* называется формальное алгебраическое выражение вида $z=a+bi$, где $a,b\in \boldsymbol{R}$. Число a называется действительной частью, выражение bi – мнимой частью. Обозначаем $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$. Совокупность всех комплексных чисел обозначаем $\boldsymbol{C}$.

Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$. Тогда сумма, разность и произведение этих чисел определяется так:

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,\quad z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i,$$

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2=$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Определение. Число $\overline{z}=a-bi$ называется *сопряженным* (*комплексно сопряженным*) к числу $z=a+bi$.

Заметим, что $\frac{1}{2}(z+\overline{z})=a=\mathrm{Re}\,z$, $\frac{1}{2}(z-\overline{z})=b=\mathrm{Im}\,z$. Умножим:

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

Получилось действительное число. Теперь можем определить деление.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{(a_2)^2+(b_2)^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{(a_2)^2+(b_2)^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{(a_2)^2+(b_2)^2}i.$$

Таким образом, для того, чтобы совершить деление, числитель и знаменатель дроби домножаем на число, сопряженное к знаменателю. Тогда в знаменателе получится действительное число.

Пример. $z_1=1+2i$, $z_2=3+4\mathrm{i}$. Вычислить z_1/z_2.

$$\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{3-4i+6i-8i^2}{9-16i^2}=\frac{3+2i-8\cdot(-1)}{9-16(-1)}=\frac{11+2i}{25}=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i.$$

Комплексные числа принято изображать точками на плоскости, где задана декартова система координат. Число $z=a+bi$ изображается точкой с координатами $(a,\,b)$. Тогда $\overline{z}$ изображается точкой с координатами $(a,-b)$, симметричной относительно Ox. Будем говорить, что z – это и есть точка с координатами (a,b).

Пусть теперь на плоскости задана еще полярная система координат, у которой полярная ось сонаправлена с Ox. Пусть (r, φ) – полярные координаты точки z. Тогда r называется *модулем комплексного числа* z, а φ – его *аргументом*. Обозначаем $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ (рис. 3.1).

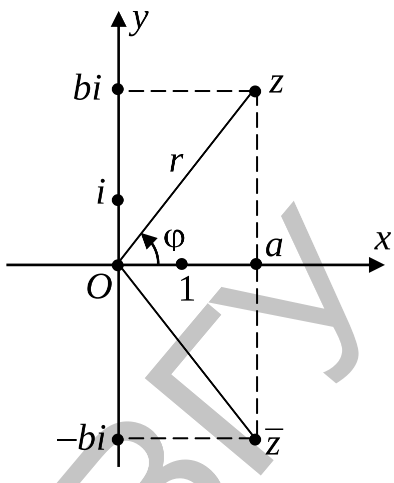


*Рис.*3.1

В соответствии с формулами перехода от полярных координат к декартовым выполнено:

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos\varphi, \\ b = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Значит:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эта запись называется *тригонометрической формой комплексного числа*, а запись $z = a + bi$ называется *алгебраической формой*. Очевидно (например, из чертежа), что $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

Пусть заданы два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются*. Поскольку деление есть операция обратная умножению, то:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Еще одним следствием из правила умножения является формула:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Определение. Комплексной экспонентой e^z называется функция, которая задается равенством:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b), \qquad (1.8)$$

где e^a – это действительная экспонента.

Формула (1.8) называется формулой Эйлера. Из нее вытекают важные следствия:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\ \ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Из этих формул легко выводятся любые тригонометрические формулы. Например,

$$2\sin x\cos x = 2\frac{(e^{ix}-e^{-ix})(e^{ix}+e^{-ix})}{4i} = \frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} = \sin 2x.$$

§ 4. Понятие последовательности. Предел последовательности

Определение. Пусть каждому неотрицательному целому числу n поставлено в соответствие одно и только одно действительное число x_n. Тогда говорят, что *задана последовательность* $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Числа, которые образуют последовательность, называются членами последовательности. Если $x_i = x_j$ для различных номеров i и j, то x_i и x_j считаются различными членами последовательности. Номера членов могут начинаться не только с нуля, но и с любого целого числа.

Примеры. 1. $\{n\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$;

2. $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$;

3. $\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$;

4. $\{(-1)^n n\} = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, \ldots\}$;

5. $\{n^{(-1)^n}\} = \{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots\}$;

6. $\{\frac{n-1}{n}\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$.

Мы видим, что члены последовательности в примере 1 по мере возрастания n неограниченно возрастают и приближаются к $+\infty$, в примере 2 – убывают и приближаются к нулю, а в примере 6 – возрастают и приближаются к 1. Это приводит нас к понятию предела последовательности.

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N$ (читается так: для каждого эпсилон большего нуля существует такой номер N, зависящий от ε, что x_n отличается от a меньше, чем на эпсилон для каждого n большего, чем N). Пишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Смысл этого определения в следующем. Задаем степень близости к числу a с помощью числа ε (например, 0,1). Все члены последовательности, начиная с некоторого номера должны отличаться от a меньше, чем на ε. Если возьмем ε еще меньше (например, 0,01), все равно начиная с некоторого большего номера все члены последовательности будут отличаться от a меньше, чем на ε.

Например, мы можем записать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Действительно, пусть мы выбрали любое маленькое $\varepsilon>0$; зададим N – любое натуральное число, большее чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\frac{1}{N}<\varepsilon$, и тем более при любом $n>N$ выполнено $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

§ 5. Ограниченная последовательность. Монотонная последовательность. Теоремы о пределах

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что $x_n\le M$ для всех номеров n. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что $m\le x_n$ для всех номеров n. Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу: $m\le x_n\le M$.

Среди рассмотренных выше примеров, последовательности 2, 3 и 6 являются ограниченными, а последовательности 1, 4 и 5 не являются ограниченными. Их можно назвать неограниченными.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $x_k\ge x_m$ при $k>m$. Последовательность называется *невозрастающей*, если $x_k\le x_m$ при $k>m$. В любом их этих случаев последовательность называется *монотонной*.

***Теорема* 3.1.** *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

***Теорема* 3.2.** *Монотонная ограниченная последовательность всегда имеет предел.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две последовательности, причем существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, и при этом для всех номеров n выполнено $x_n<y_n$, тогда $a\le b$.*

Пример. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ из примера 6. Очевидно, что эта последовательность возрастает, и при этом ограничена сверху числом 1. По теореме 2 она имеет предел. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}=\{1, 1, 1, 1,\ldots\}$. Тогда $x_n<y_n$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le 1$.

***Теорема* 3.4.** *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha x_n=\alpha a$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=ab$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=a/b$, при условии, что $b\neq 0$.

Примеры. а) Вернемся к тому же примеру 6 и воспользуемся пунктом 1 теоремы 3.4: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=1-0=1$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2n}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$.

в) Последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_{n+1}\}$ состоят из тех же чисел, только с другим порядком номеров. Поэтому, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$. Пусть $\{x_n\}=\{n/2^n\}$. Тогда

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot a.$$

Итак, $a=0{,}5a \Rightarrow a=0$.

***Теорема* 3.5.** *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, *и для всех номеров* n *выполнено* $x_n<z_n<y_n$. *Тогда последовательность* $\{z_n\}$ *тоже имеет предел и* $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

§ 6. Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение. Последовательность называется *бесконечно большой*, если начиная с некоторого номера ее члены по модулю становятся больше любого наперед заданного числа. Более точно это означает следующее: для любого числа M найдется такой номер N, что $|x_n|>M$ для всех номеров $n>N$. Тогда пишем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*.

Определение. Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой и, начиная с некоторого номера n, принимает только положительные значения, то пишем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Если же бесконечно большая последовательность, начиная с некоторого номера, принимает только отрицательные значения, то пишем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$.

***Теорема* 3.6.** 1. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *– бесконечно большая, а последовательность* $\{y_n\}$ *– ограниченная. Тогда последовательность* $\{y_n/x_n\}$ *– бесконечно малая. В частности, последовательность* $\{c/x_n\}$ *– бесконечно малая (с – постоянная величина).*

2. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *– бесконечно большая, а последовательность* $\{y_n\}$ *отграничена от нуля (не приближается к нулю):*

$y_n \geq m > 0$. *Тогда последовательность* $\{x_n \cdot y_n\}$ *– бесконечно большая. Если последовательность* $\{x_n\}$ *– бесконечно малая, а последовательность* $\{y_n\}$ *ограниченная, то* $\{x_n \cdot y_n\}$ *– бесконечно малая.*

Другими словами: если знаменатель стремится к бесконечности, а числитель нет, то дробь стремится к нулю. Если один сомножитель стремится к бесконечности, а второй никак не приближается к нулю, то произведение стремится к ∞. Если один сомножитель стремится к нулю, а второй не приближается к бесконечности, то произведение стремится к нулю. Это вполне очевидные утверждения.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Среди примеров, рассмотренных в параграфе 2, последовательность 1 является бесконечно большой. Последовательность 5 не является ограниченной и не является бесконечно большой. Последовательность 2 является бесконечно малой.

§ 7. Неопределенные выражения

Рассмотрим сначала примеры, в которых две последовательности являются бесконечно малыми.

1. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2} = 0$.

2. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{a}{n}\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(n+1)}{n} = a\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = a$.

3. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$, $\{y_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$. Тогда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} =$ $=\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Такая последовательность вообще не имеет предела.

Вывод: если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обе являются бесконечно малыми, то о пределе последовательности $\{x_n / y_n\}$ ничего заранее нельзя сказать. Мы говорим, что x_n/y_n представляет собой *неопределенность вида* 0/0. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обе являются бесконечно большими, то $\{x_n / y_n\}$ представляет собой *неопределенность вида* ∞/∞; последовательность $x_n - y_n$ также представляет собой *неопределенность вида* $\infty - \infty$.

Упражнение. Самостоятельно сформулируйте, что представляет собой неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Раскрыть неопределенность – значит найти предел, если он существует. Некоторые способы раскрытия неопределенностей мы изучим на практических занятиях. Приведем сейчас лишь несколько примеров.

Примеры. **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{n^2+1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{3+0+0}{1+0}=3.$

Здесь мы и числитель и знаменатель разделили на самую старшую степень n, т.е. на n^2. Затем мы каждое из слагаемых заменили на его предел.

2. Сначала напомним: $(x-y)\cdot(x+y)=x^2-y^2$. Поэтому:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y.$$

Теперь вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\{\infty-\infty\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Мы выражение под пределом домножили и разделили на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. В числителе получилось 1, а в знаменателе получили бесконечно большую величину. Значит, вся дробь стремится к нулю.

§ 8. Понятие функции и ее графика. Четные, нечетные и периодические функции

Определение. Пусть $X\subset\boldsymbol{R}$, $Y\subset\boldsymbol{R}$ – некоторые числовые множества. Предположим, что в силу некоторого закона каждому значению $x\in X$ поставлено в соответствие одно и только одно значение $y\in Y$. Тогда говорим, что *на множестве* X *определена функция* $f\colon X\to Y$. Множество X называется *множеством определения функции* и обозначается $D(f)$.

Если числу x соответствует число y, то пишем $y=f(x)$ или $y=y(x)$. Число x называется *аргументом функции* или *независимой переменной*, а y – *значением функции* или *зависимой переменной*. Совокупность всех значений функции обозначается $E(f)$ и называется *множеством значений функции*: $E(f)=\{y\in Y \mid \exists\ x\in X$ для которого $y=f(x)\}$. Согласно определению множество $E(f)$ не обязательно совпадает со всем множеством Y. Примеры будут рассмотрены в следующем параграфе.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если для всех $x\in D(f)$ выполняется $f(-x)=f(x)$. Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если для всех $x\in D(f)$ выполняется $f(-x)=-f(x)$. В обоих случаях предполагается, что для каждого $x\in D(f)$ значение $-x$ тоже принадлежит $D(f)$.

Определение. Число $T\neq 0$ называется *периодом функции* $y=f(x)$, если $f(x+T)=f(x)$ для всех $x\in D(f)$. Функция называется *периодической*, если у нее существует некоторый период T.

Определение. Пусть на плоскости задана декартова система координат. *Графиком функции* $y=f(x)$ называется совокупность точек с координатами $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Если функция является четной, то ее график симметричен относительно оси Ox, а если функция является нечетной – ее график симметричен относительно начала координат. Примеры будут приведены в следующем параграфе.

Способы задания функции

1. Аналитический способ. Функция может быть задана формулой. Например: $y=\sqrt{1-x^2}$. Зная значение независимой переменной x, мы можем вычислить значение зависимой переменной y, т.е. значение функции. В нашем примере $y(0)=1$, а $y(1)=0$.

2. Графический способ. Функция может быть задана с помощью графика. По графику мы можем определить значение функции для любого значения аргумента из области определения. В качестве примера приведен график изменения температуры воздуха в Витебске с 26 января по 3 февраля 2010 года (рис 3.2).

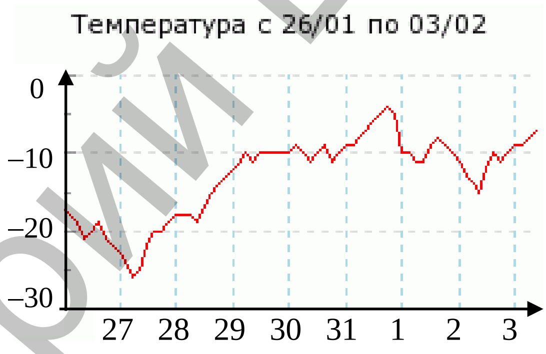


*Рис.*3.2

3. Табличный способ. Если функция принимает только конечное количество возможных значений, то она может быть задана с помощью таблицы. Такой способ задания чаще всего используется для записи результатов наблюдений или экспериментов.

Расстояние (км)	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25
Стоимость проезда (руб.)	750	1500	2250	3000	3750

4. Програмный способ. В этом случае задается алгоритм, который позволяет вычислить значение функции, если задано значение аргумента.

§ 9. Элементарные функции и их графики

1. *Постоянная функция* $y=c$. Область определения – вся числовая прямая: $D(f)=\boldsymbol{R}$, множество значений – одно число: $E(f)=\{c\}$. Графиком служит прямая, параллельная оси Ox (рис 3.3).

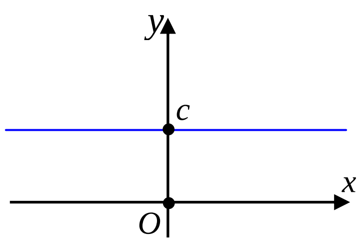


Рис. 3.3

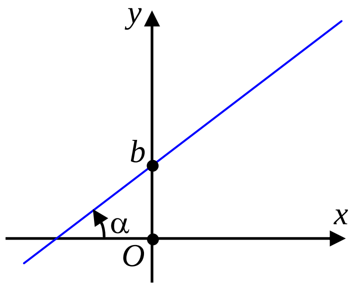


Рис. 3.4

2. *Линейная функция* $y = kx + b$. $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=\boldsymbol{R}$. Графиком служит прямая, не параллельная оси Oy (рис. 3.4). Напомним, что k – это тангенс угла наклона прямой, а b – координата точки пересечения прямой с осью Oy.

3. а) *Степенная функция* $y=x^n$, где $n\in\boldsymbol{N}$. $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=\boldsymbol{R}$ для нечетного n, $E(f)=[0,+\infty)$ для четного n. При четном n функция является четной, при нечетном n – нечетной. На рис. 3.5 и 3.6 приведены графики функций $y=x^2$ и $y=x^3$.

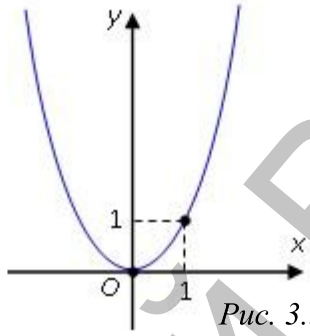


Рис. 3.5

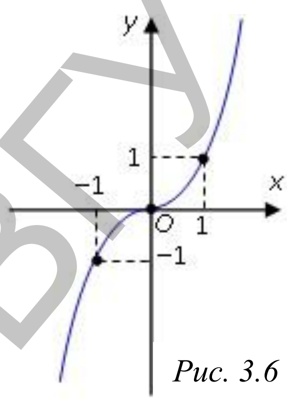


Рис. 3.6

б) *Степенная функция* $y=x^n$, где n – отрицательное целое число.

$D(f)=\boldsymbol{R}\backslash\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

$E(f)=\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ для нечетного n, $E(f)=(0,+\infty)$ для четного n.

При четном n функция является четной, при нечетном n – нечетной. На рис. 3.7 и 3.8, приведены графики функций $y=x^{-1}$ и $y=x^{-2}$. Напомним, что $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$.

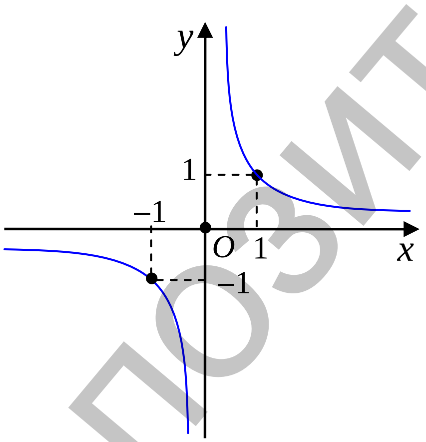


Рис. 3.7

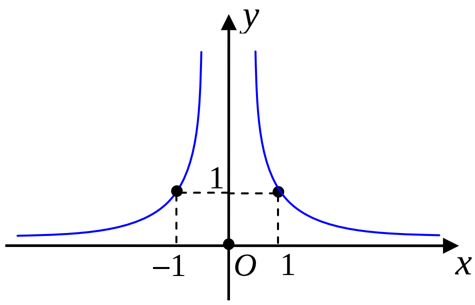


Рис. 3.8

в) $y=\sqrt[n]{x}$, где $n\in\boldsymbol{N}$. $D(f)=E(f)=[0,+\infty)$ для четного n, $D(f)=E(f)=\boldsymbol{R}$ для нечетного n. То есть под корнем четной степени может стоять только неотрицательное число, а под корнем нечетной степени – любое число. При нечетном n функция является нечетной, при четном n она **не** является четной, т.к. она не определена при отрицательных значениях x. Напомним, что равенство $y=\sqrt[n]{x}$ при нечетном n равносильно равенству $x=y^n$; при четных n равенство $y=\sqrt[n]{x}$ равносильно равенству $x=y^n$, но лишь при условии, что $x\geq 0$. Коротко это записывается так:

$$y=\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^n, \text{ при } n=2k+1,\ k\in\boldsymbol{N},\\ x=y^n \text{ и } x\geq 0, \text{ при } n=2k,\ k\in\boldsymbol{N}.\end{cases}$$

На рис. 3.9 и 3.10 приведены графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

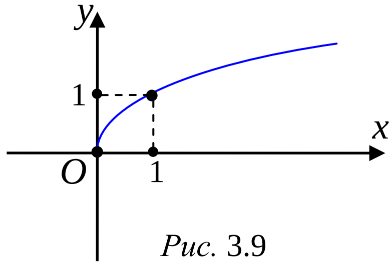


Рис. 3.9

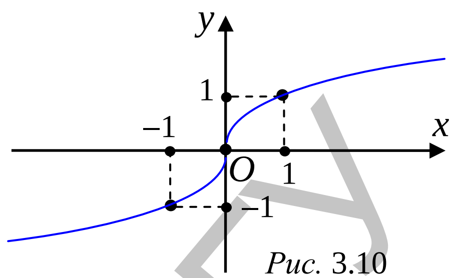


Рис. 3.10

г) $y=x^{\alpha}$, где $\alpha=m/n$, $n\in\boldsymbol{N}$, $m\in\boldsymbol{Z}$. Эта функция определяется как $y=\sqrt[n]{x^m}$ и мы будем рассматривать ее как сложную функцию. Понятие сложной функции мы будем изучать позже.

4. *Показательная функция* $y=a^x$, определяется только для $a>0$ и $a\neq 1$ (т.е. $a\in(0,\ 1)\bigcup(1,+\infty)$). $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=(0,+\infty)$. При $x=0$ получаем $y=1$, значит, график проходит через точку (0, 1). Функция возрастает при $a>1$ и убывает при $a\in(0, 1)$. На рис. 3.11 сплошной линией показан график функции $y=2^x$, а пунктиром – график функции $y=(1/2)^x$.

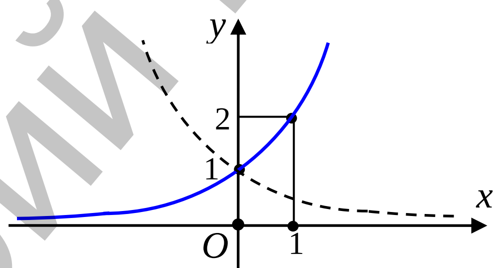


Рис. 3.11

5. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$, определяется для $a\in(0,\ 1)\bigcup(1,+\infty)$). $D(f)=(0,+\infty)$, $E(f)=\boldsymbol{R}$. При любом допустимом значении a выполнено $\log_a 1=0$, значит, график проходит через точку (1, 0). Функция возрастает при $a>1$ и убывает при $a\in(0, 1)$. На рис. 3.12 сплошной линией показан график функции $y=\log_2 x$, а пунктиром – график функции $y=\log_{0,5} x$. Логарифм по основанию 10 обозначается $\lg x$, по основанию e обозначается $\ln x$.

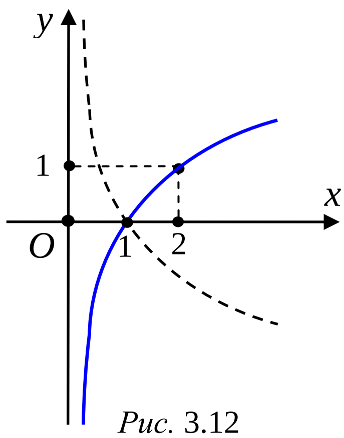


Рис. 3.12

6. *Тригонометрические функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$. $D(f)=\boldsymbol{R}, E(f)=[-1,1]$.

Синус – нечетная функция, косинус – четная. Обе функции периодические с периодом 2π (рис 3.13).

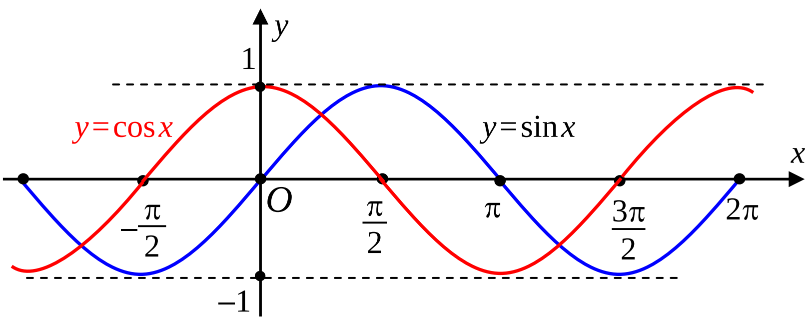


Рис. 3.13

Напомним определение этих функций. Выбираем единичную окружность с центром в начале координат. Откладываем от положительного направления оси Ox угол равный α. Если $\alpha>0$, то он откладывается против часовой стрелки, а если $\alpha<0$ – то по часовой. Получившийся луч определяет точку M на окружности. Координаты этой точки – это $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ (рис. 3.14).

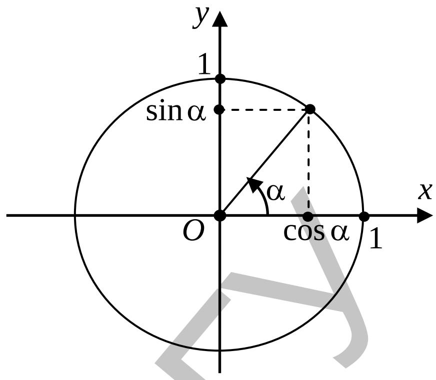


Рис. 3.14

7. Тригонометрические функции $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$. Напомним, что по определению $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Эти функции не определены при тех значениях x, при которых знаменатель обращается в ноль. А именно: для тангенса в область определения не входят значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, а для котангенса – значения $x=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Множество значений – вся числовая прямая (рис. 3.15 и 3.16).

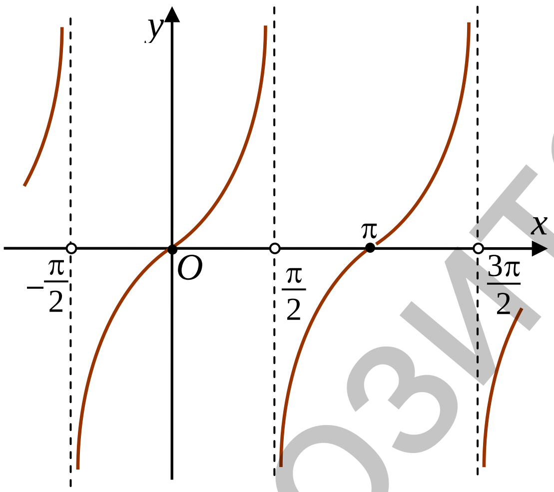


Рис. 3.15

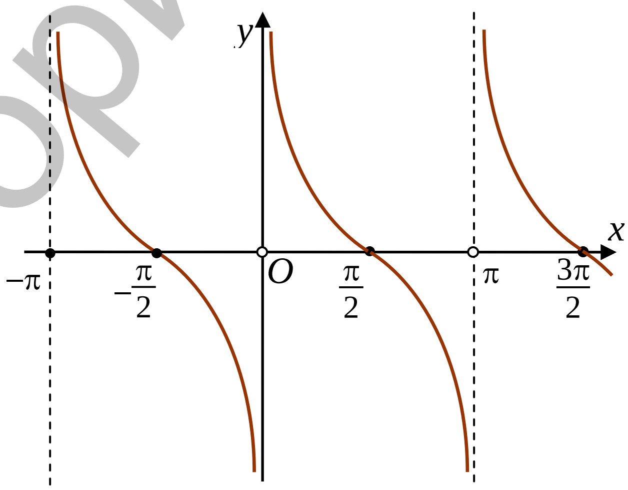


Рис. 3.16

К элементарным функциям будем относить также сумму или разность двух элементарных функций, а также произведение элементарной функции на число. Например, $y=2\sin x+3\cos x$ будем считать элементарной.

8. Отдельно стоит рассмотреть квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$. Ее график – парабола. При $a>0$ парабола расположена «рожками» вверх. Если при этом дискриминант $D=b^2-4ac>0$,

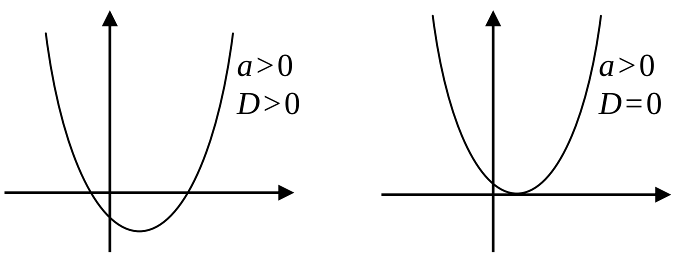


Рис. 3.17

то парабола пересекает ось Ox в двух точках, если $D=0$ – в одной точке, а если $D<0$, то парабола полностью расположена выше оси Ox. На рис. 3.18 показаны варианты расположения параболы при $a<0$.

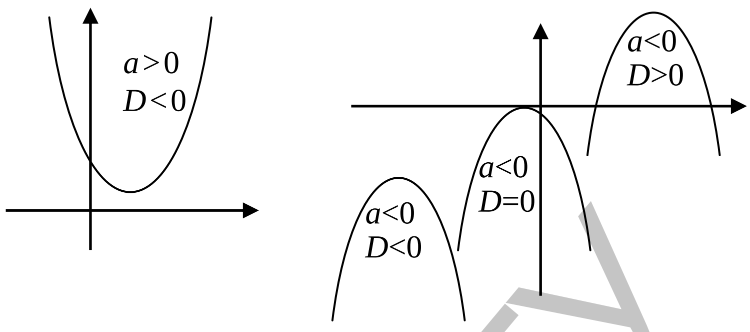


Рис. 3.18

9. К такому же типу (сумма или разность двух элементарных функций) можно отнести так называемые гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический синус,}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ – гиперболический косинус.}$$

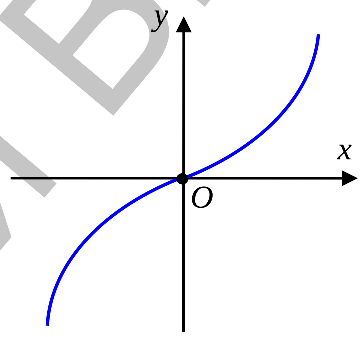


Рис. 3.19

Они обладают свойствами, очень похожими на свойства тригонометрических синуса и косинуса. Сравните:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$;

$\sin x$ и $\operatorname{sh} x$ – нечетные функции;

$\cos x$ и $\operatorname{ch} x$ – четные функции;

$\sin 0 = 0$, $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{ch} 0 = 1$.

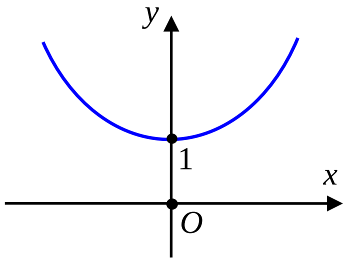


Рис. 3.20

График гиперболического косинуса отдаленно напоминает параболу (рис 3.20). Он называется еще цепной линией. Именно форму такого графика принимает цепь или веревка, когда они провисают под действием только своего собственного веса.

§ 10. Сложная функция

Пусть переменная y зависит от переменной u: $y=f(u)$, а переменная u, в свою очередь, зависит от переменной x: $u=\varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а значит, будет меняться y. Эта зависимость выражается сложной функцией $y=f(\varphi(x))$. Подобное последовательное выполнение двух функций еще называется композицией этих функций.

Примеры. **1.** $y=\sqrt{1-x^2}$. Это сложная функция. Ее можно представить, как композицию двух функций: $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$.

2. $y=\sin x^2$ можно представить так: $y=\sin u$, $u=x^2$.

Примеры решения задач.

1. а) Найти область определения функции $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-x-42}}$.

Решение. Мы знаем, что под корнем должно находиться неотрицательное число. Кроме того, в знаменателе не может стоять число равное нулю. Значит, должно выполняться неравенство:

$$x^2-x-42>0.$$

Находим решения уравнения $x^2-x-42=0$ и изображаем их на числовой прямой: $x_1=-6$, $x_2=7$. Поскольку неравенство строгое, то числа изображаем пустыми кружочками. Эти числа разбивают прямую на три интервала. Расставляем знаки «+» или «–» над этими интервалами следующим образом. График функции $u=x^2-x-42$ – это парабола. Старшая степень (квадрат) имеет положительный знак, значит, парабола расположена «рожками» вверх. Схематично изображаем параболу, проходящую через найденные корни. Там, где парабола проходит выше оси Ox, ставим «+», а где ниже – знак «–». Штрихуем те интервалы, над которыми стоит «+» (рис. 3.21). Они и будут решением задачи.

Рис. 3.21

Ответ: $D(f)=(-\infty,-6)\cup(7,+\infty)$.

б) $y=\sqrt{x^2-x-42}$. Здесь область определения задается неравенством

$$x^2-x-42\geq 0.$$

В этом случае числа -6 и 7 тоже являются решениями, и мы их на чертеже изображаем закрашенными кружочками (рис. 3.22).

Рис. 3.22

Ответ: $D(f)=(-\infty,-6]\cup[7,+\infty)$.

2. Найти область определения функции $y=\log_2\dfrac{64-x^2}{(x-3)^2}$.

Выражение, стоящее под логарифмом должно быть строго больше нуля. Решаем неравенство $\dfrac{64-x^2}{(x-3)^2}>0$ методом интервалов. Раскладываем числитель на два множителя:

$$\frac{(8-x)(8+x)}{(x-3)^2}>0,$$

и на числовой прямой изображаем точки, в которых каждый из множителей в числителе или знаменателе обращается в ноль: $x_1=-8$, $x_2=3$, $x_2=8$. После этого расставляем знаки над интервалами следую-

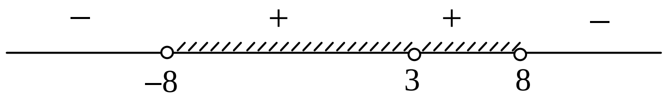


Рис. 3.23

щим образом. Возьмем x больше самого большого из отмеченных чисел; например, x=9. При этом значении наше выражение меньше нуля. Значит, над самым правым интервалом ставим знак «–». Двигаемся влево. При переходе через каждый корень знак меняется, если соответствующий ему множитель имеет нечетную степень и не меняется, если соответствующий множитель имеет четную степень. Так, при переходе через 8 и –8 знак меняется, а при переходе через 3 не меняется. Штрихуем те интервалы, над которыми стоит знак «+» (рис 3.23).

Ответ: $D(f)=(-8,3)\cup(3,8)$.

§ 11. Обратная функция. Обратные тригонометрические функции

Равенство $y=f(x)$ означает, что переменная x является независимой, а значение переменной y меняется при изменении x. Представим теперь обратную ситуацию: переменная y является независимой, а значение переменной x меняется при изменении y. Нам надо выразить эту зависимость в виде функции $x=\varphi(y)$. При этом возникает вопрос: а всегда ли эта зависимость является функцией?

Рассмотрим пример функции $y=x^2$ (рис. 3.24). Двум разным значениям $x_1=2$ и $x_2=-2$ соответствует одно значение y=4. Для того чтобы обратное соответствие было функцией, значению y=4 должно отвечать только одно значение переменной x. Какое из значений x_1 или x_2 следует в этом случае выбрать? Для того чтобы избежать подобной дилеммы, необходимо ограничить область определения функции $y=x^2$. Мы будем считать, что $D(f)=[0,+\infty)$. Теперь обратное соответствие задается формулой $x=\sqrt{y}$ (рис. 3.25). Здесь y является независимой переменной, а x – зависимой. Принято изменять обозначения переменных и независимую переменную обозначать буквой x, а зависимую – буквой y. Окончательно, для функции $y=x^2$ обратной будет функция $y=\sqrt{x}$.

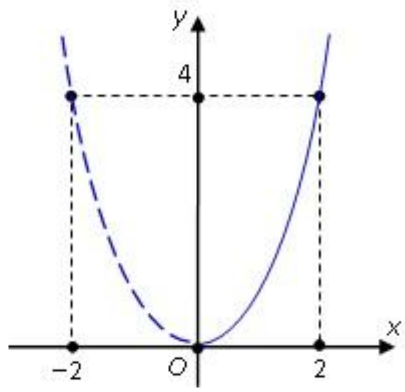


Рис. 3.24

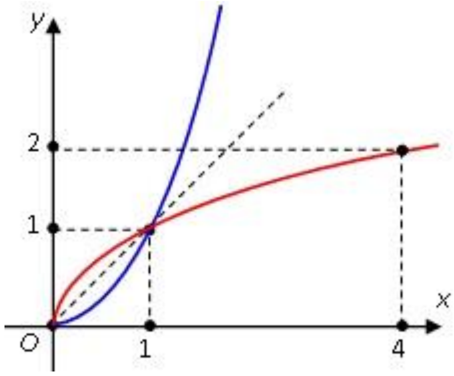


Рис. 3.25

Для произвольной функции $y=f(x)$ нам нужно ограничить область определения так, чтобы функция на оставшейся области везде возрастала или везде убывала. Тогда мы исключим ситуацию, когда $f(x_1)=f(x_2)$ выполняется для различных x_1 и x_2. Обратная функция обозначается $y=f^{-1}(x)$. График обратной функции получается из графика прямой функции в результате симметрии относительно прямой $y=x$.

Если прямая функция возрастала, то и обратная тоже будет возрастать, если прямая функция убывала, то и обратная функция будет убывать.

Для функции $y=\sin x$ выбираем $D(f)=$ $=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (рис. 3.26). На этом участке синус возрастает.

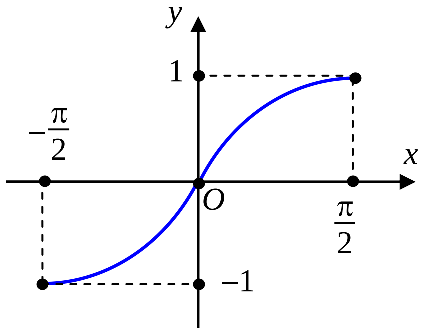


Рис. 3.26

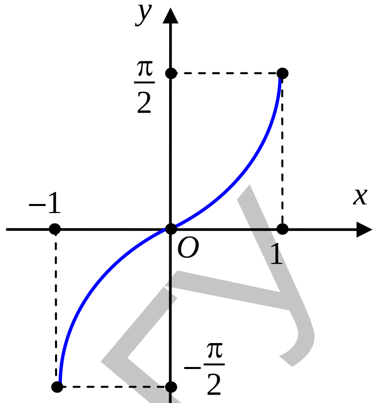


Рис. 3.27

Обратная функция $y=\arcsin x$ имеет область определения $D(f)=[-1,\ 1]$ и множество значений $E(f)=[-\pi/2,\ \pi/2]$. Она также возрастает.

Для функции $y=\cos x$ мы выбираем $D(f)=[0,\pi]$ (рис. 3.27). На этом участке косинус убывает. Обратная функция $y=\arccos x$ имеет область определения $D(f)=[-1,\ 1]$ и множество значений $E(f)=[0,\ \pi]$. Она также убывает (рис. 3.28).

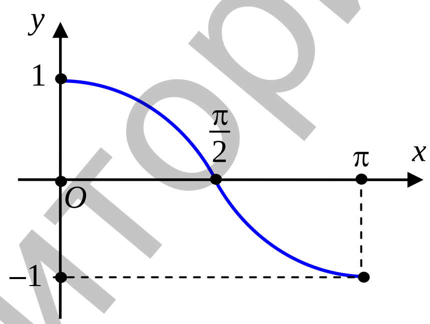


Рис. 3.27

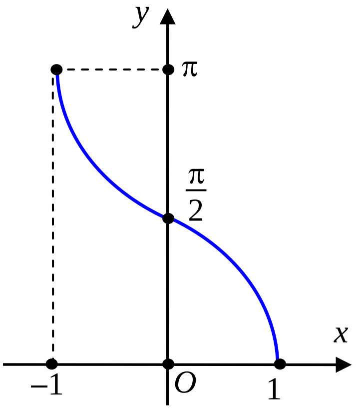


Рис. 3.28

Для функции $y=\mathrm{tg}x$ выбираем $D(f)=$ $=(-\pi/2,\pi/2)$. На этом участке тангенс возрастает (рис. 3.29). Обратная функция $y=\mathrm{arctg}x$ имеет область определения $D(f)=\boldsymbol{R}$ (рис. 3.31) и множество значений $E(f)=(-\pi/2,\pi/2)$. Она также возрастает.

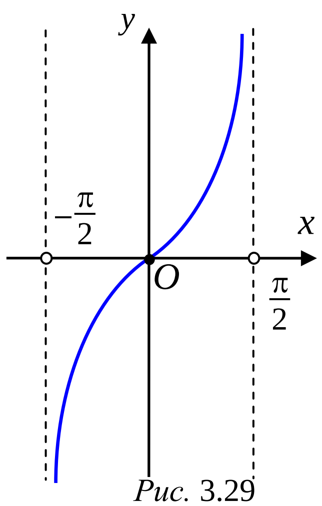


Рис. 3.29

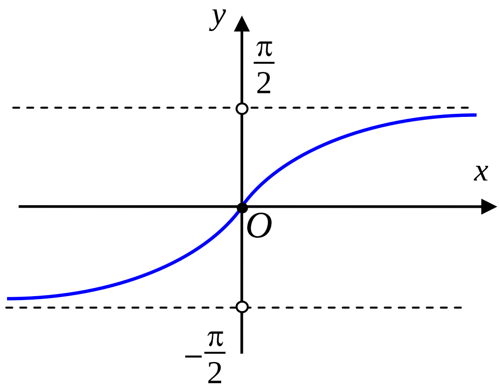


Рис. 3.30

Для функции $y=\mathrm{ctg}\,x$ выбираем $D(f)=(0,\ \pi)$. На этом участке котангенс убывает (рис. 3.31). Обратная функция $y=\mathrm{arcctg}\,x$ имеет область определения $D(f)=\mathbf{R}$ (рис. 3.32) и множество значений $E(f)=(0,\pi)$. Она также убывает.

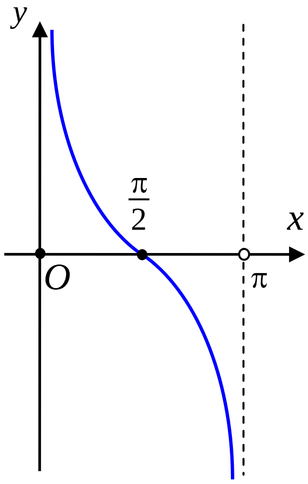


Рис.

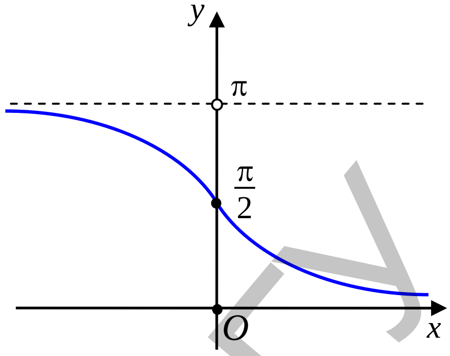


Рис.

§ 12. Предел функции

Понятие «предел функции» имеет очень простой интуитивный смысл. Пусть независимая переменная x приближается к числу a. Если при этом значение функции $y=f(x)$ приближается к определенному числу A, то A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a. При этом функция при $x=a$ может быть вообще не определена. Пишем так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Математически более точно это может быть сформулировано так.

***Определение* 1.** Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если:

1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности числа a, кроме, может быть, самой точки a;

2) для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к a выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

Другими словами, запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ означает, что если x мало отличается от a, то $f(x)$ мало отличается от A. Математически более точно это формулируется так.

***Определение* 2.** Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* a, если:

1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности числа a, кроме, может быть, самой точки a;

2) для каждого $\varepsilon>0$ можно указать (зависящее от ε) число $\delta>0$, такое, что для каждого $x\in(a-\delta,\ a-\delta)$ выполнено $f(x)\in(A-\varepsilon, A-\varepsilon)$ ($\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$).

Смысл определения в следующем: мы задаем степень близости $f(x)$ к числу A в виде числа ε и хотим, чтобы это выполнялось для всех x близких к a (рис. 3.33). Для этого берем число δ, определяющее степень близости x к a. Если x отличается от a меньше, чем на δ, то $f(x)$ должно отличаться от A меньше, чем на ε. Если это действительно выполнено, то A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к a.

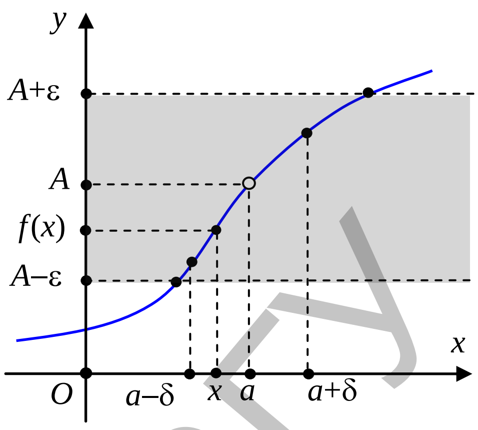


Рис. 3.33

Примеры. **1.** Напомним сначала школьный материал. Квадратный трехчлен можно разложить на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – это корни данного многочлена, т.е. решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Например, решения уравнения $x^2-5x+6=0$ – это 2 и 3. Поэтому $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Пусть теперь $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$, $\varphi(x)=x-2$. Это различные функции, потому что у них разные области определения: $D(f)=(-\infty,\ 3)\cup(3,+\infty)$, $D(\varphi)=\boldsymbol{R}$. Но при всех $x\neq3$ эти функции совпадают. Когда мы вычисляем предел $\lim\limits_{x\to3} f(x)$, нас не интересует значение $f(x)$ при $x=3$: смотрим на значение $f(x)$ в точках близких к 3, а в этих точках $f(x)=x-2$. Значит,

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x-2)=1.$$

2. Функция $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ определена везде, кроме $x=0$. Пусть $x_n=\dfrac{1}{\pi n}$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю.

$$f(x_n)=\cos\pi n=(-1)^n=\{-1,1,-1,1,-1\ldots\}.$$

Такая последовательность вообще не имеет предела. Значит, $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует.

Упражнение. Если в определении 1 мы заменим число A на $+\infty$ или на $-\infty$, то получим определение, что значит $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$. Самостоятельно перепишите определение еще раз с данной заменой.

Определение. Пусть $f(x)$ определена при всех x, больших некоторого числа M. Пишем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к $+\infty$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ (при этом вместо A может стоять $+\infty$ или $-\infty$).

***Пример* 3.** На рис. 3.34 мы видим, что при x стремящемся к $-\infty$, значение функции $y=2^x$ стремится к нулю, т.е. выполнено $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$.

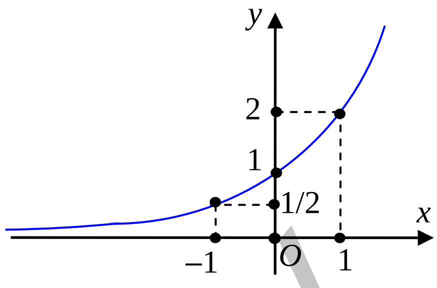


Рис. 3.34

Свойства пределов $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ очень похожи. Поэтому, когда мы пишем $\lim\limits_{x\to a}$, то подразумеваем, что вместо a может стоять $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при x стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

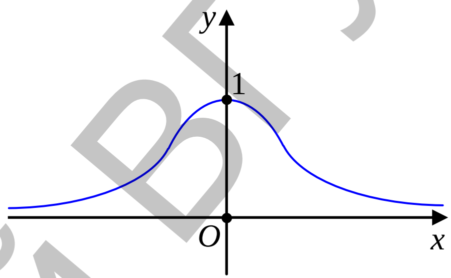


Рис. 3.35

Примеры. **4.** $y=(x-a)^2$ является бесконечно малой при $x\to a$.

5. $y=e^{-x^2}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ (рис. 3.35). Эта функция играет важную роль в теории вероятностей.

Свойства пределов

1. Если в некоторой окрестности точки a выполнено $f_1(x)<f_2(x)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A_2$, то $A_1\le A_2$.

2. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, и в некоторой окрестности точки a выполнено $f_1(x)<\varphi(x)<f_2(x)$, то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$.

3. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то существуют пределы $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, при условии, что $B\ne 0$.

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\varphi(x)$ отграничена от нуля в некоторой окрестности точки a $(\varphi(x)\ge M>0)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, а $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\infty$, в частности, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=\infty$. Другими словами, если знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель не приближается к нулю, то дробь стремится к бесконечности.

5. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\ne 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, а $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=0$; в частности, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=0$. Другими словами, если знаменатель дроби стремится к бесконечности, а числитель нет, то дробь стремится к нулю.

Примеры. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sin x}{x}=\infty$, потому, что $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, а $2+\sin x\geq 1$.

7. Уже знаем, что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1$, а $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}:(x-3)\right)=\infty$.

§ 13. Раскрытие неопределенностей

Определение. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тогда про предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ мы ничего сразу сказать не можем. Говорим, что имеет место *неопределенность вида* ∞/∞. Предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))$ также представляет собой *неопределенность вида* $\infty-\infty$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой *неопределенность вида* 0/0. Существуют и более сложные неопределенности, например вида 1^∞.

Раскрыть неопределенность – означает найти предел, если он существует.

Примеры. **1.** См. пример 1 из §11.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1+0+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$. Мы разделили и числитель, и знаменатель на самую старшую степень переменной x, т.е. на x^2, а затем мы перешли к пределу в каждом слагаемом по отдельности.

§ 14. Замечательные пределы

I. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (неопределенность 0/0).

II. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e$ (неопределенность типа 1^∞).

Примеры применения замечательных пределов

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{3x}\right)=\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=$

$$=\left\{\begin{array}{c} u=2x, \\ x\to 0\Leftrightarrow u\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\left\{\begin{array}{c} u=\frac{x}{2}, \\ x\to 0 \Leftrightarrow u\to 0 \end{array}\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2=\left\{\dfrac{x}{2}=u\right\}=\lim\limits_{u\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u\right)^2=e^2.$

4. Точно также доказывается, что $\lim\limits_{u\to 0}(1+\alpha u)^{1/u}=e^{\alpha}$ $(\alpha\neq 0)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1.$

6. Примем без доказательства, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, в частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

§ 15. Порядок переменной. Эквивалентные переменные

Еще раз напомним, что функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при x стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

Определение. Пусть две бесконечно малые функции определены в некоторой окрестности точки a, кроме, может быть, самой точки a. Если выполнено $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$, то говорим что $\varphi(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка, чем* $\psi(x)$ и пишем $\varphi(x)=o(\psi(x))$. Другими словами $\varphi(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\psi(x)$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, то $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными*; пишем $\varphi(x)\approx\psi(x)$ при $x\to a$.

Примеры. **1.** $x^2=o(x)$ при $x\to 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$, т.е. x^2 стремится к нулю быстрее, чем x;

2. $\sin x\approx x$ при $x\to 0$ (первый замечательный предел);

3. $1-\cos x\approx x^2$ при $x\to 0$ (пример 2 §13);

4. $\ln(1+x)\approx x$ при $x\to 0$ (пример 5 §13);

5. $e^x-1\approx x$ при $x\to 0$ (пример 6 §13).

При вычислении предела сомножители можно заменять на эквивалентные им величины (со слагаемыми это делать нельзя).

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^3+x}=\{\sin x\approx x\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{0}{0+1}=0.$

Замечание. Полезно отметить, что при $x\to 0$ многочлен эквивалентен младшему члену, а при $x\to\infty$ – старшему.

§ 16. Односторонние пределы. Непрерывность функции

***Примеры.* 1.** $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ (рис. 3.36)

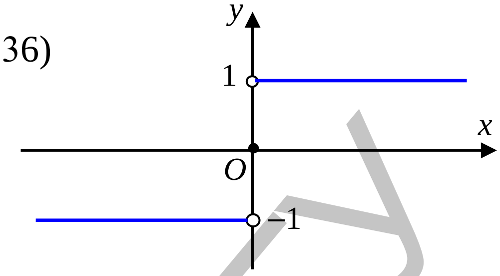


Рис. 3.36

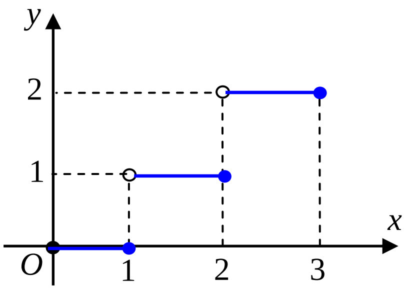


Рис. 3.37

2. $y=[x]$ (целая часть x), $x\geq 0$. Например, $[1{,}75]=1$, $[2]=2$ (рис. 3.36).

Это примеры разрывных функций. В примере 1 мы видим, что при приближении x к нулю справа, значение функции приближается к -1, а при приближении x к нулю слева, значение функции приближается к 1. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ не существует. Но можем записать, что $\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{sgn}x=1$, $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{sgn}x=-1$. Первый из пределов называется пределом справа, второй – пределом слева. Точно также не существует $\lim\limits_{x\to n}[x]$, где $n\in\boldsymbol{N}$, но можем записать, что $\lim\limits_{x\to n+0}[x]=n$, $\lim\limits_{x\to n-0}[x]=n-1$.

***Пример* 3.** Для функции $y=\dfrac{1}{x-a}$ можем записать, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$ (рис. 3.38).

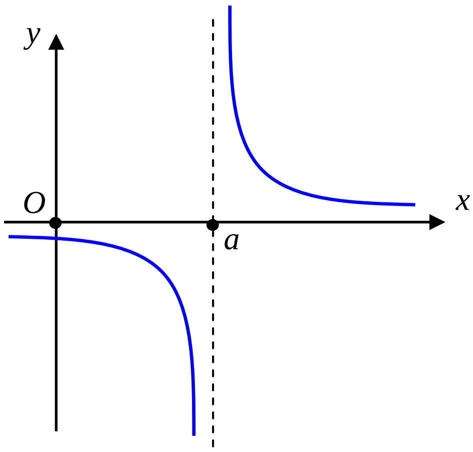


Рис. 3.38

***Определение* 1.** Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности (a,b) точки x_0, в том числе и в самой точке x_0. Функция $f(x)$ называется <u>*непрерывной в точке*</u> x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ и он равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Последняя фраза, в частности, означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ не может быть равен бесконечности.

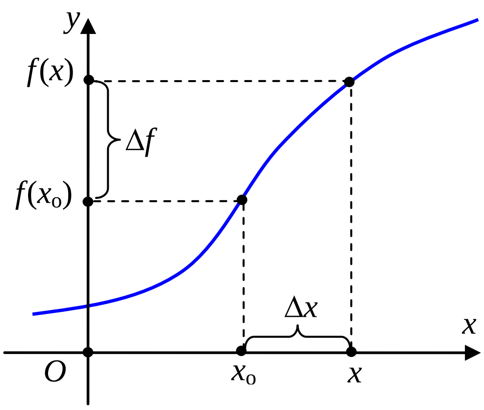


Рис. 3.39

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности (a,b) точки

x_0, в том числе и в самой точке x_0, и пусть $x \in (a, b)$. Тогда величина $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента*, а величина $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* в точке x_0 (рис. 3.39).

***Определение* 2.** Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности (a, b) точки x_0, в том числе и в самой точке x_0. Функция $f(x)$ *называется непрерывной* в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке стремится к нулю при любом способе стремления к нулю приращения аргумента Δx.

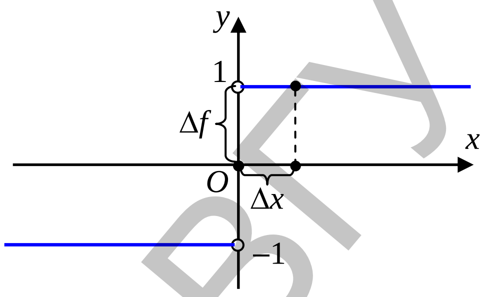


Рис. 3.40

Пусть в примере 1 $x_0 = 0$, а $\Delta x > 0$. Каким бы маленьким ни было Δx, все равно $\Delta f = 1$, т.е. приращение функции не стремится к нулю (рис. 3.40).

Определение. Функция называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, или функция не определена в точке x_0, то разрыв функции в этой точке *называется устранимым*.

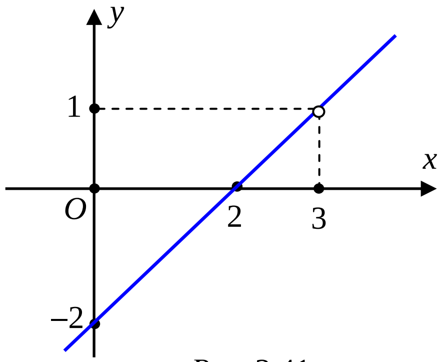


Рис. 3.41

Примеры **3.** Функция $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ имеет разрыв при $x = 3$. Мы уже выяснили, что $f(x) = x - 2$ везде, кроме $x = 3$. Если мы доопределим $f(3) = 1$, то функция станет непрерывной (рис. 3.41). Тем самым мы устранили разрыв.

4. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ не определена при $x = 0$. Но односторонние пределы равны (рис. 3.42):

$$\lim_{x \to +0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

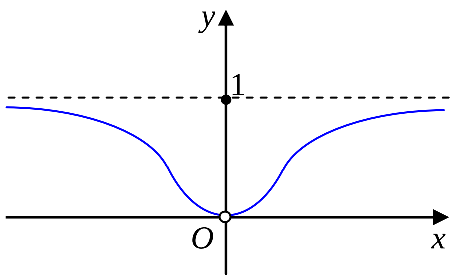


Рис. 3.42

(действительно, $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ при $x \to 0$). Поэтому мы можем дополнительно определить $f(0) = 0$ и функция станет непрерывной.

5. Функция $y = \dfrac{1}{x - a}$ имеет неустранимый разрыв при $x = 0$ (рис. 3.38).

Все элементарные функции, которые изучали, кроме $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

и x^n, при $n<0$ являются непрерывными. Примеры непрерывных функций дают различные законы движения тел.

1. $x=x_0+vt$ – равномерное движение из начальной точки x_0 с постоянной скоростью v.

2. $x=x_0+\dfrac{at^2}{2}$ – движение с постоянным ускорением.

***Теорема* 3.7.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ тоже непрерывны в этой точке, а $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна, если $g(x_0)\neq 0$.

***Теорема* 3.8.** Пусть функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, $u_0=\varphi(x_0)$, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке u_0. Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Задания для решения на практических занятиях

1. Даны два комплексных числа $z_1=11+2\mathrm{i}$, $z_2=2-\mathrm{i}$. Вычислить а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2; г) z_1/z_2.

2. Дано комплексное число в алгебраической форме. Записать его в тригонометрической форме. Изобразить это число на комплексной плоскости, показав на чертеже модуль и аргумент числа.

а) $1+\mathrm{i}$; б) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$; в) $-2+2\mathrm{i}$.

3. Даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$z_1=6(\cos 45°+i\sin 45°)$, $z_2=3(\cos 15°+i\sin 15°)$.

Найти а) z_1z_2, б) z_1/z_2. Записать полученные числа в алгебраической форме.

4. Найти область определения функции.

а) $y=\sqrt{3x^2-6x}$;

б) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$;

в) $y=\lg(2x-1)$;

г) $y=\log_3(x^2-4)$;

д) $y=\arcsin(2x-5)$;

е) $y=\arccos\dfrac{2x-5}{3}$;

ж) $y=\sqrt{x^2-6x+5}+2^{x-1}$;

з) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{x-2}{3}$;

и) $y=\sin 5x+\dfrac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$;

к) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2+1}$;

л) $y=\dfrac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

5. Найти предел последовательности.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4+5n^2-2}{4n^4+2n^2+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-4n+3}{3n^3+2n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+3n^2-5}{1-n^3}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{2n^2+1}+\dfrac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+3}+\dfrac{2n^2}{2n+1}\right)$.

6. Найти предел функции (неопределенность отсутствует).

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x})$;

б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2+5x+1}$.

7. Найти предел функции (раскрыть неопределенность).

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{2(x^2-4)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+5x}{8-3x-18x^2}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg} 5x}$;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$;

о) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{5x^2}$;

п) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 \pi x}{x^3}$;

р) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$;

с) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{7x}$;

т) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$;

у) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{-4x}$;

ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

8. Являются ли следующие функции непрерывными? Если нет, то выясните, является ли разрыв устранимым? Если разрыв устранимый, то определите параметр A так, чтобы функция стала непрерывной.

а) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ A, & x=2.\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x\neq -1,\\ A, & x=-1.\end{cases}$ в) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$

г) $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$ д) $y=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ A-x, & x>1.\end{cases}$ е) $y=\begin{cases}2x, & x<0,\\ A+x, & x\ge 0.\end{cases}$

Задания для самостоятельного решения

1. *Даны два комплексных числа* z_1 *и* z_2. *Вычислить* z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 z_2$ *и* z_1/z_2.

1. $z_1=-1+5i$, $z_2=2+3i$;
2. $z_1=-4+7i$, $z_2=2+3i$;
3. $z_1=7-4i$, $z_2=2-3i$;
4. $z_1=4+7i$, $z_2=-2+3i$;
5. $z_1=-7+9i$, $z_2=1+3i$;
6. $z_1=9+7i$, $z_2=1+3i$;
7. $z_1=-1+13i$, $z_2=4+i$;
8. $z_1=2+9i$, $z_2=1-4i$;
9. $z_1=9-2i$, $z_2=1-4i$;
10. $z_1=9+2i$, $z_2=1+4i$;
11. $z_1=5+3i$, $z_2=1+4i$;
12. $z_1=-3+5i$, $z_2=1+4i$;
13. $z_1=5+5i$, $z_2=-1+3i$;
14. $z_1=5-3i$, $z_2=1-4i$;
15. $z_1=7-i$, $z_2=1-3i$;
16. $z_1=10+11i$, $z_2=2-3i$;
17. $z_1=3+7i$, $z_2=2-5i$;
18. $z_1=9+7i$, $z_2=3-i$;
19. $z_1=-11+8i$, $z_2=6-i$;
20. $z_1=9+13i$, $z_2=3+i$;
21. $z_1=-13+11i$, $z_2=5-2i$;
22. $z_1=9+7i$, $z_2=3-2i$
23. $z_1=-4+6i$, $z_2=1+i$;
24. $z_1=-13+i$, $z_2=3+5i$;
25. $z_1=13+13i$, $z_2=5-i$;
26. $z_1=12-2i$, $z_2=1+6i$;
27. $z_1=-3-2i$, $z_2=2-3i$;
28. $z_1=-4+2i$, $z_2=2+4i$;
29. $z_1=-5+15i$, $z_2=7-i$;
30. $z_1=7+5i$, $z_2=6-i$.

2. *Найти предел. В пункте а) рекомендуется использовать разложение числителя на множители. В пункте б) рекомендуется использовать деление числителя и знаменателя на старшую степень. В пункте в) рекомендуется использовать эквивалентные бесконечно малые.*

1. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-14}{x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-3x+1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^3 x}{2x^3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{4x^2}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-5x-25}{x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+15x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)^2}{x^3}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-5x-12}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin^2 x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^3+x+1}{2x^3+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{e^x-1}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+11x-9}{2x^3-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{e^x-1}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5-x^2+1}{x^4+4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)^2}{1-\cos x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-14}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+x^2-8}{x^2+6x+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{x^2+9x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{5x^4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{9x^2+4x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^4+x+8}{x^4-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{3\sin x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+7x-6}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+5}{3x^2+5x+9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos x}{7\ln(1+x)}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-4}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2+9x+16}{2x^2+15}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{(e^x-1)^2}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+x-10}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^3+3x^2+11}{16x^3+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2}{1-\cos x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+x^2+5}{9x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)^2}{x^3+x^2}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+12x+16}{4x^4+9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x}$.

Г Л А В А 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Производная

Еще раз повторим определение.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности (a, b) точки x_o, в том числе и в самой точке x_o, и пусть $x\in(a,b)$. Тогда величина $\Delta x=x-x_o$ называется *приращением аргумента*, а величина $\Delta f=f(x)-f(x_o)$ называется *приращением функции в точке* x_o (рис. 4.1).

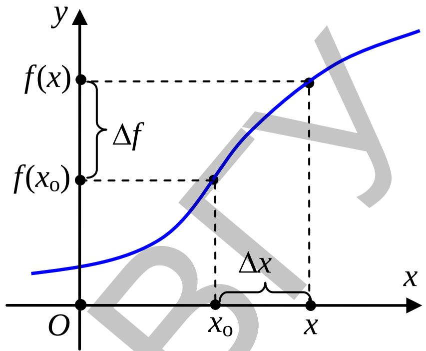


Рис. 4.1

Иногда будем писать, что $y_o=f(x_o)$ и обозначать приращение функции так: $\Delta y=y-y_o$. Заметим, что может быть $x<x_o$, и тогда $\Delta x<0$. Также может быть $y<y_o$, и тогда $\Delta y<0$. На втором рисунке мы видим, что на участке, где функция убывает, при $\Delta x>0$ будет $\Delta y<0$ (рис. 4.2).

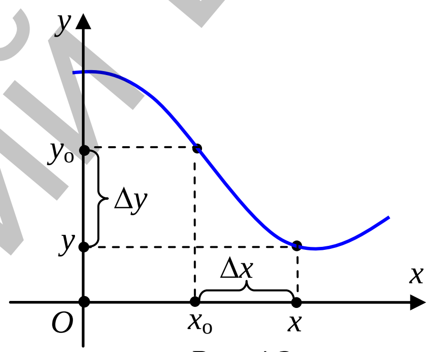


Рис. 4.2

Определение. *Производной функции* $y=f(x)$ *в точке* x_o называется предел отношения приращения функции Δf в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует (является конечным). Эта производная обозначается $f'(x_o)$ или $y'(x_o)$.

$$f'(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{x-x_o}.$$

Примеры. **1.** Вычислим производную функции $y=x^2$ в произвольной точке x_o в соответствии с определением.

$$\Delta f=(x_o+\Delta x)^2-x_o^2=x_o^2+2x_o\Delta x+\Delta x^2-x_o^2=2x_o\Delta x+\Delta x^2$$

$$f'(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_o\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_o+\Delta x)=2x_o.$$

Итак, если $y=x^2$, то $y'=2x$.

2. Рассмотрим функцию $y=|x|$ и точку $x_o=0$ (рис. 4.3).

$\Delta y=\Delta x$, при $\Delta x>0$, $\Delta y=-\Delta x$, при $\Delta x<0$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$, при $\Delta x>0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$, при $\Delta x<0$.

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует. Функция $y=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$.

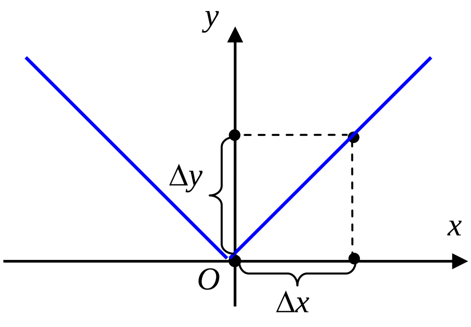


Рис. 4.3

§ 2. Физический и геометрический смысл производной

Пусть $s=s(t)$ – закон движения точки по прямой. Пусть t_o и t – некоторые значения времени; тогда $\Delta t=t-t_o$ означает промежуток времени, прошедший с момента t_o до момента t, а $\Delta s=s(t)-s(t_o)$ означает путь, пройденный за этот промежуток времени. Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ означает среднюю скорость за промежуток времени Δt. Чем меньше Δt, тем точнее эта скорость приближается к мгновенной скорости в момент времени t_o. Значит,

$$v(t_o)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

а этот предел и есть производная функции $s(t)$ при $t=t_o$. Итак, физический смысл производной заключается в следующем. *Производная* $f'(x_o)$ *есть скорость изменения функции* $y=f(x)$ *в точке* x_o; *в частности, если функция* $s(t)$ *задает закон движения, то* $s'(t_o)=v(t_o)$.

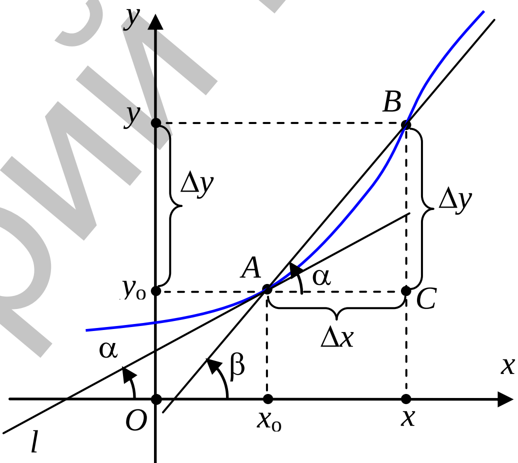


Рис. 4.4

Пусть $A(x_o, y_o)$ и $B(x, y)$ – две точки на графике функции $y=f(x)$. Прямую AB назовем секущей (рис. 4.4). Если $\Delta x=x-x_o$ стремится к нулю, то точка B приближается к точке A; при этом секущая приближается к прямой l, касательной к графику функции в точке A. Пусть β – угол наклона секущей, а α – угол наклона касательной. Когда точка B приближается к точке A, то величина β стремится к величине α, а значит $\operatorname{tg}\beta$ стремится к $\operatorname{tg}\alpha$. Из треугольника ABC мы находим, что $\operatorname{tg}\beta=\Delta y/\Delta x$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_o).$$

Напомним, что угловой коэффициент касательной l равен $\operatorname{tg}\alpha$. Итак, мы выяснили, что *производная* $f'(x_o)$ *равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой* x_o. В этом и заключается геометрический смысл производной.

Как следствие, мы получаем уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(x_o, y_o)$:

$$y-y_o=f'(x_o)(x-x_o). \tag{4.1}$$

Пример. Составим уравнение касательной к графику функции $y=x^2$ в точке с абсциссой $x_o=1$. Находим $y'=2x$; $y'(1)=2$, $y_o=1^2=1$. Подставляем все найденное в формулу (4.1): $y-1=2(x-1)$. Раскрываем скобки и окончательно получаем уравнение касательной

$$y=2x-1.$$

§ 3. Таблица производных

Мы приведем две таблицы производных. В первой колонке содержится собственно сама таблица производных от основных функций. Во второй колонке содержится таблица, использующая правило дифференцирования сложной функции. Она применяется в том случае, когда вместо независимой переменной x в качестве аргумента функции стоит другая функция $u(x)$. Вторую колонку стоит изучать только тем студентам, которые не в состоянии запомнить правило дифференцирования сложной функции (см. следующий параграф) или не могут научиться его применять. При этом следует обязательно помнить, что производная от независимой переменной равна 1: $x'=1$.

1. $C'=0$;
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$;
3. $(\sin x)'=\cos x$;
4. $(\cos x)'=-\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$,
   в частности $(e^x)'=e^x$;
8. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$,
   в частности $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
9. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;
10. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\ \text{слов}\, x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

1. $C'=0$;
2. $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$;
3. $(\sin u)'=u'\cdot\cos u$;
4. $(\cos u)'=-u'\cdot\sin u$;
5. $(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$;
6. $(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;
7. $(a^u)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a$,
   в частности, $(e^u)'=u'\cdot e^u$;
8. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$,
   в частности $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$;
9. $(\operatorname{sh} u)'=u'\cdot\operatorname{ch} u$;
10. $(\operatorname{ch} u)'=u'\cdot\operatorname{sh} u$;
11. $(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12. $(\ \text{слов}\, u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$.

§ 4. Правила дифференцирования

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на одном и том же интервале. Тогда на этом интервале имеют место следующие правила.

1. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;
2. $(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$ (постоянный множитель выносится за знак производной);
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, если $g(x)\neq 0$;
5. $(f(u(x)))'=f'(u(x))\cdot u'(x)$ (правило дифференцирования сложной функции). В частности, $(f(ax+b))'=a\cdot f'(ax+b)$.

Примеры *применения этих правил.* Наряду с прочими примерами, докажем некоторые из формул предыдущего параграфа.

8. Согласно правилу 5 и формуле 7 из таблицы производных (§ 3) $(e^{-x})'=-1\cdot e^{-x}$. Согласно правилам 1 и 2:

$$(\mathrm{ch}\,x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\,((e^x)'+(e^{-x})')=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\mathrm{sh}\,x.$$

2. Согласно правилу 4 и формулам 3, 4 из таблицы производных:

$$(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Максимально подробно продемонстрируем применение правила 5, используя замену; мы выделяем ее в цепочке равенств с помощью фигурных скобок.

$$(\ln(\sin x))'=\left\{\begin{matrix} u=\sin x \\ u'=\cos x\end{matrix}\right\}=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\mathrm{ctg}\,x.$$

§ 5. Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}f'(x)=f'(x)-f'(x)=0.$$

Таким образом, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x)$ есть бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$.

Обозначим ее $\varepsilon(\Delta x)$. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x).$$

Следовательно, приращение функции можно записать в виде:

$$\Delta f=f'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Обозначим $o(\Delta x)=\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$. Тогда есть $o(\Delta x)$ величина бесконечно малая более высокого порядка по отношению к Δx:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0.$$

Окончательно мы получаем, что приращение функции записывается в виде:

$$\Delta f=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x). \qquad (4.2)$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x), \qquad (4.2')$$

где величина A зависит от x, но не зависит от Δx.

Мы выяснили выше, что если функция имеет конечную производную в точке x, то она дифференцируема в этой точке. Оказывается верно, и обратное утверждение (оставляем его без доказательства).

Теорема 4.1. *Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную.*

Если в формуле (4.2′) $A\neq 0$, то второе слагаемое стремится к нулю быстрее, чем первое. Поэтому это слагаемое $A\cdot\Delta x$ называется главной частью приращения функции Δf или дифференциалом функции $f(x)$ в точке x. Это слагаемое является линейной функцией от переменной Δx. Поэтому окончательно имеет место следующее определение.

Определение. *Дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* x называется главная линейная часть приращения функции в этой точке.

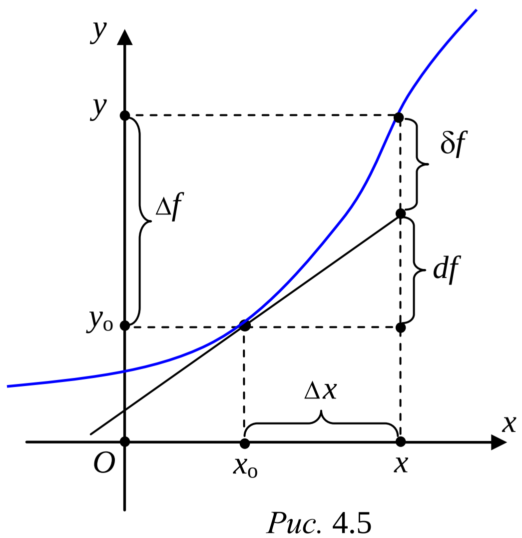


Рис. 4.5

Дифференциал функции обозначаем df. Установили, что $df=f'(x)\cdot\Delta x$, $\Delta f=df+o(\Delta x)$. (4.2″)

Для независимой переменной x получаем $dx=x'\cdot\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$. Тогда

$$df=f'(x)\cdot dx \quad \text{и} \quad f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

Теперь мы выяснили, почему для производной используется именно такое обозначение.

Согласно формуле (4.2″) приращение функции Δf состоит из двух составляющих: df и $\delta f=o(\Delta x)$. Чем меньше Δx, тем большую часть в Δf составляет df.

Часть δf стремится к нулю намного быстрее при уменьшении Δx, чем часть df. На рис. 4.5 и 4.6 мы изобразили график одной и той же функции и выбрали одно и то же значение x_o, но разные приращения Δx. Видим, что во втором случае, когда Δx стало меньше, df составляет большую часть от Δf, чем в первом случае. При малых Δx именно df играет наиболее важную роль. При решении ряда задач δf можно пренебречь.

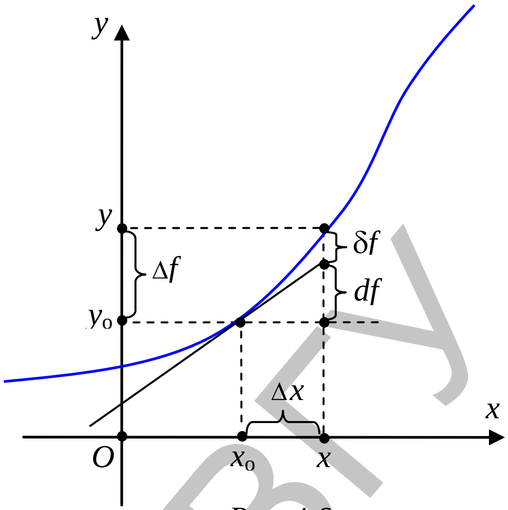


Рис. 4.6

Правила вычисления дифференциала

1. $d(f \pm g) = df \pm dg$;
2. $d(C \cdot f) = C \cdot df$;
3. $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$;
4. $d\dfrac{f}{g} = \dfrac{df \cdot g + f \cdot dg}{g^2}$, если $g \neq 0$.

Примеры. **1.** $F(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$; $df = 2xdx$.

2. $f(x) = \ln(x^2+1)$; $f'(x) = 2x \cdot \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $df = \dfrac{2xdx}{x^2+1}$.

§ 6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Еще раз вернемся к формуле (4.2):

$$\Delta f = df + o(\Delta x).$$

Она показывает, что при достаточно малых значениях Δx дифференциал df может служить хорошим приближением для приращения функции: $\Delta f \approx df$. Отсюда следует, что

$$f(x) - f(x_o) \approx f'(x_o) \cdot \Delta x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o), \qquad (4.3)$$

если x достаточно близко к x_o. Эту формулу можно записать еще так:

$$y \approx y_o + y'(x_o) \cdot \Delta x. \qquad (4.3')$$

Примеры. **1.** Вычислить приближенно $\sqrt{101}$.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. В качестве приближенного значения для $x = 101$ естественно выбрать $x_o = 100$; тогда $\Delta x = 1$, $y_o = \sqrt{100} = 10$. Находим производную и ее значение в точке x_o:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y'(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = 0{,}05.$$

Осталось подставить все найденное в формулу (3′):

$$y=\sqrt{101}\approx 10+0{,}05\cdot 1\approx 10{,}05.$$

2. Вычислить $\lg(1002)$ с точностью до 0,001.

$$Y=\lg x,\ x_0=1000,\ \ \Delta x=2,\ y_0=\lg 1000=3,\ y'=\frac{1}{x\cdot\ln 10}.$$

Можно найти, что $\ln 10\approx 2{,}3$; а $\frac{1}{\ln 10}\approx 0{,}43$. Тогда $y'(x_0)\approx\frac{0{,}43}{1000}\approx 0{,}00043$.

Подставляем найденные значения в формулу (4.3′):

$$y\approx 3+0{,}00043\cdot 2\approx 3{,}00086.$$

По условию результат следует округлить до тысячных долей. Поэтому ответ будет таким: $y\approx 3{,}001$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{8{,}03}$ с точностью до 0,001.

$$Y=\sqrt[3]{x},\ x_0=8,\ \ \Delta x=0{,}03,\ y_0=\sqrt[3]{8}=2,\ y'=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2},\ y'(x_0)=\frac{1}{3(\sqrt[3]{8})^2}=\frac{1}{12}.$$

$$Y\approx 2+\frac{1}{12}\cdot 0{,}03\approx 2+\frac{0{,}01}{4}\approx 2{,}0025.$$

Ответ: $y\approx 2{,}003$.

§ 7. Исследование функции с помощью производной: возрастание, убывание, локальные минимум и максимум

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке x_0 *локального минимума* (*максимума*), если существует такая окрестность (a, b) точки x_0, что $f(x_0)\le f(x)$ (соответственно $f(x_0)\ge f(x)$) для всех $x\in(a,\ b)$ (рис. 4.7). Локальные минимум и максимум называются *локальными экстремумами* функции.

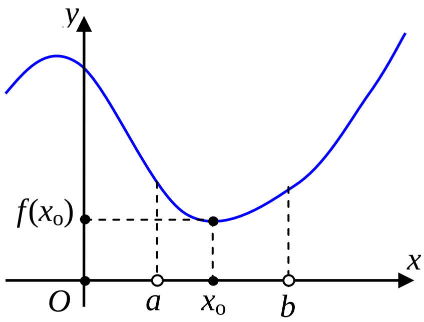


Рис. 4.7

Другими словами, в точке локального минимума x_0 значение функции $f(x_0)$ оказывается наименьшим, среди значений $f(x)$ во всех близких к x_0 точках. За пределами некоторой окрестности точки x_0 функция может принимать значения меньше, чем $f(x_0)$.

Теорема Ферма. *Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0 и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(x_0)=0$.*

Таким образом, равенство $f'(x_0)=0$ является необходимым словием экстремума. Точки, в которых оно имеет место, называются *критическими*. Но это условие не является достаточным. Это показывает следующий пример.

***Пример* 1.** Для функции $y=x^3$ выполнено $y'(0)=0$. Тем не менее, в точке $x=0$ функция не имеет локального экстремума (рис. 4.8). Точка такого типа называется *точкой перегиба* графика функции (см. §10).

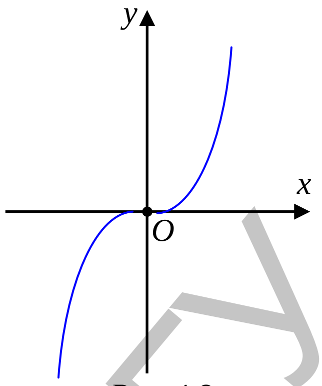


Рис. 4.8

Подчеркнем, что в формулировке теоремы Ферма сказано: «Если функция имеет производную…». Но могут существовать точки, в которых производная не существует. Поэтому согласно теореме Ферма, локальные экстремумы функции следует искать не только в точках, где производная равна нулю, но еще и в точках, где производная не существует.

***Пример* 2.** Функция $y=|x|$ имеет минимум в точке $x=0$, но равенство $y'(0)=0$ не имеет места: производная $y'(0)$ вообще не существует (рис. 4.9).

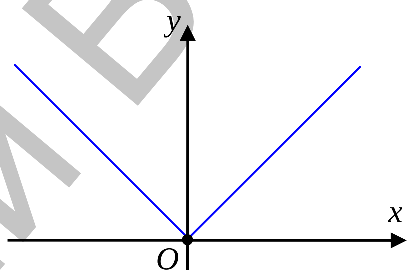


Рис. 4.9

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (не убывает) на отрезке $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких что $x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \le f(x_2))$ (рис. 4.10).

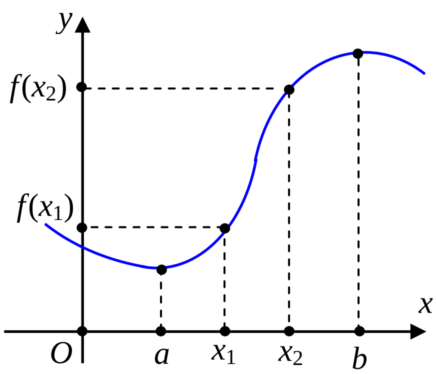


Рис. 4.10

Упражнение. Самостоятельно сформулируйте определение, что значит, что функция $f(x)$ убывает (не возрастает) на отрезке $[a, b]$.

***Теорема* 4.2.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Тогда*

1. $f(x)$ *возрастает (не убывает) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ $(f'(x) \ge 0)$ на (a, b);*
2. $f(x)$ *убывает (не возрастает) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f'(x) < 0$ $(f'(x) \le 0)$ на (a, b).*

Теперь мы можем сформулировать достаточные условия локальных минимума и максимума.

***Теорема* 4.3.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и существует интервал (a, b), содержащий точку x_0, такой, что на интервале (a, x_0) выполнено $f'(x) > 0$, а на интервале (x_0, b) выполнено $f'(x) < 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 достигает локального максимума. Если, наоборот, на интервале (a, x_0) выполнено $f'(x) < 0$, а на интервале (x_0, b) выполнено $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 достигает локального минимума.*

Другими словами, если в точке x_0 производная при возрастании x меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 мы имеем локальный максимум, а если производная меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 мы имеем локальный минимум.

***Пример* 3.** Исследовать функцию $y=(x-4)(x-1)^2$ на возрастание и убывание, найти точки локального минимума и максимума, схематично построить график.

Решение. 1. Находим область определения функции. Здесь нет никаких ограничений на возможное значение переменной x, поэтому $D(y)=\boldsymbol{R}$.

2. Находим производную:

$$y'=(x-4)'(x-1)^2+(x-4)((x-1)^2)'=(x-1)^2+2(x-1)(x-4)=3(x-1)(x-3).$$

Она также существует на всей числовой прямой.

3. Приравниваем производную к нулю и находим точки, подозрительные на экстремум:

$$3(x-1)(x-3)=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\, x_2=3.$$

Изображаем числовую прямую и на ней отмечаем эти точки. Выше прямой расставляем знаки «+» или «–» в соответствии со знаками производной, а ниже прямой изображаем символы возрастания и убывания (стрелочки) (рис. 4.11). Теперь мы видим, что $x_1=0$ – это точка максимума, а $x_2=1$ – это точка минимума. Находим значения самой функции в этих точках: $y_1=y(1)=0, y_2=y(3)=-4$.

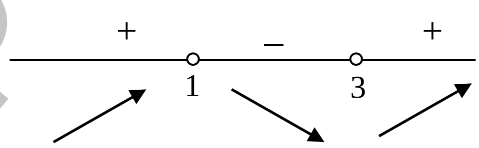


Рис. 4.11

4. Для более точного построения графика находим точки его пересечения с координатными осями. Ось Ox задается условием $y=0$. Решаем это уравнение:

$$(x-4)(x-1)^2=0 \;\Rightarrow$$
$$x_1=1,\; x_3=4$$

(поскольку единица у нас уже была, мы ее обозначили по-прежнему как x_1). Ось Oy задается условием $x=0$. Находим, что $y_0=y(0)=(0-4)(0-1)^2=-4$.

Рисуем систему координат и изображаем все найденные выше точки. Через эти точки проводим график функции (рис. 4.12).

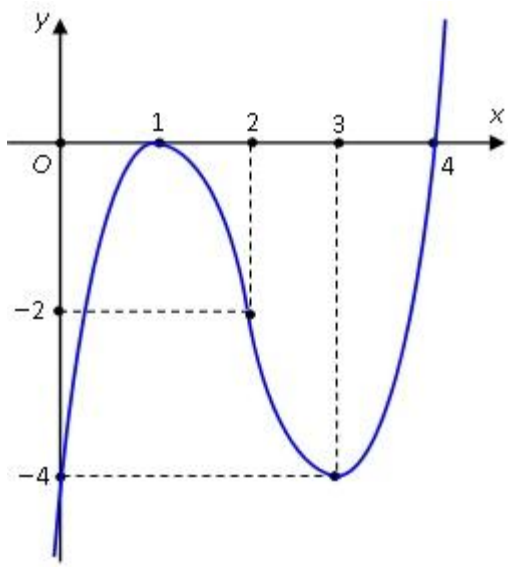


Рис. 4.12

§ 8. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

***Теорема* 4.4.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает на нем наибольшего и наименьшего значений.*

Мы выяснили выше, что локальные минимум и максимум функции следует искать среди точек, в которых производная либо равна нулю, либо не существует. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[a,b]$ тоже следует искать среди таких точек, но еще следует рассмотреть концы отрезка, т.е. точки a и b. Вычисляем значения функции во всех вышеперечисленных точках и среди этих значений выбираем наибольшее и наименьшее. Критические точки, которые не попадают на отрезок $[a,b]$, мы не рассматриваем.

***Пример* 1.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2$ на отрезке $[-2,3]$.

Решение. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$y'=x^2-2x;\quad x(x-2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,\, x_2=2.$$

Обе эти точки принадлежат отрезку $[-2,3]$. Вычисляем значения функции в этих точках, а также на концах отрезка.

$$Y(-2)=-\frac{8}{3}-4=-\frac{20}{3},\quad y(0)=0,\quad y(2)=\frac{8}{3}-4=-\frac{4}{3},\quad y(3)=\frac{27}{3}-9=0.$$

***Ответ*:** $y_{min}=y(-2)=-\dfrac{20}{3}$, $y_{max}=y(0)=y(3)=0$.

***Пример* 2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-\dfrac{x}{2}+\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$.

Решение. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$y'=-\frac{1}{2}+\cos x;\quad -\frac{1}{2}+\cos x=0;\quad \cos x=\frac{1}{2}.$$

На отрезке $[0,\pi]$ мы имеем только одно решение $x_0=\dfrac{\pi}{3}$. Вычисляем значение функции в этой точке, а также на концах отрезка.

$$Y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\approx 0{,}34;\;\; y(0)=0,\;\; y(\pi)=-\frac{\pi}{2}.$$

Выбираем из этих значений наибольшее и наименьшее.

***Ответ*:** $y_{min}=y(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}$, $y_{max}=y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.

§ 9. Вторая производная. Ее применение к исследованию графика функции

Определение. Первая производная функции $f(x)$ тоже является функцией и мы можем рассмотреть ее производную $(f'(x))'$. Эта производная обозначается $f''(x)$, и если она существует в точке x_0, то функция называется *дважды дифференцируемой в точке* x_0. Если вторая производная функции существует в каждой точке интервала (a, b), то функция называется *дважды дифференцируемой на интервале* (a, b).

***Теорема* 4.5.** *Пусть функция* $f(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0 *имеет непрерывные первую и вторую производные. Пусть в точке* x_0 *выполнено* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$. *Тогда* x_0 *является точкой локального максимума (минимума), если* $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$.

Доказательство. Мы докажем утверждение относительно максимума, а утверждение относительно минимума доказывается аналогично.

Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$. По условию теоремы $f''(x)$ непрерывна в точке x_0. Это значит, что $f''(x_0)<0$ выполнено и в некоторой окрестности точки x_0. Значит, в этой окрестности функция $f'(x_0)$ убывает. При этом, по условию теоремы $f'(x_0)=0$. Это значит, что в точке x_0 функция $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Согласно теореме 4.3 является точкой локального максимума для функции $f(x)$. ■

Определение. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая функция и пусть прямая l является касательной к графику этой функции в точке $M(x_0, y_0)$. Если во всех близких к M точках график функции расположен ниже прямой l, то график функции называется *выпуклым* или *выпуклым вверх* в этой точке. Если во всех близких к M точках график функции расположен выше прямой l, то график функции называется *вогнутым* или *выпуклым вниз* в этой точке. График функции называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b), если он является выпуклым (вогнутым) в каждой точке, у которой абсцисса принадлежит (a, b). Точка, при переходе через которую график функции меняет выпуклость на вогнутость, или наоборот, называется *точкой перегиба*.

На рис. 4.13 график функции в точке P является выпуклым, в точке M является вогнутым, а N – точка перегиба. По одну строну от точки N, ближайшая часть графика функции расположена выше касательной, а по другую сторону – ниже касательной.

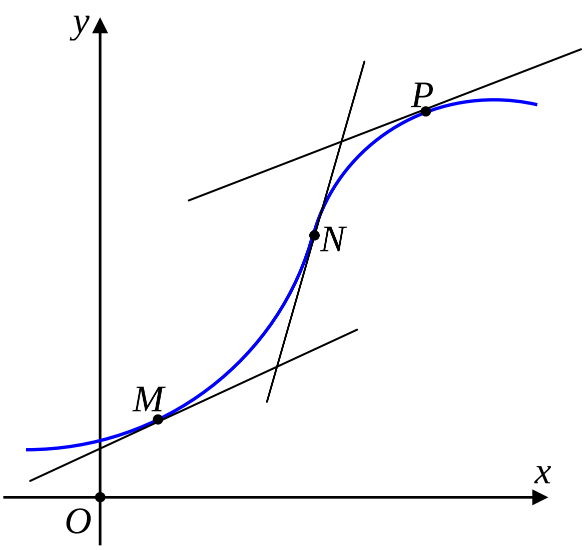


Рис. 4.13

Примем без доказательства следующую теорему.

***Теорема* 4.6.** 1. *Если на интервале* $(a,\ b)$ *выполнено* $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, *то график функции* $y=f(x)$ *является выпуклым (вогнутым) на этом интервале.*

2. *Пусть* $M(x_0, y_0)$ *– точка, принадлежащая графику функции* $y=f(x)$, *и в некоторой окрестности точки* x_0 *существует вторая производная* $f''(x)$. *Если* $f''(x_0)=0$ *и при переходе через* x_0 *вторая производная меняет знак, то* M *является точкой перегиба графика функции* $y=f(x)$.

Пример. Вернемся к примеру 3 из параграфа 8. Мы рассматриваем функцию $y=(x-4)(x-1)^2$ и уже вычислили ее первую производную:

$$y'=3(x-1)(x-3)=3(x^2-4x-3).$$

Вычисляем вторую производную и приравниваем ее к нулю:

$$y''=3(2x-4),$$

$$y''=0 \iff x=2.$$

При этом на интервале $(-\infty,2)$ выполнено $y''<0$, а на интервале $(2,+\infty)$ выполнено $y''>0$, т.е. при переходе через $x=2$ вторая производная меняет знак. Следовательно, на интервале $(-\infty,2)$ график функции является выпуклым, на интервале $(2,+\infty)$ график функции является вогнутым, а точка с абсциссой $x=2$ является точкой перегиба. Можем вычислить соответствующую ординату, если подставим это $x_4=2$ в исходную функцию:

$$y_4=(2-4)(2-1)^2=-2.$$

Итак, точка $M(2,-2)$ является точкой перегиба графика. Эта точка уже изображена на чертеже в примере 3 параграфа 8.

§ 10. Асимптота графика функции

Определение. Говорим, что прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена при всех x больших (меньших) некоторого числа M. Говорим, что прямая $y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* графика этой функции при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $|f(x)-(kx+b)|$ есть бесконечно малая величина при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$. В случае $k=0$ асимптота называется *горизонтальной*.

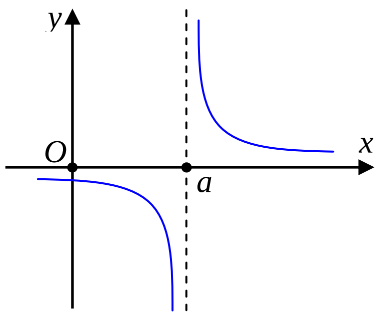
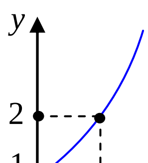


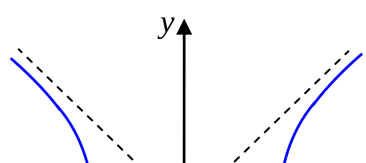
Рис. 4.14

Примеры. **1.** Функция $y=\dfrac{1}{x-a}$ имеет вертикальную асимптоту $x=a$ и горизонтальную асимптоту $y=0$, причем одновременно при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ (рис. 4.14).

2. Функция $y=2^x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ при $x\to-\infty$ (рис. 4.15).

3. Функция $y=\sqrt{x^2-1}$ имеет наклонные асимптоты





$y=x$ при $x\to+\infty$ и $y=-x$ при $x\to-\infty$ (рис. 4.16).

4. При любых k и b предел $\lim\limits_{x\to+\infty}|\sqrt{x}-(kx+b)|$ не равен нулю. Поэтому график функции $y=\sqrt{x}$ не имеет асимптот (рис. 4.17).

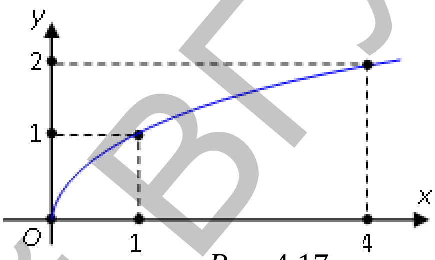


Рис. 4.17

***Теорема* 4.7.** Для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) наклонную асимптоту необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-kx|=b$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)-kx|=b$).

Важно подчеркнуть, что необходимым и достаточным является существование обоих пределов, а не одного из них. Например, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-0\cdot x)=+\infty \Rightarrow$ асимптоты нет.

***Пример.* 5.** Исследовать функцию $y=\frac{x^2}{1+x}$ на возрастание и убывание. Найти локальные минимумы и максимумы. Найти асимптоты графика функции и изобразить график.

1. $D(y)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2. $y'=\frac{(x^2)'(1+x)-x^2(1+x)'}{(1+x)^2}=\frac{2x\cdot(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$.

3. $y'=0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=0$.

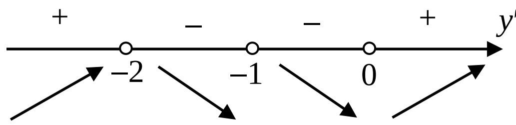


Рис. 4.18

Число -1 выпадает из области определения функции. Поэтому промежуток убывания функции $(-2, 0)$ в данном случае распадается на два отдельных промежутка $(-2,-1)\cup(-1, 0)$ и мы рисуем две отдельные стрелочки, обозначающие убывание (рис. 4.18).

$y_{max}=y(-2)=\frac{4}{1-2}=-4$, $y_{min}=y(0)=0$. Заметим, что минимум оказался больше максимума. Это вполне может быть, т.к. речь идет о локальных экстремумах.

4. Находим асимптоты графика функции.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1}=1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-x^2}{1+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+x}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=-\frac{1}{0+1}=-1.$$

Итак, мы нашли, что $k=1$ и $b=-1$. Значит, прямая $y=x-1$ является асимптотой при $x\to+\infty$. При этом очевидно, что оба предела при $x\to-\infty$ будут такими же. Значит, прямая $y=x-1$ является асимптотой также и при $x\to-\infty$. Кроме того,

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{1+x}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{1+x}=-\infty.$$

Поэтому прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

5. Изображаем на чертеже сначала асимптоты и отмечаем найденные точки (0, 0) и (–2,–4), через которые должен проходить график функции. Затем рисуем сам график (рис. 4.19).

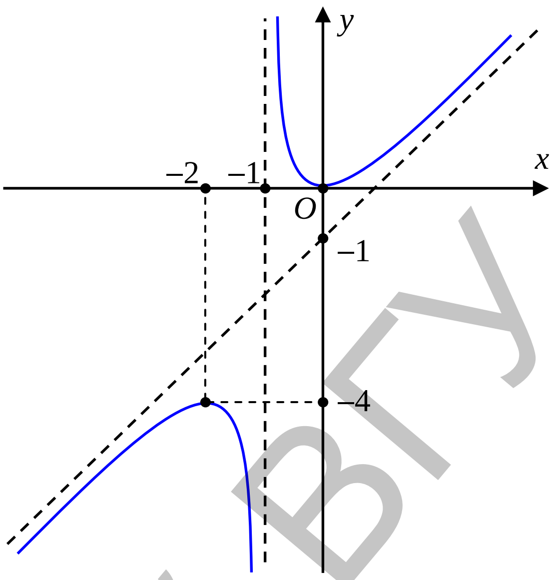


Рис. 4.19

Задания для решения на практических занятиях

1. Вычислить производные следующих функций.

1) $y=x^2-4x$;

2) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x$;

3) $y=\sqrt{x}$;

4) $y=\sqrt{x^3}+5^3$;

5) $y=\frac{1}{5x^2}$;

6) $y=\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}$;

7) $y=3\sqrt[4]{x}+x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;

8) $y=(2x^2+1)(4x^3-5)$;

9) $y=3\sin x+2\cos x$;

10) $y=x\cdot\sin x-x^2\cdot\cos x$;

11) $y=x\cdot\mathrm{tg}\,x$;

12) $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$;

13) $y=3a^x-\ln x$;

14) $y=e^x(\sin x+\cos x)$;

15) $y=2^x\cdot e^x$;

16) $y=(1+3x)^5$;

17) $y=\sqrt{1-x^2}$;

18) $y=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$;

19) $y=\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

20) $y=\cos(x^2+1)+\sin\frac{\pi}{4}$;

21) $y=\frac{1}{1+\sin 4x}$;

22) $y=\sin^2 x$;

23) $y=\cos^2(2x-1)$;

24) $y=\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x$;

25) $y=\ln^2(3x-1)$;

26) $y=e^{-x^2}$;

27) $y = \arcsin\frac{x}{2}$;

28) $y = \ln(\cos x)$;

29) $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$;

30) $y = \frac{\sin x}{x}$.

2. Доказать формулу

а) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$; б) $(f(x)\cdot e^x)' = (f(x)+f'(x))e^x$.

3. Тело движется по закону $s = t^2 + t + 10$, где s – путь (в метрах), t – время (в секундах). Найдите скорость тела в момент времени $t = 0{,}5\,\text{с}$.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x_{o}.

А) $y = x^2 - 4x$, $x_{\text{o}} = 1$; б) $y = \frac{4}{x}$, $x_{\text{o}} = 4$; в) $y = \sqrt{2}\sin\pi x$, $x_{\text{o}} = \frac{1}{4}$;

г) $y = \frac{x^2}{x-2}$, $x_{\text{o}} = 3$; д) $y = e^x$, $x_{\text{o}} = 0$.

5. Выяснить, в каких точках кривой $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + 4$, касательная составляет с осью Ox угол $45°$.

6. Найти область определения функции. Указать, является ли функция четной или нечетной. Найти промежутки возрастания и убывания, точки минимума и максимума функции, а также значения функции в этих точках. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями, промежутки, где функция положительна или отрицательна. Схематично изобразить график. В задачах а), б), в), г) выяснить, имеет ли график функции асимптоты, найти асимптоты и учесть их при построении графика. В этих же задачах найдите промежутки выпуклости и вогнутости функции.

А) $y = \frac{x^2}{x-2}$; б) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; в) $y = \ln(x^2-2)$; г) $y = \ln(x^2+2)$;

д) $y = e^{x2+x}$; е) $y = e^{1/x2}$; ж) $y = e^{\frac{x^3}{3}-x}$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

А) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in [0, 4]$; б) $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 - 12x$, $x \in [1, 4]$;

в) $y = \sqrt{2}\cos\pi\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$, $x \in [-1, 1]$.

8. С помощью формулы (4.3) вычислить приближенное значение с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{65}$; б) $\sqrt[3]{127}$.

Задания для самостоятельного решения

Задача 1. *Вычислить производные следующих функций.*

1. а) $y=\sqrt{x^5}$; б) $y=e^x\sin x$; в) $y=\arcsin\sqrt{x}$.

2. а) $y=\sqrt{x^7}$; б) $y=x^2\cos x$; в) $y=e^{\sin x}$.

3. а) $y=\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$; в) $y=\arccos\sqrt{x}$.

4. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$; б) $y=(x+1)\operatorname{tg}x$; в) $y=\sin x^3$.

5. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y=x^3\lg x$; в) $y=e^{\cos x}$.

6. а) $y=\sqrt[3]{x^4}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

7. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; б) $y=x^2\sin x$; в) $y=e^{\operatorname{ch}x}$.

8. а) $y=\sqrt[3]{x^5}$; б) $y=(x^2+1)\lg x$; в) $y=e^{x^2+x}$.

9. а) $y=\sqrt[3]{x^7}$; б) $y=e^x\cos x$; в) $y=\lg(x^2+2x)$.

10. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x^3}$; в) $y=\operatorname{tg}(x^4-x^2)$.

11. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$; б) $y=e^x\operatorname{ctg}x$; в) $y=\sin(x^2+1)$.

12. а) $y=\sqrt[4]{x^5}$; б) $y=\dfrac{\cos x}{x^3}$; в) $y=2^{x^2+1}$.

13. а) $y=\sqrt[5]{x^4}$; б) $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{2x+1}$; в) $y=e^{1-2x}$.

14. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$; б) $y=e^{-x}\cdot\sin x$; в) $y=\cos(1-x^2)$.

15. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$; б) $y=(x^2+2x)\operatorname{sh}x$; в) $y=3^{2x+1}$.

Задача 2. *Исследовать функцию на возрастание и убывание, найти точки локального минимума и максимума, точки пересечения с координатными осями, схематично построить график. Найти точки перегиба графика функции.*

1. $y=(x-3)x^2$;

2. $y=x^2(2x-3)$;

3. $y=(x+1)^2(2x-1)$;

4. $y=(x-1)^2(2x-5)$;

5. $y=\frac{1}{3}x^2(x+3)-3x$;

6. $y=\frac{1}{3}(x+1)^2(x+4)-3x$;

7. $y=x^2(x+6)+9x$;

8. $y=(x-1)^2(x+5)+9x$;

9. $Y=\frac{1}{2}x^2(x-6)$;

10. $Y=\frac{1}{2}(x+1)^2(x-5)$;

11. $Y=(x+2)^2(2x+1)$;

12. $Y=\frac{1}{4}(x+3)^2(x-3)$;

13. $Y=(x-2)^2(2x-1)$;

14. $Y=\frac{1}{3}(x-2)^2(2x+5)$;

15. $Y=\frac{1}{3}(x-1)^2(2x+7)$.

ГЛАВА 5. **ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

§ 1. Функция двух переменных. Ее предел

Определение. Пусть D – некоторое множество, которое состоит из пар действительных чисел (x, y). Пары (x_1, y_1), (x_2, y_2) считаются равными, если одновременно выполняется $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Если каждой паре $(x, y)\in D$ поставлено в соответствие в силу некоторого закона число z, то говорят, что *на множестве* D *определена функция* $z=f(x, y)$.

Каждой паре $(x, y)\in D$ соответствует на плоскости точка с координатами (x, y). Поэтому мы можем считать, что D – это множество на плоскости.

Графиком функции $z=f(x, y)$ называется множество точек в пространстве с координатами $(x, y, f(x, y))$. Обычно такой график выглядит как поверхность.

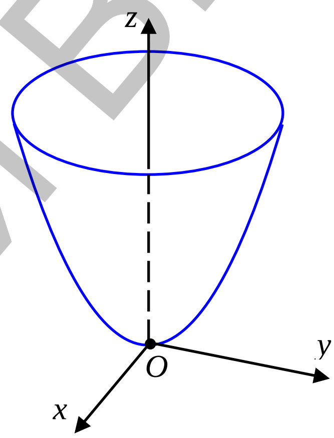


Рис. 5.1

Примеры. **1.** $Z=x^2+y^2$. Область определения – это вся плоскость с координатами (x, y). График функции изображен на рис. 5.1.

2. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Область определения задается неравенством $1-x^2-y^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq 1$. Это неравенство задает на плоскости круг радиуса 1 с центром в начале координат. График функции представляет собой полусферу радиуса 1 (рис. 5.2).

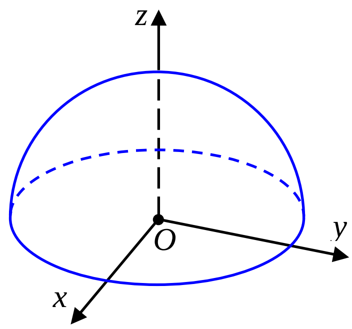


Рис. 5.2

3. Сила тока зависит от напряжения и сопротивления цепи: $I=U/R$, т.е. I есть функция двух переменных U и R.

4. Пусть x, y – стороны прямоугольника. Тогда его площадь является функцией от x и y: $S=xy$. График этой функции вы увидите в § 4.

Определение. Говорят, что последовательность точек $\{(x_k, y_k)\}$ или переменная точка (x_k, y_k) сходится к точке (x_o, y_o) при $k\to\infty$, если расстояние между этими точками стремится к нулю при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{(x_k-x_o)^2+(y_k-y_o)^2}=0.$$

Если стремится к нулю расстояние между точками, то стремится к нулю и его квадрат: $\lim\limits_{k\to\infty}((x_k-x_o)^2+(y_k-y_o)^2)=0$, а это означает, что каждая из скобок (x_k-x_o) и (y_k-y_o) стремится к нулю. Итак, получается, что переменная точка (x_k, y_k) сходится к точке (x_o, y_o) тогда и только тогда, когда одновременно

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_o \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}y_k=y_o.$$

Определение. Множество точек (рис. 5.3), для которых выполнено

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2<\varepsilon^2$$

представляет собой открытый круг на плоскости радиуса ε с центром в точке (x_o, y_o). Множество точек, для которых выполнено

$$|x-x_o|<\varepsilon,\ |y-y_o|<\varepsilon,$$

представляет собой открытый квадрат со стороной 2ε с центром в точке (x_o, y_o) (рис. 5.4). Любое из этих множеств будем называть ε-окрестностью или просто окрестностью точки (x_o, y_o).

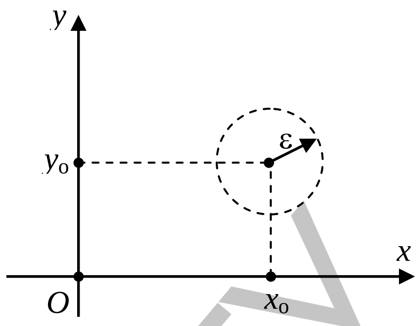


Рис. 5.3

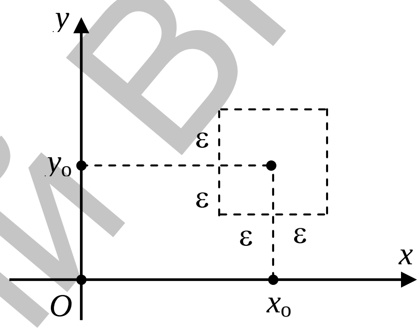


Рис. 5.4

Теперь определение предела последовательности точек можно сформулировать так.

Определение. Говорят, что $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k,\ y_k)=(x_o, y_o)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists$ такой номер N, что точка $(x_k,\ y_k)$ принадлежит ε-окрестности точки (x_o, y_o) при всех номерах $k>N$.

Определение. Говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке (x_o, y_o) предел равный A, если

1) она определена в некоторой окрестности точки (x_o, y_o), кроме, может быть, самой точки (x_o, y_o);

2) для любой последовательности (x_k, y_k), сходящейся к (x_o, y_o), выполнено $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k)=A$.

Пишем

$$\lim_{x\to x_o,\ y\to y_o} f(x, y)=A. \qquad (5.1)$$

Любую точку (x, y), близкую к точке (x_o, y_o), можно записать в виде $(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)$. Тогда равенство (5.1) равносильно

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0} f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)=A.$$

Второй пункт определения имеет еще равносильную формулировку: $\forall\varepsilon>0\ \exists$ такое число δ (зависящее от ε), что $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ выполнено для всех точек (x, y) из δ-окрестности точки (x_o, y_o).

Пример. $\lim\limits_{x\to 0,\ y\to 0}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$

§ 2. Непрерывная функция двух переменных. Понятие частной производной

Определение. Функция $z=f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* (x_o, y_o), если она определена в некоторой окрестности точки (x_o, y_o), в том числе и в самой точке (x_o, y_o) и $\lim\limits_{x\to x_o,\, y\to y_o} f(x, y)=f(x_o, y_o)$ (т.е. предел функции в точке (x_o, y_o) равен ее значению в этой точке).

Определение. *Приращением функции* $z=f(x, y)$ *в точке* (x_o, y_o) называется величина $\Delta f=f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)-f(x_o, y_o)$. *Приращением функции* $z=f(x,y)$ *в точке* (x_o, y_o) *по переменной* x называется величина $\Delta_x f=f(x_o+\Delta x, y_o)-f(x_o, y_o)$. *Приращением функции* $z=f(x,y)$ *в точке* (x_o, y_o) *по переменной* y называется величина $\Delta_y f=f(x_o, y_o+\Delta y)-f(x_o, y_o)$. Еще $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$ называют частными приращениями.

Определение. *Частной производной функции* $z=f(x,y)$ *в точке* (x_o, y_o) *по переменной* x называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}=0$, если он существует и конечный. Эта производная обозначается $f_x'(x_o, y_o)$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$.

Аналогично определяется *частная производная по переменной* y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}$.

Если функция определена на некоторой области D и имеет частные производные $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ во всех точках этой области, то эти производные можно рассматривать, как новые функции и рассматривать их частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Определение. Производные $\partial^2 f/\partial x^2$ и $\partial^2 f/\partial y^2$ называются *вторыми частными производными*, а $\partial^2 f/\partial x\partial y$ и $\partial^2 f/\partial y\partial x$ называются *смешанными производными*. Запись $\partial^2 f/\partial x^2$ читается так: «∂ квадрат f по ∂x дважды». Используются также обозначения $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}$.

Когда вычисляем частную производную по x, то рассматриваем y как постоянную величину. Когда вычисляем частную производную по y, то рассматриваем x как постоянную величину.

Примеры. **1.** $F(x,y)=\dfrac{x}{y}$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{x}{y^2};\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

2. $f(x,y)=x^2+\sin xy,\ f_x'=2x+y\cdot\cos xy,\ f_y'=x\cdot\cos xy,$

$f''_{xx}=2-y^2\cdot\sin xy,\ f''_{yy}=-x^2\cdot\sin xy,\ f''_{xy}=f''_{yx}=-xy\cdot\sin xy.$

Мы видели на примерах, что смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} совпадают. Оказывается, имеет место следующая теорема.

***Теорема* 5.1 (*о смешанных производных*).** *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и имеет частные и смешанные производные* $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$, $\partial^2 f/\partial y\partial x$ *в некоторой окрестности точки* (x_o, y_o), *причем* $\partial^2 f/\partial x\partial y$ *и* $\partial^2 f/\partial y\partial x$ *непрерывны в этой точке. Тогда* $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$, *т.е. результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

§ 3. Дифференциал функции двух переменных. Его применение для приближенных вычислений

***Теорема* 5.2.** *Пусть на некотором множестве* D *задана функция* $f(x, y)$, *имеющая в точке* (x_o, y_o) *непрерывные частные производные первого порядка. Тогда эти производные существуют и в некоторой окрестности* V *точки* (x_o, y_o). *Пусть* Δx *и* Δy *достаточно малы, так что точка* $(x_o+\Delta x,\ y_o+\Delta y)$ *не выходит за пределы указанной окрестности. Тогда приращение функции в точке* (x_o, y_o) *может быть представлено в виде:*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + o(\rho), \tag{5.2}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ *– это расстояние между точками* (x_o, y_o) *и* $(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)$.

Величины $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ не зависят от Δx и Δy. Поэтому в условиях теоремы приращение функции можно записать так:

$$\Delta f = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho). \tag{5.2′}$$

Определение. Если приращение функции в точке (x_o, y_o) можно представить в виде (5.2′) при достаточно малых Δx и Δy, где величины A и B не зависят от Δx и Δy, то функция называется *дифференцируемой в точке* (x_o, y_o). Выражение $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется *главной частью приращения функции* Δf или *дифференциалом функции* f. Дифференциал функции обозначаем df.

Согласно теореме 5.2, если $f(x, y)$ имеет в точке (x_o, y_o) непрерывные частные производные первого порядка, то она дифференцируема в этой точке.

Мы видели, что дифференциал функции одной переменной может служить для приближенных вычислений. Точно так же и для функции двух переменных имеет место приближенное равенство:

$$f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y) \approx f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y,$$

при достаточно малых Δx и Δy.

***Пример* 1.** Вычислить приближенно $3{,}02\cdot e^{0{,}05}$.

Рассматриваем функцию $z = x\cdot e^y$. Очевидно, что следует выбрать $x_o=3$, $\Delta x=0{,}02$, $y_o=0$, $\Delta y=0{,}05$. Тогда $z_o=3\cdot e^0=3$.

Находим частные производные: $z'_x=e^y$, $z'_y= x\cdot e^y$. Находим значения частных производных в выбранной нами точке: $z'_x(3,0)=e^0=1$, $z'_y(3,0)=$ $=3\cdot e^0=3$. Остается подставить найденные значения в формулу:

$$3{,}02\cdot e^{0{,}05}\approx z_o+z'_x\cdot\Delta x+z'_y\cdot\Delta y=3+1\cdot 0{,}02+3\cdot 0{,}05=3{,}17.$$

***Пример* 2.** Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}05)^3+(6{,}1)^2}$. Рассматриваем функцию $z=\sqrt{x^3+y^2}$. Выбираем $x_o=4$, $\Delta x=0{,}05$, $y_o=6$, $\Delta y=0{,}1$. Тогда $z_o=\sqrt{4^3+6^2}=10$. Находим частные производные и их значения в выбранной точке:

$$z'_x=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}};\ z'_x(4,6)=\frac{3\cdot 4^2}{2\cdot 10}=\frac{12}{5}=2{,}4;\ z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^3+y^2}};\ z'_y(4,6)=\frac{6}{10}=0{,}6.$$

Подставляем найденные значения в формулу:

$$\sqrt{(4{,}05)^3+(6{,}1)^2}\approx 10+2{,}4\cdot 0{,}05+0{,}6\cdot 0{,}1=10+0{,}12+0{,}06=10{,}18.$$

§ 4. Непрерывная функция двух переменных на замкнутом и ограниченном множестве

Определение. Множество на плоскости называется *ограниченным*, если его можно поместить в круг достаточно большого радиуса.

Множество, которое содержит свою границу, называется замкнутым. Но такое определение не является достаточно точным: оно носит описательный характер.

Определение. Точка (x_o, y_o) называется *предельной точкой множества* D, если существует последовательность точек $\{(x_k, y_k)\}$, содержащаяся в D, которая сходится к точке (x_o, y_o). Множество D называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Замкнутое ограниченное множество будем называть *компактным*.

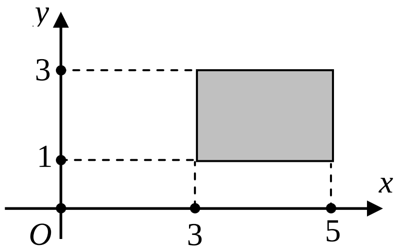


Рис. 5.5

***Примеры.* 1.** Прямоугольник на плоскости, который определяется неравенствами

$$\begin{cases} 2\le x\le 5,\\ 1\le y\le 3,\end{cases}$$

является компактным множеством (рис. 5.5). Если хотя бы одно неравенство будет строгим, то получится ограниченное, но не замкнутое множество.

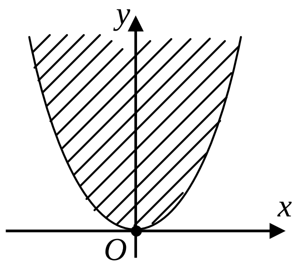


Рис. 5.6

2. Неравенство $y\ge x^2$ определяет замкнутое, но неограниченное множество (рис. 5.6).

Определение. Говорят, что функция $z=f(x, y)$ имеет в точке (x_o, y_o) *локальный максимум* (*минимум*), если существует окрестность U этой точки, в которой выполнено $f(x,y)\le f(x_o,y_o)$ $(f(x,y)\ge f(x_o,y_o))$ для всех $(x,y)\in U$. Локальные минимум и максимум объединяются понятием «*локальный экстремум*».

***Теорема* 5.3.** (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет в точке (x_o,y_o) локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$, то они обе равны нулю.*

Подчеркнем, что это условие не является достаточным. Из теоремы следует, что точки локального экстремума следует искать среди точек, где

а) хотя бы одна из производных $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ не существует;

б) обе производные $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ равны нулю.

Точки, в которых выполняется $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$, будем называть *стационарными*.

Примеры. **1.** $Z=x^2+y^2$. График этой функции мы приводили в § 1 (рис. 5.7).

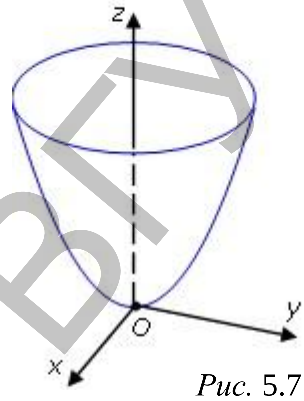


Рис. 5.7

$$\partial z/\partial x = 2x,\ \partial z/\partial y = 2y.$$

Равенство $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ выполняется только в точке (0,0). Очевидно, что эта точка является точкой минимума, т.к. $z(0,0)=0$, а для всех остальных точек $z(x,y)>0$.

2. $z=xy$. График этой функции имеет седлообразную форму (рис. 5.8).

$$\partial z/\partial x = y,\ \partial z/\partial y = x.$$

Равенство $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ выполняется только в точке (0,0). В этой точке нет экстремума, т.к. $z(0,0)=0$, и рядом с этой точкой есть точки, в которых $z(x,y)>0$ и точки, в которых $z(x,y)<0$.

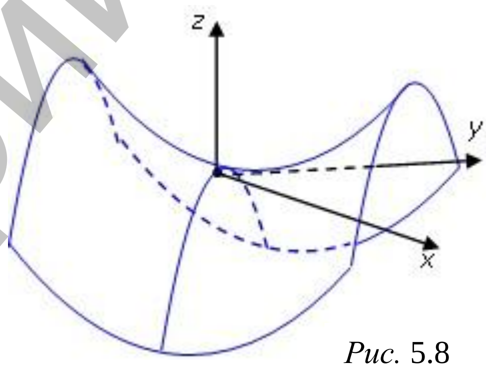


Рис. 5.8

***Теорема* 5.4.** *Если функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна на компактном множестве D, то она ограничена и достигает на этом множестве наибольшего и наименьшего значений.*

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на компактном множестве D, надо:

1) найти точки локального экстремума внутри области (как их искать, мы уже обсуждали выше);

2) найти точки локального экстремума на границе области;

3) вычислить значения функции во всех найденных точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Остается обсудить вопрос: как найти точки локального экстремума на границе. Если участок границы задан уравнением $y=\varphi(x)$, то функцию $z=f(x,y)$ на этом участке можно рассматривать как функцию одной переменной x: $z=f(x,\varphi(x))$. Мы можем найти ее локальные экстремумы с помощью производной. Если участок границы задан уравнением $x=\varphi(y)$, то функцию $z=f(x,y)$ на этом участке можно рассматривать как функцию одной переменной y: $z=f(\varphi(y),y)$. Между отдельными участками границы могут находиться угловые точки. Они также являются «подозрительными» на экстремум.

Примеры. **3.** Пусть область D – это замкнутый круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат (рис. 5.9). Он задается неравенством $x^2+y^2 \le 2$. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy$ в этой области.

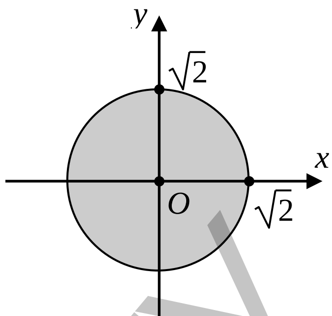


Рис. 5.9

Уже знаем (пример 2), что внутри локальных экстремумов нет. Будем искать их на границе. Граница задается уравнением $x^2+y^2=2$. Нам надо выразить одну переменную через другую. Для этого придется рассматривать границу по частям.

Верхняя часть границы задается уравнением $y=\sqrt{2-x^2}$. На этом участке данную функцию можно рассматривать, как функцию одной переменной: $z=x\sqrt{2-x^2}$. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$z'=x'\sqrt{2-x^2}+x(\sqrt{2-x^2})'=\sqrt{2-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\cdot(2-x^2)'=\sqrt{2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}=$$

$$=\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

$$z'=0 \;\Leftrightarrow\; 1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\, x_2=-1.$$

Подставляем найденные значения в уравнение нашего участка границы и находим $y_1=1, y_2=1$. Тем самым мы нашли две точки: $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

Нижняя часть границы задается уравнением $y=-\sqrt{2-x^2}$. На этом участке функцию z можно рассматривать, как функцию одной переменной: $z=-x\sqrt{2-x^2}$. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$z'=-\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}};\quad z'=0 \;\Leftrightarrow\; 1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\, x_2=-1.$$

Подставляем найденные значения в уравнение нашего участка границы и находим $y_1=-1, y_2=-1$. Мы нашли еще две точки: $C(1,–1)$, $E(–1,–1)$.

Рассматриваем теперь «угловые» точки. Два участка границы смыкаются в точках $F(\sqrt{2},0)$ и $G(-\sqrt{2},0)$.

Вычисляем значения функции во всех найденных точках:

$$z(1,1)=1,\; z(-1,1)=-1,\; z(1,-1)=-1,\; z(-1,-1)=1,\; z(\sqrt{2},0)=0,\; z(-\sqrt{2},0)=0.$$

Выбираем среди них наибольшее и наименьшее:

$$z_{max}=z(1,1)=z(-1,-1)=1,\; z_{min}=z(-1,1)=z(1,-1)=-1.$$

4. Область D ограничена координатными осями и прямой $y=8-x$ (рис. 5.10). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-xy+y^2-3y$ в этой области.

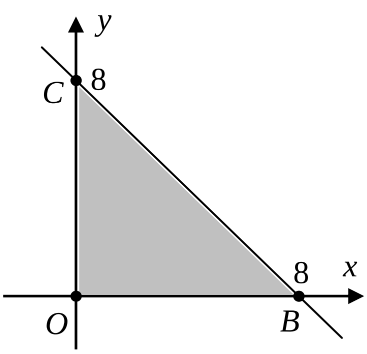


Рис. 5.10

Вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$z'_x = 2x - y; \quad z'_y = -x + 2y - 3.$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 2y = 3. \end{cases}$$

Решаем эту систему линейных уравнений и находим стационарную точку: $A(1; 2)$.

Граница области D состоит из трех линий. Первая – это отрезок OB, лежащий на оси Ox. Она задается уравнением $y = 0$, а отрезок на ней условием $x \in [0, 8]$. Подставляем $y = 0$ в нашу функцию: $z = x^2$. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$z' = 2x; \; 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Мы нашли точку $O(0, 0)$. Это угловая точка и ее будем рассматривать потом.

Вторая линия – это отрезок OC, лежащий на оси Oy, который задается уравнением $x = 0$, при условии $y \in [0, 8]$. Подставляя $x = 0$ в функцию $z = x^2 - xy + y^2 - 3y$, получим $z = y^2 - 3y$. Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$z' = 2y - 3; \; 2y - 3 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1{,}5.$$

Нашли точку $E(0; 1{,}5)$.

Третья линия – это отрезок CB. Он задается условиями $y = 8 - x$, $x \in [0, 8]$. Подставляем $y = 8 - x$ в данную функцию:

$$z = x^2 - x(8 - x) + (8 - x)^2 - 3(8 - x) = 3x^2 - 21x + 40. \qquad (*)$$

Находим производную и приравниваем ее к нулю:

$$z' = 6x - 21, \; 6x - 21 = 0, \; x = 3{,}5.$$

Подставляем $x = 3{,}5$ в уравнение линии и находим, что $y = 4{,}5$. Получаем точку $F(3{,}5; 4{,}5)$.

Итак, мы нашли следующие точки, подозрительные на экстремум: точку $A(1; 2)$ внутри области и две точки $E(0; 1{,}5)$, $F(3{,}5; 4{,}5)$ на границе. Необходимо еще рассмотреть угловые точки $O(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 8)$. Вычисляем значение функции во всех этих точках:

$z(1, 2) = 1^2 - 8 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot 2 = 1 - 16 + 4 - 6 = -17,$

$z(0; 1{,}5) = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}25 – 4{,}5 = -2{,}25$ (мы подставляли в $z = y^2 - 3y$),

$z(3{,}5; 4{,}5) = 3{,}5^2 - 21 \cdot 3{,}5 + 40 = -10{,}25$ (мы подставляли в формулу $(*)$)

$z(0, 0) = 0, \; z(8, 0) = 64, \; z(0, 8) = 40.$

Ответ: $z_{max} = z(8, 8) = 64, \; z_{min} = z(1, 2) = -17.$

Задания для решения на практических занятиях

1. Найти экстремумы (локальные) функции двух переменных.

А) $z = 2x^4 - x + y^2$; б) $z = x^3 + xy - y^2$; в) $z = xy^2 - x^2y^2 - xy^3$.

2. Найти частные производные первого порядка заданных функций.

А) $z = e^{x^2+y^2}$; б) $z = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$; в) $z = 2y\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в прямоугольной замкнутой области, ограниченной данными прямыми.

$$Z = x^2 + xy + 2y^2 - 3x - 5y + 1;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 3.$$

Задания для самостоятельного решения

Найти наибольшее и наименьшее значение функции в прямоугольной замкнутой области, ограниченной данными прямыми.

1. $z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{5y^2}{2} - 3x - 7y;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 2.$

2. $z = x^2 + 2xy + \dfrac{3y^2}{2} - y + 4;\ x = -2,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2.$

3. $z = x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} - x + 2;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = -2.$

4. $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 3;\ x = -3,\ x = 0,\ y = 1,\ y = -1.$

5. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x - 6y + 1;\ x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = -3.$

6. $z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{5y^2}{2} - 5x - 12y;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 3.$

7. $z = x^2 + 2xy + \dfrac{3y^2}{2} - 2x - 3y;\ x = -2,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2.$

8. $z = x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} - 3x - y - 5;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = -2.$

9. $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 8;\ x = -3,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2.$

10. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + y + 4;\ x = -3,\ x = 0,\ y = 0,\ y = -2.$

11. $z = x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 18y + 7;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 2.$

12. $z = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 10y + 5;\ x = -1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2.$

13. $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y + 2;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = -2.$

14. $z = 2x^2 - 2xy + y^2 + 10x - 6y + 9;\ x = -3,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2.$

15. $z = 4x^2 + xy + y^2 - 6x + 3y + 8;\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = -3.$

Г Л А В А 6. **ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

§ 1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Мы научались искать производную $f'(x)$, если дана функция $f(x)$. Надо научиться решать обратную задачу: знаем функцию $f'(x)$, требуется найти $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$ для всех x из интервала (a,b).

Знаем, что производная постоянной величины равна нулю: $C'=0$. Значит, если $F'(x)=f(x)$, то

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x).$$

Таким образом, первообразная для данной функции $f(x)$ определяется неоднозначно: если $F(x)$ – первообразная, то $F(x)+C$ – тоже первообразная. Обратно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то они отличаются одна от другой на постоянную величину: $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Примеры. **1.** $(x^3)'=3x^2 \Rightarrow \left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$. Значит, функция $y=\dfrac{x^3}{3}$ – это первообразная для функции $y=x^2$. При этом, функции $y=\dfrac{x^3}{3}-1$ и $y=\dfrac{x^3}{3}+2$ тоже будут первообразными для функции $y=x^2$.

2. $(\sin 2x)'=2\cos 2x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)'=\cos 2x$. Значит, функция $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ является одной из первообразных для функции $y=\cos 2x$.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Тогда $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*. Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\ C=\text{const}.$$

Согласно определению дифференциала $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$. Таким образом, подынтегральное выражение – это дифференциал от первообразной.

***Теорема* 6.1.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то у нее существует первообразная на этом интервале.*

§ 2. Таблица интегралов. Правила интегрирования

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0dx = C$, $\int a\cdot dx = ax + C$, $a = \text{const}$;

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;

3. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$;

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

6. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$, $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases}$ $x \in (-1, 1)$;

8. $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, Dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

9. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$;

    $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$; $|x| > 1$;

11. $\int \dfrac{1}{1-x^2}\, Dx = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Правила интегрирования

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, $a = \text{const}$ (постоянный множитель выносится за знак интеграла);
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a} F(ax+b)$.

Пример. $\int (\cos(2x+5) + 3\sin x)dx = \dfrac{1}{2}\sin(2x+5) - 3\cos x + C$.

§ 3. Методы интегрирования

8. ***Замена переменных*** (***подстановка***)

Если $f(x)$ – непрерывная функция, а $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то можем в интеграле сделать замену $x=\varphi(t)$.

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

На практике чаще всего происходит обратная замена:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\{\ u=\varphi(x)\ \}=\int f(u)du.$$

Примеры. **1.** Найти $\int xe^{x^2}dx$.

Решение. Видим под интегралом сложную функцию $y=e^u$, $u=x^2$. Поэтому сама собой напрашивается замена $u=x^2$, тем более что производная от функции $u=x^2$ есть $u'=2x$.

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}(2xdx)=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=e^{x^2}+C.$$

Более подробно замена записывается так:

$$\int xe^{x^2}dx=\left\{\begin{aligned} &u=x^2,\\ &du=2xdx\\ &dx=\frac{du}{2x}\end{aligned}\right\}=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

2. Найти $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

Решение. В таблице есть интеграл $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Поэтому желательно с помощью замены переменной превратить подынтегральное выражение $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ в $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right)=\left\{\ u=\frac{x}{a}\ \right\}=\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=$$

$$=\arcsin u+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3. Найти $\int\frac{1}{a^2+x^2}Dx$.

Решение. Среди табличных есть интеграл $\int\frac{1}{1+x^2}Dx$. Хотим выражение $\frac{1}{a^2+x^2}$ Преобразовать в выражение $\frac{1}{1+u^2}$.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,Dx=\int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\,d\left(\frac{x}{a}\right)=\left\{\,u=\frac{x}{a}\,\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,Du=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}u+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Итак, доказали, что

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,Dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C. \tag{6.1}$$

Точно так же доказывается, что

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C;\ |x|>a. \tag{6.2}$$

Все эти интегралы также отнесем к табличным интегралам.

II. ***Формула интегрирования по частям***

Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Согласно правилам вычисления производной $(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Отсюда $u\cdot v'=(uv)'-u'\cdot v$. Применим к обеим частям равенства интегрирование:

$$\int u\cdot v'dx=\int (uv)'\,dx-\int u'\cdot v\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int u\cdot v'dx=uv-\int u'\cdot v\,dx. \tag{6.3}$$

или

$$\int u\cdot dv=uv-\int v\,du. \tag{6.3$'$}$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Она чаще всего используется в тех случаях, когда выражение $v\cdot u'$ интегрируется проще, чем выражение $u\cdot v'$. Например, если $u=ax+b$, то $u'=a$, если $u=\ln x$, то $u'=1/x$.

Примеры. **1.** Найти $\int x\cdot e^x\,dx$.

Решение. Знаем из таблицы интегралов, что $\int e^x\,dx=e^x+C$. Нам мешает множитель x. Если его продифференцировать, то получим единицу. Поэтому обозначаем $u=x$, $v'=e^x$. Тогда $u'=1$, $v=e^x$. Применяем формулу (6.3):

$$\int x\cdot e^x\,dx=x\cdot e^x-\int e^x\cdot 1\,dx=x\cdot e^x-e^x+C=(x-1)e^x+C.$$

2. Найти $\int x\cdot \ln x\,dx$.

Решение. Среди табличных нет интеграла от функции $\ln x$. Поэтому в данном случае нам необходимо продифференцировать не множитель x, а множитель $\ln x$.

$$\int x\cdot\ln x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x,\ v'=x \\ u'=\frac{1}{x},\ v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\int x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

§ 4. *Интегрирование рациональных выражений*

Рассмотрим только интегрирование выражений вида:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \tag{6.4}$$

$$\frac{x^2+bx+c}{x^2+px+q}. \tag{6.5}$$

Если перед слагаемым x^2 (в числителе или знаменателе) стоит множитель, то этот множитель можно вынести за знак интеграла. Например,

$$\int\frac{2x^2+5x-6}{3x^2+6x+9}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{x^2+2{,}5x-3}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Именно поэтому мы рассматриваем только интегрирование дробей вида (6.5), где перед x^2 стоит единица. Преобразуем эту дробь. В числителе добавим $px+q$ и отнимем это же выражение:

$$\frac{x^2+bx+c}{x^2+px+q}=\frac{x^2+px+q-px-q+bx+c}{x^2+px+q}=1+\frac{(b-p)x+c-q}{x^2+px+q}=1+\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

где $A=b-p$, $B=c-q$. Таким образом, интегрирование дроби (6.5) сводится к интегрированию дроби вида (6.4).

Пример **1.** $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2-4x+3+4x-3+5x+4}{x^2-4x+3}=1+\dfrac{9x+1}{x^2-4x+3}.$

В числителе дроби мы добавляем $-4x+3$, а значит, следует это же выражение вычесть, т.е. прибавить $4x-3$.

1 ***случай.*** Дискриминант уравнения $x^2+px+q=0$ больше нуля. Тогда знаменатель мы можем разложить на множители:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 – решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Тогда дробь (6.4) можно представить в виде суммы двух дробей с помощью метода неопределенных коэффициентов:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{a}{x-x_1}+\frac{b}{x-x_2}.$$

Требуется определить a и b.

***Пример* 2.** $\dfrac{5x-11}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{5x-11}{x^2-5x+6}=\dfrac{a(x-2)+b(x-3)}{(x-3)(x-2)}$.

Знаменатели равны, значит должны быть равны числители:

$$5x-11=a(x-2)+b(x-3) \Leftrightarrow 5x-11=(a+b)x+(-2a-3b).$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a и b:

$$\begin{cases} a+b=5, \\ -2a-3b=-11. \end{cases}$$

Методы решения таких систем мы проходили в главе «Высшая алгебра». Поэтому приводим сразу ответ: $a=4$, $b=1$. Итак,

$$\int \frac{5x-11}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{4}{x-3}dx+\int \frac{1}{x-2}\,dx=4\ln|x-3|+\ln|x-2|+C=\ln\frac{(x-3)^4}{|x-2|}+C.$$

***Пример* 4.** Хотим вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,Dx$. Раскладываем знаменатель на множители: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. Представляем подынтегральную функцию в виде суммы двух дробей с неопределенными коэффициентами.

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a}=\frac{A(x-a)+B(x+a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{(A+B)x+a(B-A)}{(x-a)(x+a)}.$$

Для нахождения коэффициентов получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ a(B-A)=1. \end{cases}$$

Отсюда $A=-\dfrac{1}{2a}$, $B=\dfrac{1}{2a}$.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,Dx=-\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx+\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2a}\ln|x+a|+\frac{1}{2a}\ln|x-a|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C. \quad (6.6)$$

Этот интеграл тоже отнесем к табличным.

2 *случай*. Дискриминант уравнения $x^2+px+q=0$ равен нулю. Тогда знаменатель является полным квадратом: $x^2+px+q=(x-c)^2$. В этом случае дробь (6.4) можно представить в виде суммы двух дробей:

$$\frac{Ax+B}{(x-c)^2}=\frac{A(x-c)+Ac+B}{(x-c)^2}=\frac{A}{x-c}+\frac{Ac+B}{(x-c)^2}.$$

В числителе вычли Ac, и добавили это же число. Кому-то, возможно, более понятным будет разложение дроби в сумму двух дробей с неопределенными коэффициентами a и b:

$$\frac{Ax+B}{(x-c)^2}=\frac{a}{x-c}+\frac{b}{(x-c)^2}.$$

Эти коэффициенты находятся потом так же, как и в примере 1. Особенность данной ситуации в том, что мы заранее знаем, что $A=a$. Для вычисления интегралов достаточно знать правило интегрирования № 5 и интегралы № 2 и № 3 из таблицы интегралов.

***Пример* 4.** $X^2-6x+9=(x-3)^2$, поэтому

$$\int\frac{4x-5}{x^2-6x+9}\,dx=\int\frac{4}{x-3}\,dx+\int\frac{4\cdot 3-5}{(x-3)^2}\,Dx=4\ln|x-3|+7\int(x-3)^{-2}dx=$$

$$=4\ln|x-3|+7\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+C=4\ln|x-3|-\frac{7}{x-3}+C.$$

3 *случай.* Дискриминант уравнения $x^2+px+q=0$ меньше нуля. Тогда знаменатель можно преобразовать следующим образом:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=(x+b)^2+a^2.$$

Здесь мы обозначили $b=p/2$ и $a^2=q-b^2$, потому что при отрицательном дискриминанте это выражение строго больше нуля. Тогда дробь (6.5) можно представить в виде суммы двух дробей:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{A(x+b)+B-Ab}{(x+b)^2+a^2}=\frac{A(x+b)}{(x+b)^2+a^2}+\frac{B-Ab}{(x+b)^2+a^2}.$$

Первая дробь интегрируется с помощью замены $u=(x+b)^2+a^2$, $du=2(x+b)dx$. Для вычисления интеграла от второй дроби достаточно знать правило интегрирования № 5 и интеграл (6.1) из § 3.

***Пример* 5.**

$$\int\frac{4x+9}{x^2+12x+40}\,dx=\int\frac{4x+9}{x^2+12x+36+4}\,dx=\int\frac{4x+9}{(x+6)^2+4}\,dx=\int\frac{4(x+6)+9-4\cdot 6}{(x+6)^2+4}\,dx=$$

$$=\int\frac{4(x+6)}{(x+6)^2+4}\,dx-\int\frac{15}{(x+6)^2+4}\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=(x+6)^2+4\\ du=2(x+6)dx\end{array}\right\}=$$

$$=2\int\frac{du}{u}-15\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{(x+6)}{4}+C=$$

$$=2\ln(x^2+12x+40)-\frac{15}{4}\operatorname{arctg}\frac{(x+6)}{4}+C.$$

§ 5. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x)\geq 0$. Пусть V – это фигура, ограниченная осью Ox, прямыми $x=a$, $x=b$ и графиком функции (рис. 6.1). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками

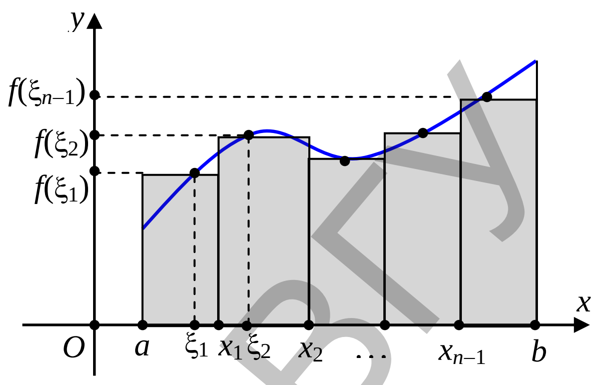


Рис. 6.1

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Длина i-го отрезка равна $\Delta_i=x_i-x_{i-1}$. На каждом из отрезков выберем точку $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$. Тогда произведение $f(\xi_i)\Delta_i$ равно площади прямоугольника, построенного на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (см. рис.). Составим сумму

$$S_n=\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta_i. \qquad (6.7)$$

Она равна сумме площадей всех прямоугольников, изображенных на рисунке, т.е. равна площади заштрихованной фигуры. Обозначим $\delta=\max\limits_{i=1,\ldots,n}\Delta_i$ – длина самого большого из отрезков. Будем измельчать разбиение отрезка $[a, b]$ так, чтобы δ стремилось к нулю. Если при этом S_n стремится к определенному пределу S независимо от способа разбиения и от выбора точек ξ_i, то этот предел S называется <u>*площадью криволинейной трапеции*</u> V.

Напомним, что мы рассматривали только случай, когда $f(x)$ непрерывна и $f(x)\geq 0$. Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Точно так же составим для нее сумму (6.7).

Определение. Сумма (6.7) называется <u>*интегральной суммой*</u> для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если существует предел $\lim\limits_{\delta\to 0} S_n$ (независящий от способа разбиения и от выбора точек ξ_i,), то он называется <u>*определенным интегралом*</u> от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6.8)$$

Если этот интеграл существует, то функция называется <u>*интегрируемой на отрезке*</u> $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно <u>*нижним и верхним пределами интегрирования*</u>.

***Теорема* 6.2.** *Если функция непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то она интегрируема на этом отрезке.*

***Теорема* 6.3.** (Формула Ньютона-Лейбница). *Если* $F(x)$ *– первообразная функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (6.9)$$

Примеры применения этой формулы будут рассмотрены в параграфах 8 и 9. Принято обозначение

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Мы определили интеграл (6.7), в предположении, что $a < b$. Если $a > b$, то будем понимать интеграл так, чтобы была верна формула Ньютона-Лейбница, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

§ 6. Свойства определенного интеграла

1. Если $C = \text{const}$, то $\int_a^b C\,dx = C(b-a)$ (интеграл от постоянной величины равен произведению этой величины на разность пределов).

2. Если функция интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(*аддитивность интеграла*).

3. Постоянный множитель выносится за знак интеграла:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Интеграл от суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов:

$$\int_a^b (f(x) \pm \mathrm{g}(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx.$$

5. Если функции $f(x)$ и $\mathrm{g}(x)$ обе интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \le \mathrm{g}(x)$ на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx.$$

6. Если $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $f(x)$ тоже интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7. (*Теорема о среднем*). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

8. Переменную под знаком определенного интеграла можно переобозначить любой другой буквой, т.е. записи $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b f(u)\,du$ означают одно и то же.

§ 7. Неопределенный интеграл, как функция верхнего предела

В качестве любого из пределов в определенном интеграле может стоять не число, а переменная величина.

***Теорема* 6.4.** $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(u)\,du + C$, *т.е.* $\int_a^x f(u)\,du$ *есть первообразная для функции* $f(x)$.

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$; при этом, $F(a)$ – это постоянная величина. Значит, $F(x) - F(a)$ – это тоже первообразная. ■

§ 8. Несобственный интеграл

Мы определили в (6.8)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

с предположением, что функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$, а $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$. Тогда интеграл (6.8) в обычном смысле не существует.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема на любом из отрезков $[a, b']$, где $a < b' < b$. Тогда определим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx, \qquad (6.10)$$

если такой предел существует и является конечным. Тогда говорят, что интеграл (6.8) *сходится*. Если предел (6.8) не существует или равен $\pm\infty$, то говорят, что *интеграл расходится*. Этот интеграл еще называют *несобственным интегралом второго рода*.

Можно также записать, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Определение. Пусть $f(x)$ задана на бесконечном полуинтервале $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b]$, $b>a$. Определим

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{6.11}$$

если такой предел существует и является конечным. Тогда говорят, что $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если предел (6.11) не существует или он равен $\pm\infty$, то говорят, что *интеграл* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *расходится*. Этот интеграл еще называют *несобственным интегралом первого рода*.

Упражнение. Самостоятельно дайте определение, что означает интеграл (6.8), в том случае, когда функция $f(x)$ не определена в точке $x=a$. Также дайте определение интеграла $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

***Пример* 1.** а) Вычислить интеграл $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ (несобственный интеграл 1 рода) или доказать его расходимость.

Решение. $\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^b x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b = \left.-\frac{1}{x}\right|_1^b = -\frac{1}{b}+\frac{1}{1} = 1-\frac{1}{b}$.

Значит, $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1-0 = 1$.

Геометрически это означает, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{x^2}$, осью Ox и прямой $x=1$ (рис. 6.2) равна 1.

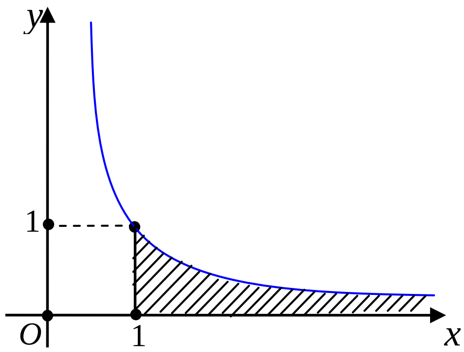


Рис. 6.2

б) Аналогично,

$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\ln x\,\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}(\ln b - 0) = +\infty$. Интеграл расходится.

***Пример* 2.** Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Это несобственный интеграл 2-го рода, т.к. подынтегральное выражение стремится к $+\infty$, если $x \to 1$.

Решение. $\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\varepsilon} = \arcsin\varepsilon - \arcsin 0 = \arcsin\varepsilon - 0,$

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 1}(\arcsin\varepsilon) = \pi .$$

§ 9. Применения определенного интеграла

I. *Вычисление площади криволинейной трапеции*

Пусть криволинейная трапеция ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ и графиками функций $y=f(x)$, $y=g(x)$, причем $f(x) \geq g(x)$ (рис. 6.3). Тогда ее площадь вычисляется по формуле:

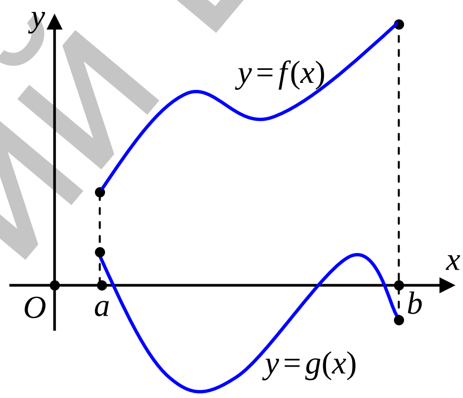


Рис. 6.3

$$S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

***Пример* 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+12x-27$ и прямой $y=9-x$. Сделать чертеж.

Решение. Найдем точки пересечения этих линий. Приравниваем правые части:

$$-x^2+12x-27=9-x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-13x+36=0.$$

Отсюда находим абсциссы точек пересечения:

$$x_1=4,\ x_2=9.$$

Для того чтобы найти ординаты точек пересечения, мы можем подставить x_1 и x_2 в любое из данных уравнений. Безусловно, проще во второе:

$$y_1=9-x_1=9-4=5,\ y_2=9-x_2=9-9=0.$$

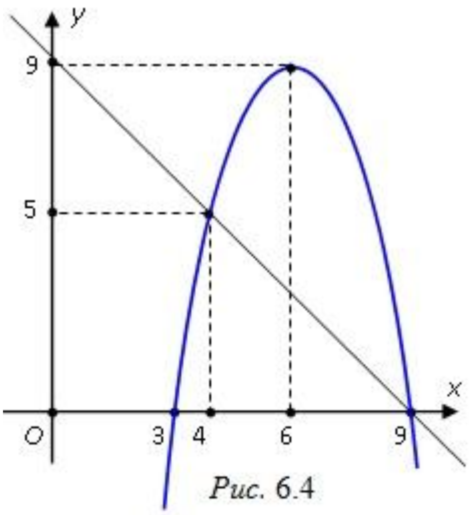


Рис. 6.4

Строим графики. Прямая проходит через найденные точки $(4, 5)$ и $(9, 0)$ (рис. 6.4). Парабола тоже проходит через эти точки, но для более точного ее построения найдем еще вершину параболы. Если парабола задана уравнением $y=ax+by+c$, то ее вершина имеет абсциссу $x_o=-\frac{b}{2a}$. В нашем случае

$$a=-1,\ b=12,\ x_{о}=-\frac{12}{-2}=6.$$

Подставляем это значение в уравнение параболы и находим ординату вершины: $y_{о}=9$. Мы видим, что пределы интегрирования будут 4 и 9, при этом график функции $y=-x^2+12x-27$ расположен выше, чем график функции $y=9-x$. Поэтому площадь фигуры равна

$$S=\int_4^9(-x^2+12x-27-(9-x))\,dx=\int_4^9(-x^2+13x-36)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+13\frac{x^2}{2}-36x\right)\Bigg|_4^9.$$

Напомним, что вертикальная черта означает подстановку: мы должны подставить верхний предел в наше выражение и вычесть выражение, в которое подставлен нижний предел.

$$S=\left(-\frac{9^3}{3}+13\cdot\frac{9^2}{2}-36\cdot 9\right)-\left(-\frac{4^3}{3}+13\cdot\frac{4^2}{2}-36\cdot 4\right)=$$
$$=(-243+13\cdot 40{,}5-324)-\left(-\frac{64}{3}+13\cdot 8-144\right)=-27{,}5+48\frac{1}{3}=20\frac{5}{6}.$$

При решении индивидуального задания можно воспользоваться калькулятором.

***Пример* 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos\frac{x}{2}$ и координатными осями в первой четверти.

Решение. Сделаем чертеж. Ось Ox задается уравнением $y=0$, поэтому точку пересечения графика с осью Ox находим из уравнения $\cos\frac{x}{2}=0$. Ближайшие к началу координат решения:

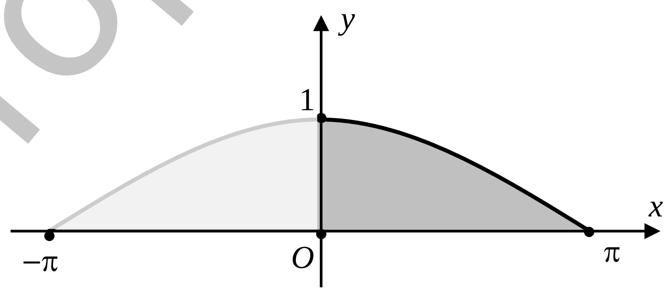


*Рис.*6.5

$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\pi$. При $x=0$ находим $y=\cos 0=1$. Таким образом, график пересекает Oy в точке $(0, 1)$. По условию нам требуется найти площадь фигуры, расположенной в I четверти (рис. 6.5). Поэтому пределы интегрирования будут от 0 до π.

$$S=\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx=2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi}=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=2(1-0)=2.$$

II. *Объем тела вращения и площадь его поверхности.*

Пусть в плоскости xOy дан график функции $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Будем вращать его вокруг оси Ox. Получится некоторая поверхность вращения Ф, которая ограничивает тело W (рис. 6.6). Тогда его объем и площадь боковой поверхности вычисляются соответственно по формулам:

$$V(W)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,\quad S(\Phi)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

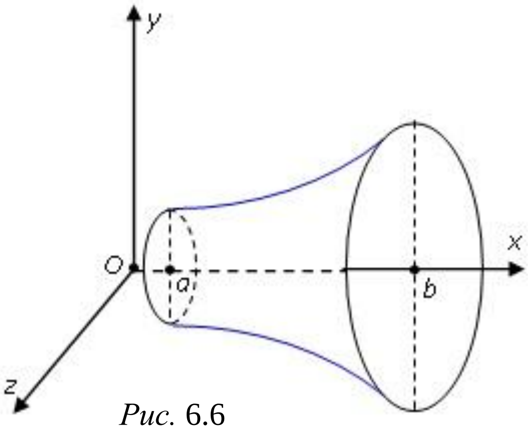


Рис. 6.6

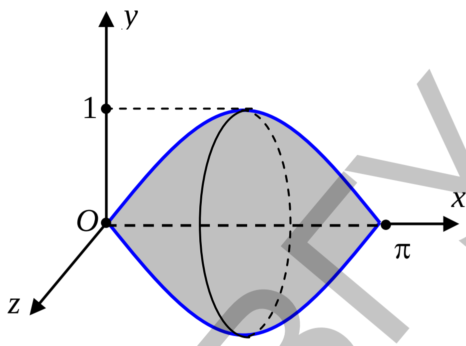


Рис. 6.7

***Пример* 1.** График функции $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ вращается вокруг оси Ox. Найти объем получившейся фигуры вращения (рис. 6.7).

Решение.

$$V(W)=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi 1\,dx+\int_0^\pi \cos 2x\,dx\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi+\frac{1}{2}\sin 2x\,\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi}{2}\left(\pi+\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

***Пример* 2.** График функции $y=\mathrm{ch}\,x,\ 0\le x\le 1$ вращается вокруг оси Ox. Найти площадь боковой поверхности получившейся фигуры вращения.

Решение. Выясним сначала, как понизить степень в выражении $\mathrm{ch}^2 x$. Согласно определению,

$$\mathrm{ch}^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}+1\right)=\frac{\mathrm{ch}2x+1}{2}.$$

Площадь боковой поверхности:

$$S(\Phi)=2\pi\int_0^1 \mathrm{ch}\,x\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 x}\,dx=2\pi\int_0^1 \mathrm{ch}\,x\sqrt{\mathrm{ch}^2 x}\,dx=2\pi\int_0^1 \mathrm{ch}^2 x\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}2x+1}{2}\,dx=\pi\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}2x+x\right)\Big|_0^1=\pi\left(\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2+1\right)-\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,0-0\right)\right)=\frac{\pi(\mathrm{sh}\,2+2)}{2}.$$

III. ***Длина дуги***

Пусть точка движется в пространстве. Тогда ее координаты изменяются со временем:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Такие уравнения называются параметрическими уравнениями кривой. Длина пути, пройденного точкой (длина дуги кривой) за промежуток времени от $t=a$ до $t=b$, вычисляется по формуле:

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dx.$$

Если точка движется по плоскости, то в параметрических уравнениях кривой будет только две координаты: x и y. Соответственно, в последней формуле под корнем будет только два слагаемых.

Если кривая на плоскости задана уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$, то ее длина вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Пример. Точка вращается вокруг оси Oz, находясь от нее на постоянном расстоянии $a > 0$ и одновременно поднимается вверх вдоль Oz с постоянной скоростью $b > 0$. Тогда она описывает винтовую линию, которая задается уравнениями:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$

Найти длину одного витка $(t \in [0,\ 2\pi])$ этой линии (рис. 6.8).

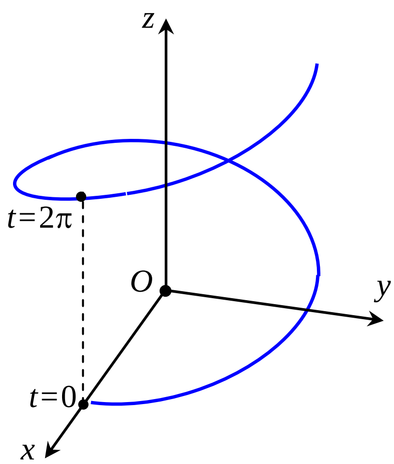


Рис. 6.8

Решение. Найдем сначала производные и упростим подынтегральное выражение:

$$\begin{cases} x' = a\sin t, \\ y' = a\cos t, \\ z' = b. \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Получилось постоянное число. Напомним, что определенный интеграл от постоянной величины равен произведению этого числа на разность пределов:

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dx = (2\pi - 0)\sqrt{a^2 + b^2} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

§ 10. Замена переменной в определенном интеграле

***Теорема* 6.4.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(u)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$, при этом $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Примеры.

1. $$\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} u=x^2+1,\ du=2x\,dx \\ x\,dx=\dfrac{du}{2} \\ x=1,\ u=2 \\ x=0,\ u=1 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2. $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=\sin u,\ dx=\cos u\,du \\ x=1,\ u=\dfrac{\pi}{2} \\ x=0,\ u=0 \end{array}\right\} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,du = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}du = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Следует заметить, что $\sqrt{1-\sin^2 u} = |\cos u|$, но на участке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ выполнено $\cos u \ge 0$; именно поэтому мы модуль опустили.

Задания для решения на практических занятиях

1. Найти следующие неопределенные интегралы путем непосредственного интегрирования.

а) $\int (x^2+9)dx$; б) $\int(\cos 3x - 3\sin 2x)dx$; в) $\int \frac{x+4}{x^2}dx$; г) $\int(e^{2x}+e^{-4x})dx$.

2. Найти следующие неопределенные интегралы с помощью замены переменной.

а) $\int\sqrt{x+4}dx$; б) $\int xe^{x^2}dx$; в) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$; г) $\int \cos x\cdot\sin^5 x\,dx$.

3. Найти неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

а) $\int x\cdot\cos x\,dx$; б) $\int \ln x\,dx$; в) $\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$.

4. Вычислить следующие интегралы рациональных выражений.

а) $\int \frac{9x-9}{x^2-3x-18}dx$; б) $\int \frac{x-2}{x^2-10x+25}dx$.

5. В момент времени $t=0$ автомобиль начинает движение со скоростью $v=3\sqrt{t}$ м/с. Найти расстояние, которое он проедет за 16 секунд.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями.

а) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$; б) $y=\frac{1}{4}x^2$, $x=0$, $y=x$;

в) $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

7. Вычислить длину кривой $y=x^{3/2}$ между точками $x_0=0$, $x_1=4$.

8. Фигура, ограниченная линиями $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$, вращается вокруг оси *Ox*. Вычислить объем полученного тела вращения и полную площадь его поверхности.

Задания для самостоятельного решения

***Задача* 1.** *Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой и прямой. Сделать чертеж.*

1. $\begin{cases} y=-x^2+4x+2, \\ y=6-x. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y=-x^2+12x-27, \\ y=x+1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y=-x^2+4x+2, \\ y=x-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y=-x^2+10x-16, \\ y=8-x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y=x^2-2x-2, \\ y=-2x+2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} y=-x^2+10x-16, \\ y=x+2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y=x^2-2x-2, \\ y=x+2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y=-x^2+10x-18, \\ y=6-x. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y=x^2-2x-2, \\ y=2x-2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y=-x^2+10x-18, \\ y=x. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y=x^2-4x-3, \\ y=-2x. \end{cases}$

12. $\begin{cases} y=-x^2+8x-10, \\ y=8-x. \end{cases}$

13. $\begin{cases} y=x^2-4x-3, \\ y=2x-8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y=-x^2+8x-10, \\ y=x-4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y=x^2-4x-3, \\ y=x-3. \end{cases}$

***Задача* 2.** *Вычислить длину дуги кривой.*

1. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \ t\in[0,\pi]. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{1}{4}(1-\cos t), \ \ t\in[0,\pi]. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^3/3 - t, \ \ t\in[0,1]. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \ \ t\in[0,1]. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t, \ t\in[0,\pi/2]. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 2t^3, \ \ t\in[0,1]. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} - t, \\ y = \dfrac{4}{3}t^{3/2}, \ \ t\in[0,1]. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = 4\sqrt{t}, \ \ t\in[1,2]. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{2}{3}t^{3/2}, \ \ t\in[0,1] \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = \operatorname{sh} t, \\ z = 1 + \operatorname{ch} t, \quad t\in[0,1]. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \sqrt{2}(t-1), \\ z = e^{-t}, \quad t\in[0,1]. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = t + \dfrac{2}{t}, \\ y = 2t + 1, \\ z = t - \dfrac{2}{t}, \quad t\in[1,2]. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \dfrac{3}{t}, \\ y = \sqrt{6}\ln t, \\ z = t - 9, \quad t\in[1,3]. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2 + \ln t, \\ y = \sqrt{2}(t-1), \\ z = \dfrac{t^2}{2}, \ \ t\in[1,2]\ . \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 8\cos\dfrac{t}{2}, \ \ t\in[0,\pi]. \end{cases}$

Замечание. При решении задач 2 и 15 следует применить в процессе вычислений формулу $1-\cos t = 2\sin^2\dfrac{t}{2}$.

Г Л А В А 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные определения

Пусть функция $y=f(x)$ отражает зависимость между двумя физическими величинами. Часто мы не можем непосредственно установить эту связь между x и y, но можем найти связь между величинами x, y и производными $y', y'',\ldots, y^{(n)}$:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0. \tag{7.1}$$

Определение. Уравнение (7.1) называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (д.у.) *n-го порядка*. *Проинтегрировать д.у.* – означает найти связь между независимой переменной x и зависимой переменной y.

Примеры задач из области естествознания, которые приводят к дифференциальным уравнениям, будут рассмотрены в параграфе 10.

Определение. *Решением* д.у. называется любая функция $y=f(x)$, которая определена при тех же значениях переменной x, что и функция F, и при подстановке которой в уравнение, оно превращается в верное равенство.

Д.у. первого порядка имеет вид:

$$F(x,y,y')=0.$$

Если удается разрешить его относительно производной, то это уравнение принимает вид:

$$y'=\varphi(x,y). \tag{7.2}$$

При этом, функция $\varphi(x,y)$ может быть определена не на всей плоскости, а лишь в некоторой ее области D.

Примеры. **1.** Д.у. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ определено на полуплоскости $x>0$. Его решением является функция $y=\sqrt{x}+C$ при любом значении постоянной C.

2. Д.у. $y'=2y$ определено на всей плоскости. Его решением является функция $y=Ce^{2x}$ при любом значении постоянной C.

3. Д.у. $x\cdot y'=y$ определено на всей плоскости. Его решением является функция $y=Cx$ при любом значении постоянной C.

Мы видим на примерах, что решение д.у. первого порядка зависит от одной произвольной постоянной. При каждом фиксированном значении постоянной решение $y=f(x)$ задает кривую на плоскости, которая называется *интегральной кривой* для д.у. При изменении постоянной величины C мы получаем семейство интегральных кривых. На рис. 7.1 и 7.2 изображены семейства интегральных кривых для д.у. из примеров 1 и 3.

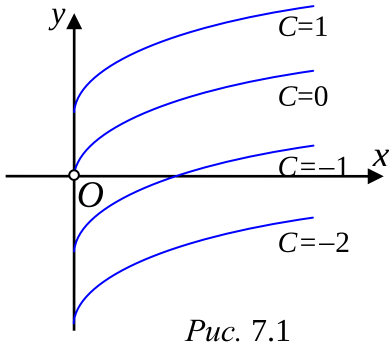


Рис. 7.1

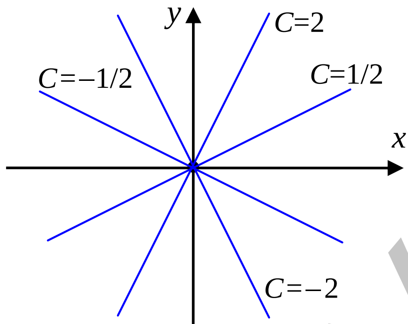


Рис. 7.2

Видим, что через каждую точку области D проходит одна и только одна интегральная кривая для д.у. Но есть исключение: через точку $(0, 0)$ проходит бесконечное количество интегральных кривых для д.у. $x\cdot y'=y$. Можно сделать следующий вывод. Для того, чтобы решение д.у. было единственным, надо задать начальную точку (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая, т.е. задать *начальное условие* $y(x_0)=y_0$ (но есть исключительные случаи). Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения для д.у. (7.2).

Теорема 7.1. *Пусть в уравнении $y'=\varphi(x,y)$ функция $\varphi(x,y)$ и ее частные производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ непрерывны в некоторой замкнутой области D на плоскости, а точка (x_0, y_0) принадлежит этой области. Тогда существует и притом единственное решение данного уравнения $y=y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.*

Мы видели, что решение д.у. первого порядка зависит от произвольной постоянной величины C. Такое решение называется общим решением. Дадим более точное определение.

Определение. *Общим решением* д.у. первого порядка называется функция $y=f(x, C)$, которая зависит от одной постоянной C, и удовлетворяет следующим условиям:

а) при любом фиксированном значении C она удовлетворяет д.у.;

б) каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$, можно найти такое значение C_0, что функция $y=f(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Тогда функция $y=f(x, C_0)$ называется *частным решением*.

В процессе отыскания общего решения нередко приходят к соотношению вида $\Phi(x, y, C)=0$, неразрешенному относительно y. Такое соотношение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Если постоянной придать конкретное значение C_0, то получим *частный интеграл*.

Пример 1′. Найти решение д.у. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=3$.

Решение. Имеем общее решение: $y=\sqrt{x}+C$. Подставляем в него начальные данные: $3=\sqrt{1}+C$. Находим $C=2$.

Ответ: $y=\sqrt{x}+2$.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Д.у. первого порядка, которое имеет вид:

$$y'=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y) \tag{7.3}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Уравнение (7.3) можно решить следующим образом. Заменяем y' другим обозначением производной:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y).$$

Затем множитель, который содержит y, переносим влево, а dx переносим вправо. Разделили x и y: теперь они содержатся в разных частях равенства. К каждой части получившегося равенства применяем интеграл.

$$\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\varphi_1(x)dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\int\varphi_1(x)dx.$$

***Пример* 1.** Найти общее решение д.у. $y'=x\cdot y^2$.

Решение. $\frac{dy}{dx}=x\cdot y^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y^2}=x\cdot dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y^2}=\int x\cdot dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y}=\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow$

$\Rightarrow\; y=-\frac{2}{x^2+2C}$.

Получили ответ. Но его можно упростить. Если C – постоянная величина, то $2C$ – тоже постоянная. Мы можем обозначить $2C=C_1$.

***Ответ*:** $y=-\frac{2}{x^2+C_1}$.

Иногда уравнение с разделяющимися переменными может быть записано в виде:

$$\varphi_1(x)dx+\varphi_2(y)dy=0, \tag{7.4}$$

(такой вид называется уравнением с разделенными переменными). Тогда мы можем сразу применить к обеим частям равенства интегрирование:

$$\int\varphi_1(x)dx+\int\varphi_2(y)dy=C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными может быть записано в виде:

$$A_1(x)B_1(y)dx+A_2(x)B_2(y)dy=0.$$

Тогда мы делим это уравнение на $B_1(y)A_2(x)$ и получаем уравнение вида (7.4):

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx+\frac{B_2(x)}{B_1(x)}dy=0.$$

Для того, чтобы избежать потери решений, следует отдельно рассмотреть случай, когда $B_1(y)A_2(x)=0$.

***Пример* 2.** Найти общее решение д.у. $y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$.

Решение. Делим уравнение на xy и применяем интегрирование:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C \quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int 1dx+\int\frac{dy}{y}-\int 1dy=C,$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C,\ \ln|xy|+x-y=C.$$

Мы получили общий интеграл. Выразить из последнего равенства y через x, или наоборот не получится. В процессе поиска решения мы совершали деление на xy. Поэтому необходимо еще рассмотреть особый случай, когда $xy=0$. С помощью подстановки убеждаемся, что $y=0$ и $x=0$ – это тоже решения.

§ 3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Функция $\varphi(x,y)$ называется *однородной нулевого порядка*, если $\varphi(\lambda x,\lambda y)=\varphi(x,y)$ $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$. Дифференциальное уравнение $y'=\varphi(x,y)$ называется *однородным*, если функция $\varphi(x,y)$ является однородной нулевого порядка.

***Пример* 1.** Следующие функции являются однородными нулевого порядка:

$$\frac{y}{x},\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},\ \frac{x^2-y^2}{xy}.$$

Однородное д.у. можно решить с помощью замены $\frac{y}{x}=u(x)$ $\Leftrightarrow$ $y=x\cdot u(x)$. Тогда $y'=u(x)+x\cdot u'(x)$.

***Пример* 2.** Найти общее решение д.у. $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

Решение. Числитель и знаменатель имеют второй порядок. Поэтому делим числитель и знаменатель на x^2 и делаем замену, указанную выше:

$$y'=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}},\qquad u+x\cdot u'=\frac{u}{1-u^2},\qquad x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u,$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2},\qquad \frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{1-u^2}{u^3}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x},\qquad -\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+C_1.$$

Для того, чтобы упростить ответ, в подобной ситуации удобнее представить постоянную величину в виде $C_1=\ln|C|$. Далее возвращаемся к исходным переменным, т.е. вместо u пишем y/x:

$$-\frac{x^2}{2y^2}-\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\ln|x|+\ln|C|.$$

Применяем свойства логарифма:

$$-\frac{x^2}{2y^2}-\ln|y|+\ln|x|=\ln|x|+\ln|C|,\quad -\frac{x^2}{2y^2}=\ln|y|+\ \ln|C|.$$

Окончательно получаем общий интеграл:

$$\frac{x^2}{2y^2}+\ln|Cy|=0.$$

Найти функцию $y=f(x)$ здесь невозможно, но можно выразить x через y: $x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}$.

***Пример* 3.** Найти частное решение д.у. $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=1$.

Решение. Делаем замену $y=x\cdot u,\ y'=u+x\cdot u'$:

$$u+x\cdot u'=u\cdot\ln u,\qquad x\cdot u'=u\cdot(\ln u-1),$$

$$\frac{du}{u\cdot\ln(u-1)}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{u\cdot(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}.$$

Вычислим отдельно интеграл в левой части равенства:

$$\int\frac{du}{u\cdot(\ln u-1)}=\left\{\begin{array}{l} v=\ln u-1 \\ dv=\dfrac{du}{u}\end{array}\right\}=\int\frac{dv}{v}=\ln|v|+C_1=\ln|\ln u-1|+C_1.$$

Получаем уравнение

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ \ln|C|\quad\Leftrightarrow\quad \ln|\ln u-1|=\ln|Cx|.$$

Если равны логарифмы, то равны и выражения под ними:

$$|\ln u-1|=|Cx|\qquad \ln u-1=\pm Cx.$$

Заметим, что $\pm C$ – это тоже постоянная величина, поэтому ее можно обозначить C_2, но ради удобства можно обозначить той же буквой C.

$$\ln u=1+Cx\quad\Leftrightarrow\quad u=e^{1+Cx}.$$

Вспоминаем теперь, что $y=x\cdot u$:

$$y=xe^{1+Cx}.$$

Нашли общее решение. Подставляем теперь начальные данные:

$$1=1\cdot e^{1+C\cdot 1}\ \Rightarrow\ e^{1+C}=1\ \Rightarrow\ 1+C=0\ \Rightarrow\ C=-1.$$

***Ответ*:** $y=xe^{1-x}$.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. *Линейное д.у. первого порядка* имеет вид:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения функций: $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Подставляем эту замену в уравнение:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + p(x)u\cdot v = q(x).$$

Теперь мы можем сгруппировать первое слагаемое с третьим и вынести за скобки v, либо сгруппировать второе слагаемое с третьим и вынести за скобки u. Поступим вторым способом:

$$u'\cdot v + u(v' + p(x)\cdot v) = q(x). \tag{7.5}$$

Функцию $v(x)$ будем искать из условия, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' + p(x)\cdot v = 0. \tag{7.6}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)\cdot v, \quad \frac{dv}{v} = -p(x)\cdot dx, \quad \ln|v| = -\int p(x)dx.$$

Нас интересует лишь какое-нибудь одно частное решение уравнения (7.6). Поэтому, постоянной, которая появится при вычислении интеграла, можно придать любое значение, которое более всего устраивает. Окончательно,

$$v = e^{-\int p(x)\cdot dx}.$$

Напомним, что при таком выборе функции $v(x)$ в уравнении (7.5) выражение в скобках равно нулю. Поэтому для нахождения функции $u(x)$ у нас остается уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'\cdot v(x) = q(x).$$

Решаем его:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v(x)}, \quad u = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx.$$

При вычислении этого интеграла появляется произвольная постоянная C, которую уже не заменяем на произвольное значение. Мы нашли две функции $u(x)$ и $v(x)$, а значит, окончательно нашли решение $y = u(x)\cdot v(x)$.

***Пример* 1.** Найти общее решение д.у. $y' - \frac{y}{x} = 2xe^x$.

Решение. Совершаем замену $y = u\cdot v$, $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$, группируем 2 и 3 слагаемое:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{uv}{x}=2xe^x,\quad u'\cdot v+u(v'-\frac{v}{x})=2xe^x.$$

Приравниваем выражение в скобках к нулю и из получившегося уравнения находим функцию $v(x)$:

$$v'-\frac{v}{x}=0,\ \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x},\ \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\ \ln|v|=\ln|x|+\ln|C|,\ v=Cx.$$

В качестве C берем любое число, например 1, т.е. нас устраивает решение $v=x$. Теперь для нахождения функции $u(x)$ мы имеем уравнение:

$$u'\cdot x=2xe^x.$$

Решаем его:

$$u'=2e^x,\ u=2\int e^x dx,\ u=2e^x+C.$$

Ответ: $y=x(2e^x+C)$.

Часто встречаются линейные д.у. первого порядка с постоянными коэффициентами: $y'+ay=b$. Оно может быть решено описанным выше способом, но проще его решить, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}=-ay+b,\ \frac{dy}{-ay+b}=dx,\ -\frac{1}{a}\ln|-ay+b|=x+C_1,$$

$$\ln|-ay+b|=-ax+C_2,\ \text{где}\ C_2=-aC_1,$$

$$-ay+b=e^{-ax+C_2}.$$

Можем обозначить $C=-\frac{1}{a}e^{C_2}$. Тогда

$$y=Ce^{-ax}+\frac{b}{a}.$$

§ 5. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка

Определение. *Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка* имеет вид:

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

Если удается разрешить его относительно старшей производной, то уравнение принимает вид:

$$y''=\varphi(x,y,y'). \qquad (7.7)$$

Мы не будем формулировать теорему о том, при каких условиях уравнение (7.7) имеет единственное решение. Примем лишь к сведению, что общее решение такого уравнения зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Если выполнены определенные условия, то решение будет единственным, если задать начальные данные $y_o=y(x_o)$, $y_o'=y'(x_o)$. Другими словами, должны быть заданы начальное значение самой функции $y(x)$ и начальное значение ее производной. Геометрически это означает следующее. Если в области D выполнены условия существования и единственности решения, то через каждую точку этой области в каждом направлении проходит одна и только интегральная кривая для д.у. (7.7).

Простейшее д.у. второго порядка имеет вид $y''=\varphi(x)$. Находим сначала первую производную:

$$y'=\int \varphi(x)dx.$$

При этом у нас появляется первая произвольная постоянная. Затем интегрируем еще раз:

$$y=\int\left(\int \varphi(x)dx\right)dx,$$

и появляется вторая постоянная.

***Пример* 1.** Найти частное решение д.у. $y''=\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Решение. $y'=\int \sin x\,dx=-\cos x+C_1,$

$$y=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2.$$

Мы нашли общее решение. Подставляем теперь начальные данные:

$$0=-\sin 0+C_1\cdot 0+C_2,\quad 1=-\cos 0+C_1.$$

Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0\cdot C_1+C_2=0, \\ -1+C_1=1. \end{cases}$$

Из нее находим, что $C_1=2,\ C_2=0$. Подставляем эти значения в общее решение.

***Ответ*:** $y=-\sin x+2x$.

§ 6. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

I. ***Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде переменную*** y.

Такие уравнения имеют вид:

$$y''=f(x,y'). \tag{7.8}$$

Обозначим $y'=r(x)$. Тогда $y''=r'(x)$. Получаем д.у. первого порядка:

$$r'=f(x,r).$$

Находим его решение $r=r(x,C_1)$, а затем решаем еще одно д.у. первого порядка:

$$y'=r(x,C_1).$$

***Пример* 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \frac{y'}{x+4}.$$

Решение. Обозначаем $y' = r(x)$, тогда $y'' = r'(x)$. Получаем д.у.

$$r' = \frac{r}{x+4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{r}{x+4}.$$

Решаем его:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{dx}{x+4}, \qquad \ln|r| = \ln|x+4| + C_o.$$

$$e^{\ln|r|} = e^{\ln|x+4|+Co}, \qquad |r| = |x+4|\cdot e^{Co}, \qquad r = \pm e^{Co}(x+4).$$

Можем обозначить $\pm e^{Co}$, как новую постоянную C. Итак,

$$r = C(x+4).$$

Теперь решаем уравнение:

$$y' = C(x+4).$$

$$\frac{dy}{dx} = C(x+4), \qquad dy = C(x+4)dx, \qquad y = C\int(x+4)dx,$$

$$y = C\frac{(x+4)^2}{2} + C_2.$$

Величина $C/2$ – это тоже постоянная величина, которую обозначим C_1.

Ответ: $y = C_1(x+4)^2 + C_2$.

II. ***Дифференциальные уравнения, которые не содержат в явном виде переменную*** $\boldsymbol{x}$.

Такие уравнения имеют вид:

$$y'' = f(y, y'). \tag{7.9}$$

Введем новую функцию $y' = q(y)$. Тогда q – это сложная функция: $q(y(x))$ и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = (y')' = q'_x = q'_y \cdot y'_x = q'_y \cdot q.$$

Подставляем это в исходное уравнение (7.9):

$$q' \cdot q = f(y, q).$$

Это обыкновенное д.у. первого порядка относительно неизвестной функции $q(y)$. Пусть его решение:

$$q(y) = \varphi(y, C).$$

Тогда для нахождения искомой функции $y(x)$ мы имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = \varphi(y, C).$$

Решаем его:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C), \qquad \frac{dy}{\varphi(y, C)} = dx, \qquad \int\frac{dy}{\varphi(y, C)} = \int dx,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y,C)} = x + C, \quad x = \int \frac{dy}{\varphi(y,C)} - C.$$

Выходит, что мы можем найти зависимость переменной x от переменой y. Не всегда удается из получившегося уравнения выразить y через x.

***Пример* 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = y \cdot y'.$$

Решение. Обозначаем $y' = q(y)$, тогда $y'' = q'_y \cdot q$. Получаем д.у.

$$q' \cdot q = y \cdot q. \quad \Leftrightarrow \quad q(q' - y) = 0.$$

Значит, либо $q = 0$, либо $q' - y = 0$.

а) $q = 0$. Получаем $y' = 0$. Значит, $y = C_1$.

б) $q' - y = 0 \Leftrightarrow q' = y$. Получаем решение $q = \int y dy = \frac{y^2}{2} + C_o$.

Далее решаем уравнение $y' = \frac{y^2}{2} + C_o$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} + C_o, \quad \frac{dy}{\frac{y^2}{2} + C_o} = dx, \quad 2 \cdot \frac{dy}{y^2 + 2C_o} = dx$$

$$x = 2\int \frac{dy}{y^2 + 2C_o}.$$

Напомним, что имеем табличный интеграл (6.1)

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Если $C_o > 0$, то мы можем обозначить $2C_o = C^2$. Тогда

$$x = 2\int \frac{dy}{y^2 + C^2} = \frac{2}{C} \operatorname{arctg} \frac{x}{C} + C_2.$$

Если $C_o < 0$, то можем обозначить $2C_o = -C^2$. Тогда

$$x = 2\int \frac{dy}{y^2 - C^2} = \frac{C}{2} \ln \left| \frac{y - C}{y + C} \right| + C_2.$$

Решение из пункта а) подпадает под последнюю формулу при $C = 0$. Мы получили 2 группы решений. Если будут дополнительно заданы начальные условия, то из двух групп надо будет выбрать одну, в зависимости от этих условий.

§ 7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка* имеет вид

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \varphi(x).$$

Если правая часть равна нулю ($\varphi(x) \equiv 0$), то такое уравнение называется *однородным*.

Особенность линейных однородных уравнений заключается в следующем. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два его решения, то их сумма с произвольными постоянными коэффициентами $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ тоже будет решением. Это легко проверить непосредственной подстановкой.

Рассмотрим только линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: $p(x) = p = \text{const}$, $q(x) = q = \text{const}$.

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{7.8}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Совершаем эту подстановку в (9) и выносим общий множитель e^{kx} за скобки:

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Поскольку $e^{kx} > 0$, то выражение в скобках должно быть равно нулю:

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{7.9}$$

Это квадратное уравнение. Оно называется характеристическим уравнением для д.у. (7.8).

I ***случай***. Уравнение (7.9) имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда имеем два решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Их сумма с произвольными постоянными коэффициентами дает общее решение:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример **1.** Один конец пружины закреплен в точке O, а на другом ее конце закреплена материальная точка весом 1 грамм. Пружина находится в растянутом состоянии. Сила упругости, действующая на точку пропорциональна ее расстоянию от точки O с коэффициентом пропорциональности 10. Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 14 см, скорость $v = 0$.
Найти закон движения.

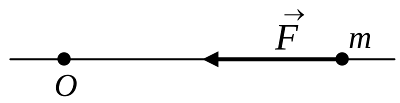


Рис. 7.3

Решение. Пусть $s = s(t)$ – расстояние от точки до центра. Тогда скорость $v = s'(t)$. Результирующая сила (рис. 7.3) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $\vec{F}_1$ направлена по движению и $F_1 = 10s$, а $\vec{F}_2$ направлена против движения, поэтому $F_2 = -3v = -3s'$.

Закон движения $ma = F$, где $a = v'$ – ускорение. Значит,

$$s'' = 10s - 3s' \quad \Leftrightarrow \quad s'' + 3s' - 10s = 0.$$

Получили однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Составляем для него характеристическое уравнение: $k^2 + 3k - 10 = 0$. Корни характеристического уравнения: $k_1 = 2$, $k_2 = -5$. Общее решение д.у.:

$$s = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-5t}.$$

Для того чтобы найти постоянные C_1 и C_2, используем начальные данные: $s(0) = 14$, $v(0) = 0$. Но сначала надо найти скорость:

$$v=s'=2C_1e^{2x}-5C_2e^{-5x}.$$

Учитывая, что $e^0=1$, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}14=C_1+C_2,\\ 0=2C_1-5C_2.\end{cases}\Rightarrow\quad C_1=10,\ C_2=4\ .$$

Ответ: $y=10e^{2t}+4e^{-5t}$.

II *случай*. Уравнение (7.9) имеет два различных комплексных корня k_1 и k_2. Тогда мы имеем два решения $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$, где $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$. Вспомним формулу Эйлера, согласно которой:

$$y_1=e^{(a+bi)x}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),\ y_2=e^{(a-bi)x}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Рассмотрим функции:

$$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{ax}\cdot\cos bx,\ \ y_4=\frac{y_1-y_2}{2i}=e^{ax}\cdot\sin bx.$$

Они тоже будут решениями. Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx).$$

***Пример* 2.** Найти общее решение д.у. $y''-2y'+5y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $k^2-2k+5=0$. Дискриминант $D=2^2-4\cdot5=-16$, $\sqrt{D}=4i$, корни: $k_1=1+2i,\ k_2=1-2i$.

Ответ: $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

III *случай*. Уравнение (7.9) имеет один действительный корень k. Тогда (без доказательства) его общее решение имеет вид:

$$y=e^{ax}(C_1x+C_2).$$

***Пример* 3.** Найти общее решение д.у. $y''-6y'+9y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $k^2-6k+9=0$. Дискриминант $D=0$, корни: $k_1=k_2=3$.

Ответ: $y=e^{3x}(C_1x+C_2)$.

§ 8. Система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x=x(t),\ y=y(t)$:

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y,\\ y'=a_{21}x+a_{22}y.\end{cases}\tag{7.10}$$

Ее характерная особенность заключается в том, что она не содержит в явном виде независимую переменную t. Такая система д.у. называется *ав-*

тономной. Система (7.10) не содержит никаких ограничений на возможные значения x и y, и поэтому она определена на всей плоскости.

Теорема 7.2. *Система* (7.10) *имеет единственное решение* $(x(t), y(t))$, *если заданы начальные данные* $x_o = x(t_o)$, $y_o = y(t_o)$.

Будем искать решение системы (7.10) в виде $x = \alpha e^{kt}$, $y = \beta e^{kt}$, где k, α, β – постоянные, которые надо правильно подобрать. Тогда $x' = k\alpha e^{kt}$, $y' = k\beta e^{kt}$. Подставляем это в систему:

$$\begin{cases} k\alpha e^{kt} = a_{11}\alpha e^{kt} + a_{12}\beta e^{kt}, \\ k\beta e^{kt} = a_{21}\alpha e^{kt} + a_{22}\beta e^{kt}. \end{cases}$$

Поскольку $e^{kt} > 0$, то можем каждое из уравнений разделить на это выражение. Получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β.

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = k\alpha, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta = k\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0. \end{cases} \tag{7.11}$$

Матрица этой системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{pmatrix}$$

Согласно правилу Крамера эта система имеет единственное решение, если $\det \mathbf{A} \neq 0$. Тогда это решение, очевидно, будет $(0, 0)$. Значит, ненулевое решение существует только когда $\det \mathbf{A} = 0$. Мы получаем уравнение, которое называется характеристическим уравнением для системы (7.11):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестного k. Ограничимся рассмотрением только случая, когда оно имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Подставляем k_1 в систему (7.11) и находим первое решение (α_1, β_1); затем подставляем k_2 в систему (7.11) и находим второе решение (α_2, β_2). Тем самым получаем два различных решения автономной системы д.у. (7.11):

$$\text{для } k_1\text{:}\ x = \alpha_1 e^{k_1 t},\ y = \beta_1 e^{k_1 t}; \tag{7.12}$$

$$\text{для } k_2\text{:}\ x = \alpha_2 e^{k_2 t},\ y = \beta_2 e^{k_2 t}. \tag{7.13}$$

Общее решение системы (7.10) является комбинацией решений (7.12) и (7.13) с произвольными постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2 e^{k_2 t}, \\ y = C_1\beta_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t}. \end{cases}$$

***Пример* 1.** Найти решение автономной системы д.у.

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 5,\ y(0) = 3$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-k)^2 - 1 = 0;$$

$$2-k = 1 \quad \text{или} \quad 2-k = -1,\ k_1 = 3,\ k_2 = 1.$$

Ищем α и β соответствующие каждому из значений k_1, k_2:

$$k_1 = 3 \quad \begin{cases} (2-3)\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + (2-3)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases} \quad \alpha = 1,\ \beta = 1.$$

$$k_2 = 1 \quad \begin{cases} (2-1)\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + (2-1)\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases} \quad \alpha = 1,\ \beta = -1.$$

Заметим, что в каждом из случаев α и β находятся неоднозначно. Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{t}. \end{cases}$$

Подставляем сюда начальные данные (напомним, что $e^0 = 1$) и находим значения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 - C_2. \end{cases} \quad C_1 = 4,\ C_2 = 1.$$

***Ответ*:** $\begin{cases} x = 4e^{3t} + e^{t}, \\ y = 4e^{3t} - e^{t}. \end{cases}$

§ 9. Приложение дифференциальных уравнений к решению задач из области физики и естествознания

I. ***Рост численности популяции***

Пусть t – время, $x(t)$ – численность популяции некоторых животных. Пусть пищевые ресурсы не ограничены, нет врагов и конкуренции. Тогда прирост поголовья будет пропорционален числу взрослых особей. Динамика роста численности описывается д.у.

$$x' = kx.$$

Его решение: $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$, где $x_0 = x(t_0)$ – численность популяции в начальный момент времени t_0. Мы видим бесконечный экспоненциальный рост численности. Но такое может происходить только в искусственно созданных условиях и непродолжительное время.

В природе среди членов одной популяции существует конкуренция, распространение инфекции, имеет место ограниченность ресурсов, существует конкуренция с другими видами и существуют враги. Попробуем учесть только фактор конкуренции внутри вида. Конкуренция тем выше, чем чаще встречаются особи. Число встреч особей двух разных видов пропорционально численности одного вида x и пропорционально численности второго вида y. Следовательно, оно пропорционально произведению $x \cdot y$. Если встречаются особи одного вида, то число встреч пропорционально $x \cdot x$, т.е. пропорционально x^2. Конкуренция уменьшает рост популяции, поэтому соответствующее слагаемое берем со знаком минус:

$$x' = kx - \varepsilon x^2 \quad (k>0,\ \varepsilon>0).$$

Это уравнение называется *уравнением Ферхюльста–Перла*. Его решение имеет вид:

$$x = \frac{x_0 \mu e^{kt}}{\mu - x_0 + x_0 e^{kt}},$$

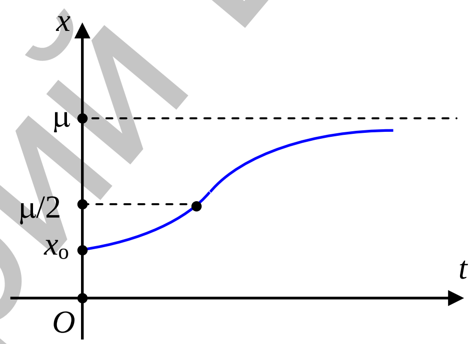


*Рис.*7 .4

где $\mu = k/\varepsilon$, $x_0 = x(0)$ – начальная численность популяции. График этой функции показан на рис. 7.4. Он напоминает график арктангенса. Существует предельное значение μ, к которому численность популяции приближается. При достижении половины от предельной численности, рост популяции замедляется. Для многих популяций эта кривая хорошо совпадает с экспериментальными данными. На данном чертеже изображен случай $x_0<\mu$. Если $x_0>\mu$, то кривая приближается к линии $x=\mu$ сверху, монотонно убывая.

II. ***Модель хищник-жертва***

Предыдущая модель не учитывала наличие врагов. Предположим, что существуют две популяции: зайцы и лисы. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ – их численность в зависимости от времени. Существует некоторое равновесное состояние численности $x=a$, $y=b$. Если вследствие каких-либо факторов численность зайцев становится больше, то начинают быстрее размножаться лисы. Если лис становится больше, чем b, то численность зайцев начинает уменьшаться. Таким образом, функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x' = -k(y-b), \\ y' = l(x-a). \end{cases} \quad (k>0,\ l>0).$$

Эта система не относится к однородным. Для случая $k=1$, $l=1$ одно из частных решений имеет вид:

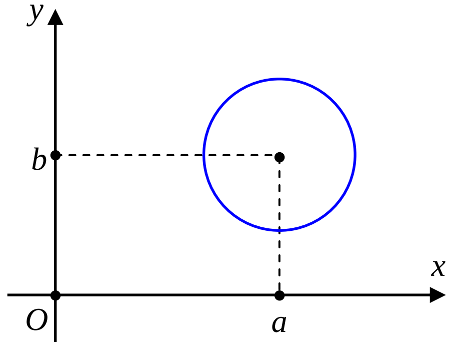


Рис. 7.5

$$x = a + \cos t,\;\; y = b + \sin t.$$

На плоскости это решение представляет собой окружность с центром в точке (a, b) (рис. 7.5). Таким образом, численность зайцев и лис изменяется циклически. В процессе изменения t, точка $(x(t), y(t))$ «бегает» по кругу.

Для каждой конкретной пары хищник-жертва необходимо экспериментально определить значения параметров a, b, k, l, причем на каждой конкретной территории отдельно. Если $k \neq l$, то кривая будет представлять собой эллипс (вытянутую окружность). Данная модель не учитывает такие факторы, как перемещение хищников и жертв с одних территорий и на соседние территории (если численность популяции становится большой, то начинается миграция).

III. ***Закон перехода вещества в раствор***

При заданной температуре количество данного вещества в растворе не может превысить концентрации, соответствующей насыщенному раствору. По мере приближения концентрации к предельному значению, уменьшается скорость растворения. Пусть t – время, $x(t)$ – количество вещества в растворе, а M – предельное количество вещества. Для большинства веществ эксперименты показывают, что скорость растворения пропорциональна разности $M - x$. Пусть – коэффициент пропорциональности. Получаем д.у.

$$x' = k(M - x) \quad \Leftrightarrow \quad x' + kx = kM.$$

Это линейное уравнение и в то же время – уравнение с разделяющимися переменными. Его решение:

$$x = Ce^{-kt} + M.$$

Если считать, что в момент времени $t = 0$ процесс растворения только начался (т.е. $x(0)=0$), то $C = -M$ и

$$x = M(1 - e^{-kt}).$$

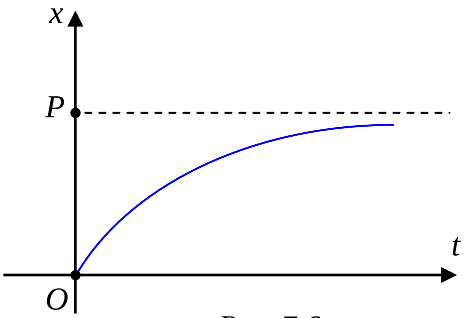


Рис. 7.6

График этой функции изображен на рис. 7.6. При $t \to \infty$, x стремится к M, но не достигает этого предельного значения.

IV. ***Падение с парашютом***

Пусть тело сброшено с высоты. На него действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_1$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_2$. При этом, $\vec{F}_1$ сонаправлена с направлением падения, а $\vec{F}_2$ противоположно направлена. Известно, что $F_1 = mg$, а F_2 пропорциональна скорости падения: $F_2 = kv$. Заметим, что при больших скоростях, таких как скорость самолета, сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Тело, падающее с высоты, тоже может разогнаться до таких скоростей, если оно достаточно маленькое и массивное, например, такое как металлический шар. Поэтому мы и называем задачу «Падение с парашютом». Итак, результирующая сила:

$$F = mg - kv.$$

Закон движения $ma = F.$, где $a = v'$ – ускорение. Значит, имеем уравнение:

$$mv' = mg - kv \quad \Leftrightarrow \quad v' = g - pv, \;\; p = k/m.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными очень похожее на уравнение из предыдущего примера.

Упражнение. Самостоятельно решите это уравнение, если в начальный момент времени скорость была равна нулю.

В учебнике И.И. Баврина [1] вы можете найти еще множество примеров применения д.у. в естествознании. Например, задачи о радиоактивном распаде, об охлаждении тела, о заряде конденсатора. Также рассмотрены задачи непосредственно из биологии: рост листьев растений, модели сезонного роста, распространение инфекций.

Задания для решения на практических занятиях

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $y' = \dfrac{4xy^3}{x^2+1}$; б) $y' = (2x+1)\cos^2 y$; в) $e^x \cdot y' + \sqrt{1-y^2} = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

а) $xydx + (x+1)dy = 0$, $y(0) = 4$; б) $\sqrt{x^2+9} \cdot y' + 2xy^2 = 0$, $y(4) = -1$.

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

а) $y' = \dfrac{x+2y}{x}$; б) $y' = \dfrac{x}{x-2y}$; в) $xy \cdot dy - (x^2+y^2)dx = 0$.

4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию.

а) $y' + 2\dfrac{y}{x} - 2x^3 = 0$, $y(1) = 3$; б) $y' + (\mathrm{tg}\, x)y - 2x^3 = 0$, $y(0) = -2$;

в) $y' - \dfrac{x}{x+1} y = 3xe^x$, $y(0) = 12$.

5. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальному условию.

а) $y'' + 2y' - 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$.

6. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

***Задача* 1.** *Найти решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию.*

1. $y' = \dfrac{4x^3}{y}$, $y(0)=3$.

2. $y' = \dfrac{\sin x}{y}$, $y(-\pi)=2$.

3. $y' = y^2 e^x$, $y(0)=1$.

4. $y' = y^2 \cos x$, $y(\pi)=1$.

5. $y' = y^3 e^x$, $y(0)=\dfrac{1}{4}$.

6. $y' = 8x^3 y$, $y(0)=5$.

7. $y' = y \cdot \sin x$, $y(\pi)=8$.

8. $y' = 2y^2 e^{-2x}$, $y(0)=-1$.

9. $y' = y^2(1-\sin x)$, $y(0)=1$.

10. $y' = 6y^3 e^{-3x}$, $y(0)=\dfrac{1}{2}$.

11. $y' = 3x^2(1+y^2)$, $y(0)=1$.

12. $y' = \dfrac{2}{y \cdot \cos^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=0$.

13. $y' = 2x(1+y^2)$, $y(0)=\sqrt{3}$.

14. $y' = y^2(2x+\cos x)$, $y(0)=\dfrac{1}{2}$.

15. $y' = \dfrac{y^2}{\sin^2 x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

***Задача* 2.** *Найти решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным данным.*

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0)=3$, $y'(0)=9$.

2. $y'' - 6y' + 8y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.

3. $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0)=3$, $y'(0)=7$.

4. $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

5. $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-4$.

6. $y'' - 8y' + 12y = 0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$.

7. $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.

8. $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-2$.

9. $y''+4y'-5y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-3$.

10. $y''-3y'-10y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=3$.

11. $y''+5y'-6y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=-3$.

12. $y''+4y'-12y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=0$.

13. $y''-4y'-5y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=2$.

14. $y''-2y'-8y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

15. $y''+y'-12y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=2$.

***Задача* 3.** *Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.*

1. $y' - 2xy = e^{x^2}\sin x$.

2. $y' + (\sin x)y = xe^{\cos x}$.

3. $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$.

4. $y' - (\sin x)y = x^2 e^{-\cos x}$.

5. $y' - 3x^2 y = e^{x^3}\sin x$.

6. $y' - (\cos x)y = 4x^3 e^{\sin x}$.

7. $y' - 3x^2 y = e^{x^3}\cos x$.

8. $y' - \dfrac{y}{\cos^2 x} = xe^{\operatorname{tg} x}$.

9. $y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{\cos^2 x}$.

10. $y' + 2(\sin x)y = \dfrac{e^{-\cos x}}{x^2}$.

11. $y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2}$.

12. $y' - \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 5x^4 e^{\arcsin x}$.

13. $y' - 2xy = \dfrac{e^{x^2}}{1-x^2}$.

14. $y' + \dfrac{y}{\sin^2 x} = 5x^4 e^{\operatorname{ctg} x}$.

15. $y' - \dfrac{y}{1+x^2} = 3x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$.

Г Л А В А 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. Основные понятия. Классическое определение вероятности

События в окружающем нас мире можно разделить на достоверные, невозможные и случайные. Первые при реализации некоторого комплекса условий всегда происходят, вторые – никогда, третьи могут происходить или не происходить. Отнесение данного события к той или иной группе существенно зависит от условий испытаний.

Теория вероятностей – наука о числовой мере случайных событий, она изучает не единичные, а массовые однородные случайные события, подчиняющиеся стохастическим закономерностям, установление которых и составляет ее основную задачу.

Возникновение теории вероятностей, как попытки построения теории азартных игр, относится к XVI–XVII векам. Но только в 30-х годах XIX столетия она стала полноценным разделом математики.

Определение. *Испытанием* будем называть любой эксперимент или наблюдение явления. Например, бросание монеты или кубика, вытягивание карты из колоды или картофелины из ящика. Результат испытания будем называть *событием*. Например, выпадение 6 очков на кубике, вытягивание белой картофелины из ящика с картофелем двух цветов.

События будем обозначать большой буквой латинского алфавита: A, B, C….

Определение. Два события называются *совместимыми*, если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в том же испытании. Три и более события называются *несовместимыми*, если они попарно несовместимы (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно). Два события A и B называются *противоположными*, если в одном испытании они несовместимы, но одно из них обязательно происходит. Тогда обозначаем $B=\bar{A}$.

Примеры. **1.** A: вытягивание дамы из колоды карт; B: вытягивание пики. Эти события совместимы.

2. K_4: выпадение четырех очков на кубике; K_5: выпадение пяти очков на том же кубике. Эти события несовместимы в рамах одного и того же испытания. В дальнейшем всегда будем обозначать K_i – это выпадение i очков на кубике.

3. A: выпадение орла при бросании монеты; B: выпадение решки. Это противоположные события.

Определение. Если в данном испытании единственно возможным результатом является наступление события C, то это событие называется *достоверным*. Событие, которое в данном испытании наступить не может, называется *невозможным*. Событие называется *случайным*, если оно может, как наступить, так не наступить в данном испытании.

***Пример.* 4.** Вытягивание белой картофелины из ящика, где весь картофель был сорта «Скарб» – это достоверное событие. Вытягивание фиолетовой картофелины в данном испытании является невозможным событием.

События из примеров 1, 2 и 3 – это все случайные события.

Определение. Говорим, что совокупность событий $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ является *полной группой событий* для данного испытания, если результатом испытания обязательно становится одно из этих событий. Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – полная группа событий и при этом события $A_1, A_2, \dots, A_n$ несовместимы и равновозможны. Тогда эти события называются *элементарными событиями*.

***Пример* 5.** $K_1, K_2, \dots, K_6$ – это полная группа событий для бросания кубика.

Определение. Если наступление события A непременно влечет наступление события B, то событие A называется *благоприятствующим* событию B.

***Пример* 6.** Пусть $K_{чет}$: выпадение четного числа очков на кубике. Тогда каждое из событий K_2, K_4, K_6 является благоприятствующим для $K_{чет}$.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью события* A называется отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий в данном испытании. Эта вероятность обозначается $P(A)$.

***Пример* 7.** В колоде 36 карт. Вытягивание каждой конкретной карты – это элементарное событие. Таких равновозможных событий 36 и все они образуют полную группу событий. В колоде 4 туза и 2 из них – красные. Пусть A: вытягивание красного туза. Тогда этому событию благоприятствуют два события из 36 равновозможных. Значит,

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Из определения следует, что вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0, а для случайного события $0 < P(A) < 1$.

§ 2. Статистическое определение вероятности

Зачастую, не все результаты испытания равновозможны. Поэтому не всегда можно применить классическое определение вероятности. Например, следующие события не являются равновозможными:

X_1: во время грозы в вас попадет молния;
X_2: во время грозы в вас не попадет молния.

Определение. Пусть при проведении n испытаний событие A наступило m раз ($m \le n$). Тогда число m называется *абсолютной частотой* события A, а отношение m/n называется *относительной частотой* события A. Обозначаем относительную частоту так: $P^*(A)$.

***Пример* 1.** В пруд осенью было запущено 7500 годовалых карпов. Из-за недостатка кислорода в воде за зиму погибло 150 карпов. Пусть A: карп погиб. Тогда $P^*(A) = 150/7500 = 1/50 = 0{,}02$.

Результаты многочисленных опытов показывают, что при проведении малого числа испытаний относительная частота может принимать значения, которые очень сильно отличаются друг от друга. Например, пусть опыт заключается в проведении десяти бросаний монеты. Вероятность того, что орел выпадет ровно 5 раз, составляет всего около 0,25. Вероятности того, что орел выпадет 4 или 6 раз составляют в сумме 0,41. Таким образом, следует ожидать, что в большинстве опытов вы получите относительную частоту выпадения орла отличающуюся от 0,5 на 0,1 или даже на большую величину.

***Пример* 2.** В следующей таблице приведены результаты опытов двух математиков.

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений орла	Относительная частота
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пирсон	12000	6014	0,5016
Пирсон	24000	12012	0,5005

Мы видим, что при возрастании числа бросаний относительная частота все более приближается к 0,5.

Статистическое определение вероятности. *Вероятностью события* A в данном испытании называется число $P(A)$, вокруг которого группируются значения относительной частоты $P^*(A)$ при большом числе испытаний n.

Другими словами, $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P^*(A)$.

***Пример* 3.** В следующей таблице приведена статистика рождений в г. Витебске за 10 дней марта 2010 года.

Дата	15.03	16.03	17.03	18.03	19.03	20.03	21.03	22.03	23.03	24.03	15-24.03
Всего родилось	13	21	20	25	28	15	15	15	23	22	176
Относит. частота рождений мальчиков	0,36	0,76	0,55	0,39	0,32	0,6	0,67	0,4	0,48	0,54	0,506

Мы видим, что за каждый отдельно взятый день, относительная частота появления мальчиков колеблется от 0,36 до 0,76. За период в 10 дней она составляет 0,506. Эта цифра близка к среднестатистической.

§ 3. Основные формулы комбинаторики

Определение. *Перестановкой множества*, состоящего из n элементов, называется любой порядок расположения элементов этого множества. Общее количество перестановок множества, состоящего из n элементов, обозначаем P_n.

Например, множество $\{1, 2\}$ имеет две перестановки: $(1, 2)$ и $(2, 1)$. Множество $\{1, 2, 3\}$ имеет 6 перестановок: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

***Теорема* 8.1.** $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Определение. *Размещением множества* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, состоящего из n элементов по m элементов, называют комбинацию, составленную из m элементов этого множества с учетом порядка элементов. Общее количество размещений множества, состоящего из n элементов по m элементов, обозначаем A_n^m.

Например, множество $\{1, 2, 3\}$ имеет следующие размещения по два элемента: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$.

***Теорема* 8.2.** $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

***Пример* 1.** На лодочной станции имеется 6 банок краски различного цвета. Лодку следует покрасить одним цветом, а номер на ней написать другим цветом. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение. Нам из шести цветов надо выбрать два, причем с учетом их порядка: первый цвет для лодки, второй – для номера. Значит, общее количество способов выбора равно:

$$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5\cdot 6 = 30.$$

Определение. *Сочетанием множества* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, состоящего из n элементов по m элементов, называется набор, составленный из m элементов этого множества без учета их порядка. Общее количество сочетаний множества, состоящего из n элементов по m элементов, обозначаем C_n^m.

Например, множество $\{a, b, c\}$ имеет три сочетания по два элемента: (a, b), (a, c), (b, c).

***Теорема* 8.3.** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

***Пример* 2.** В питомнике выращивается 10 сортов роз. Садовод хочет купить черенки трех различных сортов. Сколько у него существует различных вариантов выбора?

Решение. Порядок выбора, какой из сортов будет первым, какой вторым, а какой третьим не имеет значения. Каждый вариант выбора – это сочетание трех элементов из десяти возможных. Поэтому общее число вариантов выбора равно

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

***Пример* 3.** Вычислим, сколько различных комбинаций может выпасть в Спортлото 5 из 36-ти. Для определения размера выигрыша порядок выпадения номеров не имеет значения. Поэтому общее количество комбинаций равно

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!(36-5)!} = \frac{36!}{5!31!} = \frac{32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 376922.$$

Таким образом, вероятность выиграть максимальный приз равна $\dfrac{1}{376922}$, что приблизительно составляет $0{,}00027\%$ – менее трех шансов из миллиона.

§ 4. Свойства вероятности

Определение. *Суммой двух событий* A и B называется событие $C=A+B$, которому благоприятствует как событие A, так и событие B, и только они. Другими словами, событие $A+B$ наступает, если наступило хотя бы одно из событий A или B (в том числе, событию C благоприятствует одновременное наступление событий A и B). Аналогично, $C=A_1+A_2+\ldots+A_n$ – это событие, которому благоприятствует любое из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и никакое другое.

***Примеры.* 1.** A: вытащили из колоды даму пик; B: вытащили из даму крестей. Тогда $A+B$: вытащили черную даму.

2. A: студент получил стипендию; B: студент получил перевод от родителей; C: у студента прибавилось денег. В этом случае нельзя сказать, что $C=A+B$, потому что могли быть другие причины, из-за которых у него стало больше денег.

Определение. *Произведением двух событий* A и B называется событие $C=A\cdot B$, которое происходит, только если события A и B наступили одновременно.

Примеры. **3.** A: вытащили из колоды даму; B: вытащили из колоды пику. Тогда $A\cdot B$: вытащили даму пик.

4. Бросаем два кубика одновременно. A: на первом кубике выпало 6 очков; B: на втором кубике выпало 6 очков. Тогда $A\cdot B$: выпало 12 очков. Заметим, что по правилам некоторых игр такое выпадение засчитывается за 24 очка. В нардах такое выпадение называется «шесть куш» и дает право совершить 4 хода, каждый на 6 позиций вперед.

***Теорема* 8.4.** *Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий*: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Следствие. *Сумма вероятностей двух противоположных событий равна* 1: $P(A)+P(\bar{A})=1 \;\Leftrightarrow\; P(\bar{A})=1-P(A)$.

Примеры. **5.** A: стрелок попал по мишени; $\bar{A}$: стрелок не попал по мишени. Если $P(A)=0{,}9$, то $P(\bar{A})=0{,}1$.

6. В банке находятся 10 черных зерен фасоли, 5 коричневых и 5 белых. Пусть A: вытащили наугад черную фасолину; B: вытащили коричневую; C: вытащили не белую фасолину. Тогда $C=A+B$.

$$P(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},\;\; P(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4},\;\; P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет. Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошли другие события или нет.

В примере 4 (бросание двух кубиков) события A и B независимы.

Примеры. **6.1.** В условиях примера 6 мы проводим два испытания. После того, как мы вытащили первую фасолину, мы возвращаем ее назад в банку, и только после этого вытягиваем вторую фасолину. Пусть

A: при первом испытании мы достали черную фасолину;

B: при втором испытании мы достали коричневую фасолину.

В этом случае события A и B независимы.

6.2. После того, как мы вытащили первую фасолину, мы ее назад в банку не возвращаем, и вытягиваем вторую фасолину. После того, как произошло событие A, мы имеем в банке не 20, а 19 зерен фасоли, из которых 5 коричневых. Поэтому $P(B)=5/19$, но это только при условии, что в первом испытании произошло именно A, а не другое событие. В этом примере A и B – зависимые события.

Определение. Пусть A и B – зависимые события. Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, в предположении, что A уже произошло.

***Теорема* 8.5.** 1. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий*: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

2. *Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности события A на условную вероятность события A, при условии, что B уже произошло*: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Следствие. *Вероятность произведения трех зависимых событий вычисляется по формуле* $P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$. *Аналогичная формула действует и для произвольного числа событий.*

***Пример* 7.** а) Найти вероятность того, что из двух карт, вытащенных одна за одной из колоды, первая окажется тузом, а вторая – дамой.

б) Найти вероятность того, что две карты, вытащенные из колоды, обе окажутся тузами.

Решение. а) Пусть A: при первом испытании из колоды карт вытащили туза и назад не положили; B: при втором испытании вытащили даму. Тогда $P(A)=4/36=1/9$. После того, как A произошло, в колоде остается 35 карт, из которых 4 дамы. Поэтому

$$P_A(B)=\frac{4}{35},\quad P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{35}=\frac{4}{315}.$$

б) Пусть C: при втором испытании вытащили туза. После того, как A произошло, в колоде остается 35 карт, из которых 3 туза. Поэтому

$$P_A(C)=\frac{3}{35},\quad P(A\cdot C)=P(A)\cdot P_A(C)=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{35}=\frac{1}{105}.$$

***Ответ*:** а) 4/315; б) 1/105.

***Пример* 8.** Студент пришел сдавать зачет, зная из 30 вопросов только 20. Какова вероятность сдать зачет, если при отсутствии ответа на первый вопрос, преподаватель задает еще один и при правильном ответе на второй вопрос студент получает зачет?

Решение. Обозначим события:
A – студент сдал зачет;
B – студент ответил на первый вопрос преподавателя;
C – студент ответил на второй вопрос преподавателя.
Тогда $A=B+\overline{B}\cdot C,$ т.е. студент сдаст зачет, если либо он ответит на первый вопрос, либо не ответит на первый, но ответит на второй.
Согласно теоремам 8.4 и 8.5

$$P(A)=P(B+\overline{B}\cdot C)=P(B)+P(\overline{B}\cdot C)=P(B)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(C).$$

При этом мы учли, что события B и $\overline{B}$ несовместимы, и поэтому B и $\overline{B}\cdot C$ не могут осуществляться одновременно.

По условию $P(B)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$. Поэтому $p(\overline{B})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$. После того, как студент не ответил на первый вопрос, у преподавателя остается выбор одного из 29 вопросов, из которых студент знает 20. Поэтому $P_{\overline{B}}(C)=\dfrac{20}{29}$.

$$P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}=\frac{78}{87}\approx 0{,}90.$$

***Ответ*:** а) 90%.

***Теорема* 8.6.** *Вероятность суммы двух совместимых событий* A *и* B *вычисляется по формуле*: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

***Пример* 9.** Из десяти замоченных зерен пшеницы 8 проросли. Найти вероятность того, что

а) из четырех наугад взятых зерен, все окажутся проросшими.

б) из двух взятых наугад зерен, хотя бы одно окажется проросшим.

Решение. а) Пусть A_i: i-ое зерно оказалось проросшим. Тогда

$P(A_1)=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, $P_{A_1}(A_2)=\dfrac{7}{9}$, $P_{A_1A_2}(A_3)=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$, $P_{A_1A_2A_3}(A_4)=\dfrac{5}{7}$.

$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{3}$.

б) Событие «из двух зерен, хотя бы одно проросшее» есть сумма событий A_1+A_2. Тогда

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)=$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{9}=\frac{44}{45}.$$

Можно рассудить иначе: A_1+A_2 – это событие, противоположное к событию $\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$: из двух выбранных зерен оба оказались не проросшими.

$$P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45};\ \ P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2)=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}.$$

***Теорема* 8.7.** (Формула полной вероятности). *Пусть события* B_1, $B_2,\ldots,B_n$ *попарно несовместимы и образуют полную группу событий, а событие* A *может произойти лишь при условии появления одного из событий* $B_1, B_2,\ldots, B_n$. *Тогда*

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

Эту формулу еще можно назвать формулой разбора случаев. Происходит обязательно что-то одно из $B_1, B_2,\ldots, B_n$. Вероятность того, что произойдет B_1, а потом A, равна $P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)$; Вероятность того, что произойдет B_2, а потом A, равна $P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)$ и т.д. Полная вероятность того, что произойдет A, равна сумме этих событий.

***Пример* 10.** Для проведения зачета по высшей математике преподаватель подготовил 20 задач по дифференциальным уравнениям и 30 задач по теории вероятностей. Студент умеет решать 18 задач по дифференциальным уравнениям и 15 задач по теории вероятностей. Для получения зачета с первой попытки студент должен вытащить наугад билет с одной задачей и решить ее. При этом преподаватель выложил на стол только 15 наугад выбранных билетов с задачей по дифференциальным уравнениям и 10 билетов с задачей по теории вероятностей. Какова вероятность, что студент сдаст зачет с первого раза?

Решение. Итак, на столе лежат 25 билетов. Пусть

B_1: студент вытащил задачу по д.у.; $P(B_1)=\frac{15}{25}=0{,}6$;

B_2: студент вытащил задачу по т.в.; $P(B_2)=\frac{10}{25}=0{,}4$;

A: студент решил задачу.

Тогда, если это была задача по д.у., то $P_{B_1}(A)=\frac{18}{20}=0{,}9$;

если это была задача по т.в., то $P_{B_2}(A)=\frac{15}{30}=0{,}5$.

Согласно формуле полной вероятности,

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}74.$$

§ 5. Случайные величины

Определение. Переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает какое-либо одно значение из множества возможных значений, называется *случайной величиной*.

***Пример* 1.** Случайными величинами являются:
а) число очков выпавшее на игральной кости;
б) вес случайно выбранного зерна.

Случайные величины обозначаем прописными буквами латинского алфавита: $X, Y, Z\dots$, а их значения – строчными: x, y, z. Если случайная величина X принимает n возможных значений, то их обозначаем $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Определение. Если случайная величина может принимать возможные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности чисел, то она называется *дискретной случайной величиной*. Случайная величина, которая может принимать любые значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

В примере 1 а) случайная величина является дискретной, а примере 1 б) – непрерывной.

Дискретная случайная величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми X может принимать эти значения. Этот перечень возможных значений и их вероятностей называют *закона распределения случайной величины*. Этот закон может быть задан в виде таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

(8.1)

Поскольку случайная величина всегда принимает одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

***Пример* 2.** Закон распределения случайной величины 1 а) выглядит так:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(8.2)

Как правило, в естествознании закон распределения случайной величины выясняется в результате эксперимента. Результаты эксперимента могут получиться различными в разных условиях.

***Пример* 3.** Количество зерен в стручке боба при неблагоприятных погодных условиях может быть распределено следующим образом:

X	1	2	3	4	5	6	7
P	0,07	0,15	0,35	0,25	0,12	0,05	0,01

(8.3)

В благоприятных погодных или в другой местности условиях результат может получиться другим.

Определение. Две или более случайных величин называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какое возможное значения приняли другие величины.

***Примеры.* 3.** Пусть в испытании бросают одновременно два кубика. Количество очков выпавших на первом кубике и количество очков выпавших на втором кубике – это две независимые случайные величины.

4. Количество осадков, выпавшее летом и средний вес зерна пшеницы, собранной в этом же году – это зависимые случайные величины.

5. В мешочке находятся бочонки от лото. Двое по очереди вытаскивают из мешочка бочонки. Пусть X: число написанное на бочонке у первого игрока, Y: число написанное на бочонке у второго игрока. Если первый игрок после того, как посмотрит число, возвращает бочонок назад в мешочек, то X и Y – независимые случайные величины. Если первый игрок не возвращает бочонок назад, то X и Y – зависимые случайные величины.

Определение. Пусть закон распределения случайной величины X задан табл. 8.1. Произведением случайной величины X на постоянное число C называется случайная величина, которая имеет таблицу распределения:

X	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Сумма, разность и произведение двух случайных величин имеют более сложную таблицу распределения, и мы не будем этот вопрос затрагивать.

§ 6. Математическое ожидание случайной величины

Часто закон распределения случайной величины бывает неизвестен. Тогда эту величину изучают по числовым характеристикам.

Определение. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей (8.1). *Математическим ожиданием* (М.О.) этой случайной величины называется число

$$M(X)=x_1p_1+x_1p_2+\ldots+x_1p_n.$$

Примеры. **1.** Для бросания кубика (табл. 5.2) математическое ожидание числа выпавших очков равно

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=3{,}5.$$

2. Математическое ожидание числа зерен в одном стручке боба в неблагоприятный год (табл. 8.3) равно

$$M(X)=1\cdot 0{,}07+2\cdot 0{,}15+3\cdot 0{,}35+4\cdot 0{,}25+5\cdot 0{,}12+6\cdot 0{,}05+7\cdot 0{,}01=$$

$$=0{,}07+0{,}3+1{,}05+1+0{,}6+0{,}3+0{,}07=3{,}264\approx 3{,}3.$$

Безусловно, в благоприятный год результат получится больший.

***Теорема* 8.8.** *Математическое ожидание дискретной случайной величины приблизительно равно среднему арифметическому всех ее значений при проведении достаточно большого числа испытаний.*

Поэтому М.О. еще называют средним значением случайной величины.

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины

1. М.О. постоянной величины C равно этой величине.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.

§ 7. Дисперсия случайной величины

***Пример* 1.** Пусть законы распределения трех случайных величин заданы следующими таблицами:

X	–1	0	1
P	0,1	0,8	0,1

Y	–1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Z	–10	0	20
P	0,4	0,4	0,2

Все они имеют одинаковое М.О.: $M(X)=M(Y)=M(Z)=0$. Тем не менее, они отличаются друг от друга разбросом значений вокруг математического ожидания. Величины X и Y принимают одинаковые значения, но Y значительно чаще отклоняется от своего М.О., а Z отклоняется на большие значения.

***Пример* 2.** При одинаковой среднегодовой температуре и одинаковом среднегодовом количестве осадков две местности могут по-разному быть благоприятны для сельского хозяйства: в одной местности много осадков в холодный период, а в другой осадки распределены равномерно. В Исландии и Казахстане (в районе Астаны) среднегодовая температура близка к +4°С. Но в Исландии средние температуры января и июля равны –1 и +11° соответственно, а в Астане они раны –14 и +21°. Как следствие: в Исландии пшеница не вызревает, а в Казахстане – вызревает.

Определение. Пусть закон распределения случайной величины X задан табл. (8.1). *Отклонением случайной величины* X *от своего М.О.* или просто *отклонением* называется случайная величина $X-MX$. Ее закон распределения:

$X-MX$	x_1-MX	x_2-MX	…	x_n-MX
P	p_1	p_2	…	p_n

Вычислим М.О. этого отклонения:

$$M(X-MX)=(x_1-MX)p_1+(x_2-MX)p_2+\ldots+(x_n-MX)p_n=$$

$$=x_1p_1+x_1p_2+\ldots+x_1p_n-MX(p_1+p_2+\ldots+p_n)=MX-MX\cdot 1=0.$$

Итак, М.О. отклонения равно нулю для любой случайной величины: положительные и отрицательные отклонения компенсируют друг друга. Поэтому отклонение не подходит для характеристики случайной величины.

Определение. Рассмотрим случайную величину $(X-MX)^2$. Все ее значения не отрицательны и поэтому не могут гасить друг друга. М.О. этой случайной величины называется *дисперсией* случайной величины X:

$$D(X)=M(X-MX)^2=(x_1-MX)^2p_1+(x_2-MX)^2p_2+\ldots+(x_n-MX)^2p_n.$$

Среднеквадратичным отклонением случайной величины X называется число $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Свойства дисперсии

1. Дисперсию можно вычислить по формуле $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$;

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$;

3. Постоянную можно выносить за знак дисперсии: $D(CX)=C^2D(X)$.

Докажем только первую формулу.

$$(x_1-MX)^2p_1+(x_2-MX)^2p_2+\ldots+(x_n-MX)^2p_n=(x_1^2-2x_1MX+(M(X))^2)p_1+$$
$$+(x_2^2-2x_2MX+(M(X))^2)p_2+\ldots+(x_n^2-2x_nMX+(M(X))^2)p_n=$$
$$=(x_1^2p_1+x_1^2p_2+\ldots+x_n^2p_n)-2MX(x_1p_1+x_1p_2+\ldots+x_1p_n)+$$
$$+(M(X))^2)(p_1+p_2+\ldots+p_n)=$$
$$=M(X^2)-2MX\cdot MX+(M(X))^2)\cdot 1=M(X^2)-(M(X))^2. \ \blacksquare$$

Пример **3.** Вычислим дисперсию для случайной величины «число очков на кубике». Мы уже нашли в примере 1 § 6, что $M(X)$=3,5. Вычислим:

$$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}=15\frac{1}{6}.$$

Тогда

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=15\frac{1}{6}-12\frac{1}{4}=2\frac{11}{12}.$$

§ 8. Формула Бернулли

Пусть проводится n испытаний и пусть вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний. Тогда вероятность того, что A не наступит в каждом отдельном испытании, равна $q=1-p$.

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях и не наступило во всех последующих $n-m$ испытаниях. Такое сложное событие представляет собой произведение

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m\text{ раз}}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-m\text{ раз}} \qquad (8.4)$$

Его вероятность равна

$$P(A^m\overline{A}^{n-m})=P(A^m)P(\overline{A}^{n-m})=p^mq^{n-m}.$$

Пусть теперь событие A наступило в m испытаниях в произвольном порядке и не наступило в других $n-m$ испытаниях. Такое сложное событие получается из (8.4) в результате перестановки сомножителей. Для того чтобы его задать, надо из n номеров испытаний выбрать m номеров, в которых A наступило. Сделать это можно C_n^m способами. Таким образом, общее число сложных событий, означающих, что A наступило ровно m

раз при проведении n испытаний равно C_n^m. Каждое из них имеет одинаковую вероятность $p^m q^{n-m}$. Все эти сложные события являются несовместимыми. Поэтому вероятность их суммы равна сумме их вероятностей.

Обозначим $P_n(m)$ вероятность того, что A наступило ровно m раз при проведении n испытаний. Мы пришли к выводу, что

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (8.5)$$

Эта формула называется *формулой Бернулли*.

***Пример* 1.** Всхожесть семян помидоров равна 90%. Найти вероятность, что из четырех посеянных семян взойдут:

а) ровно 3;

б) не менее трех.

Решение. а) $P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!1!}0{,}9^3\cdot 0{,}1^1=4\cdot 0{,}729\cdot 0{,}1\approx 0{,}29$;

б) условие означает, что взойдут три или четыре семени:

$$P_4(3)+P_4(4)=P_4(3)+0{,}9^4\approx 0{,}29+0{,}656\approx 0{,}95.$$

Рассмотрим случайную величину, которая равна числу случаев, в которых A наступило при проведении n испытаний. Тогда она задается таблицей:

X	0	1	2	…	m	…	$n-2$	$n-1$	n
$P(X)$	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		$\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2$	$np^{n-1}q$	p^n

Эта таблица задает *закон биномиального распределения*.

Примем без доказательства, что для этого распределения $M(X)=np$, $D(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}$.

Для частного случая, когда $p=q=0{,}5$ (например, бросание монеты) мы имеем формулу $P_n(m)=C_n^m 0{,}5^n$. Согласно этой формуле $P_n(m)=P_n(n-m)$. Таблица выглядит так:

X	0	1	2	…	m	…	$n-2$	$n-1$	n
$P(X)$	$0{,}5^n$	$n0{,}5^n$	$\frac{n(n-1)}{2}0{,}5^n$		$C_n^m 0{,}5^n$		$\frac{n(n-1)}{2}0{,}5^n$	$n0{,}5^n$	$0{,}5^n$

***Пример* 2.** Экспериментатор бросает монету 10 раз. Составить таблицу, которая отражает вероятности того, что орел выпадет 0, 1, …, 10 раз.

Решение. $P_{10}(0)=P_{10}(10)=0{,}5^{10}\approx 0{,}001$; $P_{10}(1)=P_{10}(9)=10\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}01$;

$P_{10}(2)=P_{10}(8)=\frac{10\cdot 9}{2}\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}044$; $P_{10}(3)=P_{10}(7)=\frac{10!}{7!3!}$

$\cdot 0{,}5^{10}=120\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}117$;

$P_{10}(4)=P_{10}(6)=\frac{10!}{6!4!}\cdot 0{,}5^{10}=210\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}205$; $P_{10}(5)=\frac{10!}{5!5!}$

$\cdot 0{,}5^{10}=252\cdot 0{,}5^{10}\approx 0{,}246$.

Запишем результаты в таблицу и отобразим их в виде графика (рис. 8.1):

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
$P(X)$	0,001	0,01	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,01	0,001

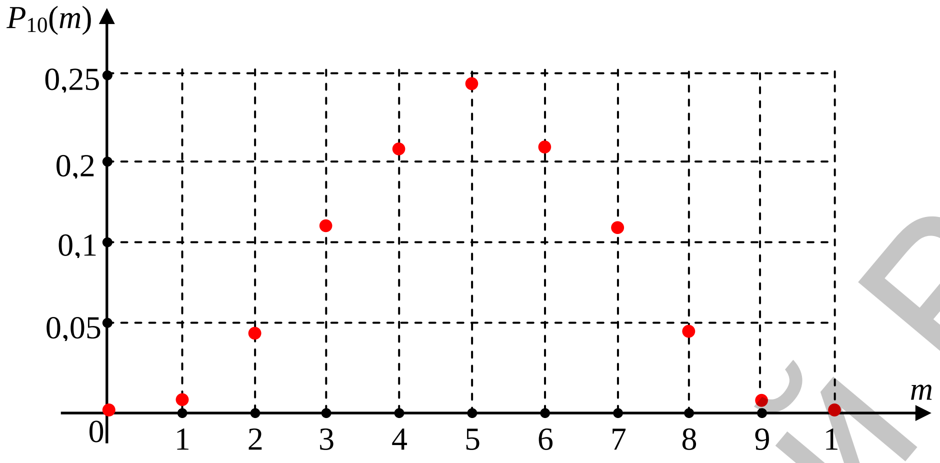


Рис. 8.1

Попробуйте теперь мысленно представить, как выглядит кривая, соединяющая все построенные точки на графике. С такими кривыми мы встретимся в параграфе 10.

§ 9. Предельные теоремы Лапласа

Использование формулы Бернулли при большом числе испытаний весьма неудобно. В этом случае используют следующую теорему, которая дает приближенное значение $P_n(m)$.

Локальная предельная теорема Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (8.6)$$

Здесь буквами m, n, p, q обозначены те же величины, что и в формуле (8.5). Функция $\varphi(x)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

но для нахождения ее приближенного значения обычно пользуются таблицей (см. табл. 1 приложения). В ней приведены значения функции для положительных значений переменной x. Для нахождения значения $\varphi(x)$ при отрицательных значений переменной x следует использовать тот факт, что функция $\varphi(x)$ – четная: $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Более подробную таблицу можно найти, например, в [1].

Обозначим $P_n(k, l)$ – вероятность того, что при проведении n испытаний событие произойдет не менее чем k раз и не более чем l раз.

Интегральная предельная теорема Лапласа

$$P_n(k, l) \approx \int_{x_k}^{x_l} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_l} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{8.7}$$

где $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $x_l = \dfrac{l - np}{\sqrt{npq}}$.

Рассмотрим первообразную от функции $\varphi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Она называется *функцией Лапласа*. Тогда формулу можно переписать так:

$$P_n(k, l) \approx \Phi(x_l) - \Phi(x_k). \tag{8.7′}$$

Для функции $\Phi(x)$ также составлены таблицы (см. табл. 2 приложения). Более подробную таблицу можно найти, например, в [1]. В таблицах приведены значения функции для положительных значений переменной x. Для нахождения значения $\Phi(x)$ при отрицательных значениях переменной x следует использовать тот факт, что функция $\Phi(x)$ – нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Кроме того, в таблице приведены значения только при $x \le 5$. При $x > 5$ значения функции $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример. Перепись населения показала, что 60% жителей микрорайона имеют домашний компьютер, подключенный к сети Интернет. С какой вероятностью из 100 выбранных наугад жителей:

а) ровно у 50 будут иметь домашний компьютер, подключенный к сети Интернет;

б) от 50 до 60 будут иметь домашний компьютер, подключенный к сети Интернет.

Решение. а) В данном случае $n = 100$, $m = 50$, $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$;

$$\sqrt{npq} = \sqrt{24} \approx 4{,}899;\ \frac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0{,}204;\ \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx (50 - 60) \cdot 0{,}204 \approx -2{,}04.$$

По таблице находим приближенное значение $\varphi(2{,}04) \approx 0{,}498$. Значит, $\varphi(-2{,}04) \approx 0{,}498$.

$$P_{100}(50) \approx 0{,}204 \cdot 0{,}498 \approx 0{,}010.$$

б) В данном случае $n=100$, $l=60$, $k=50$, $p=0{,}6$; $q=0{,}4$;

$$\sqrt{npq}=\sqrt{24}\approx 4{,}899\,;\ \frac{1}{\sqrt{npq}}\approx 0{,}204\,;$$

$$x_l\approx(60-60)\cdot 0{,}204\approx 0{,}00\,;\ x_k\approx(50-60)\cdot 0{,}204\approx -2{,}04\,.$$

По таблице находим приближенные значения $\Phi(0{,}00)\approx 0{,}00$; $\Phi(2{,}04)\approx 0{,}48$. Значит, $\Phi(-2{,}04)\approx -0{,}48$.

$$P_n(50,60)\approx 0{,}00-(-0{,}48)\approx 0{,}48.$$

§ 10. Непрерывные случайные величины

Непрерывную случайную величину X невозможно задать с помощью таблицы. Пусть X может принимать значения только из интервала (a, b), а $x\in \boldsymbol{R}$. Запись $X<x$ означает, что случайная величина X приняла значение меньшее x. Тогда вероятность этого события есть функция от x:

$$F(x)=P(X<x).$$

Определение. Функция $F(x)$ называется *интегральной функцией распределения* (или просто *функцией распределения*) случайной величины X. Другими словами, $F(x)$ – это вероятность того, что значение случайной величины попало в интервал $(-\infty, x)$.

Определение. Если функция $F(x)$ непрерывная, то случайную величину X будем называть непрерывной.

Свойства функции распределения

1. $0\le F(x)\le 1$ (т.к. $F(x)$ – это вероятность).

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. если $x_1<x_2$, то $F(x_1)\le F(x_2)$. Действительно, интервал $(-\infty, x_1)$ меньше, чем $(-\infty, x_2)$ и случайная величина X попадает в первый интервал с меньшей вероятностью, чем во второй; но может получиться, что эти вероятности равны.

3. Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $(c, d]$ равна разности значений функции распределения в концах этого полуинтервала: $P(x\in(c,d])=F(d)-F(c)$.

Действительно, $P(x\in(c,d])=P(x<d)-P(x<c)=F(d)-F(c)$.

4. Если X принимает значения только из интервала (a, b), то $F(a)=0$, $F(b)=1$. В частности, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

5. Если функция распределения $F(x)$ непрерывная, то вероятность того, что случайная величина X примет какое-либо одно заранее заданное значение, равна нулю: $P(x=c)=0$.

6. Если функция распределения $F(x)$ непрерывная, то вероятность попадания непрерывной случайной величины X в открытый, полуоткрытый и замкнутый интервал с одними и теми же концами одинакова:

$$P(x\in(c,d))=P(x\in[c,d))=P(x\in(c,\\ d])=P(x\in[c,d])=F(d)-F(c).$$

***Пример* 1.** Случайная величина задана с помощью функции распределения, имеющей график показанный на рис. 8.2. Найдите вероятность попадания случайной величины в промежуток $[1,2]$.

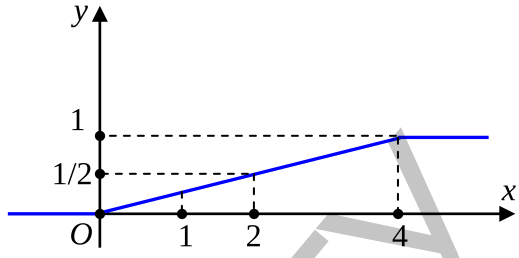


Рис. 8.2

Решение.

$$P(x\in[1,2])=F(2)-F(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Определение. Пусть случайная величина X задана своей функцией $F(x)$, причем $F(x)$ – дифференцируемая. Тогда функция

$$f(x)=F'(x)$$

называется *дифференциальной функцией распределения* или *плотностью вероятности* случайной величины X.

Поскольку $F(x)$ – неубывающая функция, то $f(x)\geq 0$.

***Теорема* 8.9.** $P(a<x<b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Доказательство. Согласно определению $F(x)$ – это первообразная функции $f(x)$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=P(a<x<b). \quad ■$$

Геометрически $P(a<x<b)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 8.3).

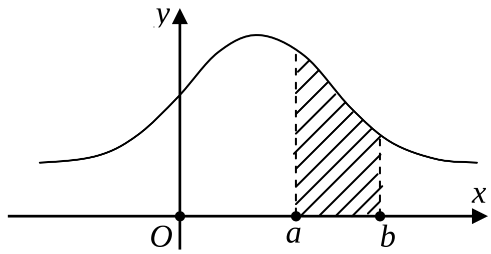


Рис. 8.3

Следствие. $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x)\,dx=1.$

Действительно, $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x)\,dx=P(-\infty<x<+\infty)$, а вероятность того, что случайная величина примет любое значение, очевидно, равна 1. ■

Определение. Пусть случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)$. *Математическим ожиданием* этой случайной величины называется число

$$M(X)=\int\limits_{+\infty}^{-\infty} xf(x)\,dx,$$

если этот интеграл существует и конечен. *Дисперсией* случайной величины X

называется число

$$D(X)=\int_{+\infty}^{-\infty}(x-M(X))^2 f(x)\,dx,$$

а *среднеквадратичным отклонением* называется число $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

***Пример* 2.** Случайная величина задана с помощью плотности вероятности

$$f(x)=\begin{cases} x/2, \text{ если } x\in[0,2] \\ 0, \text{ если } x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)\end{cases}$$

(рис. 8.4). Найдите ее М.О., дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

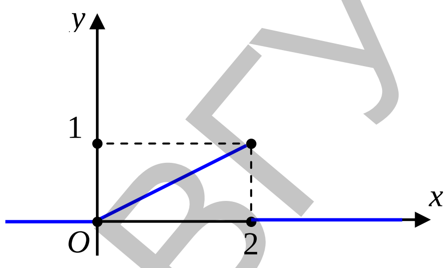


Рис. 8.4

Решение. Поскольку $f(x)=0$ за пределами промежутка $[0,2]$, то

$$M(X)=\int_{+\infty}^{-\infty} xf(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\,dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^2=\frac{2^3}{6}-0=\frac{4}{3}.$$

$$D(X)=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x}{2}\,dx=\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)\cdot\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{8x^3}{9}+\frac{16x^2}{18}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{4}-\frac{64}{9}+\frac{64}{18}-0\right)=\frac{2}{9}.$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

§ 11. Закон нормального распределения

Определение. Закон распределения непрерывной случайной величины называется *нормальным*, если плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (8.8)$$

где $a=M(X)$ – математическое ожидание, а $\sigma=\sigma(X)$ – среднеквадратичное отклонение.

График этой функции при различных значениях $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$ показан на рис. 8.5. При больших значениях среднеквадратичного отклонения график более низкий и широкий, а при малых σ график узкий и высокий. Он имеет максимум при $x=a$, т.е. с наибольшей вероятностью значения случайной величины попадают близко от М.О.

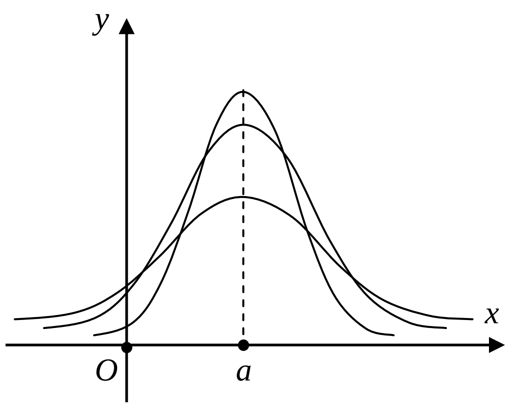


Рис. 8.5

Площадь фигуры, ограниченной графиком функции (8.8) и осью Ox, равна 1, причем справа и слева от прямой $x=a$ площади фигур одинаковы и равны 0,5. Мы видели в параграфе 8, что закон биномиального распределения имеет похожий график, только состоящий из точек.

Большинство действительно случайных величин в природе и технике распределены по нормальному закону (например, вес зерна пшеницы, рост человека).

Напомним, что мы уже ввели функцию

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

которая называется *функцией Лапласа*. С ее помощью мы можем вычислить вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону в данный интервал (α,β):

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

В частности, вероятность того, что случайная величина отклоняется от своего М.О. меньше, чем на ε, вычисляется по формуле:

$$P(|x-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Для функции Лапласа составлены таблицы, с помощью которых можно узнать значения этой функции. Параметры нормального распределения a и σ определяются опытным путем. Поскольку,

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=-0{,}5,\quad \lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0{,}5,$$

то вероятности того, что случайная величина принимает значение больше α или меньше β вычисляются соответственно по формулам:

$$P(\alpha<x)=0{,}5-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),\qquad P(x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)+0{,}5.$$

Примеры. **1.** Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a=164$ см, $\sigma=5{,}5$ см. Найти вероятность того, что рост случайно выбранной женщины окажется более 170 см.

Решение.

$$P(170<x)=0{,}5-\Phi\left(\frac{170-164}{5{,}5}\right)\approx 0{,}5-\Phi(1{,}11)\approx 0{,}5-0{,}367\approx 0{,}133.$$

2. Случайная величина, распределена по нормальному закону с параметрами $a=20$, $\sigma=10$. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение от 17 до 23.

Решение.

$$P(17<x<23)=P(\,|x-20|<3\,)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)\approx 2\cdot 0{,}118\approx 0{,}236.$$

§ 12. Генеральная совокупность и выборка

Пусть требуется изучить некоторое множество однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака. Это множество объектов называется *статистической совокупностью*. Для того чтобы получить максимально точный результат, надо изучить каждый объект. Но это, как правило, бывает невозможно сделать по разным причинам. Например, из-за большого количества объектов, их недоступности или необходимости уничтожить объект при исследовании.

Пример **1.** Мы исследуем популяцию белок, обитающих в Беловежской Пуще. Переловить всех белок нам не удастся.

Когда сплошное исследование невозможно, то из всей статистической совокупности выбирают для изучения часть объектов, которая называется *генеральной совокупностью*. Часть объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называют *выборкой*. Число объектов в генеральной совокупности и в выборке называют соответственно *объемом генеральной совокупности* и *объемом выборки*.

Если выборку отбирают по одному или несколько объектов, которые после исследования возвращаются в генеральную совокупность, то такая выборка называется *повторной*. Если объекты не возвращаются, то выборка называется *бесповторной*.

Примеры. **2.** Из всех снарядов, выпускаемых на заводе, выбирают по 2 снаряда из каждой партии. Получается, допустим, 20 снарядов – это генеральная совокупность. Из них наугад берут 5 – это выборка.

3. Мы зачерпнули на поле из бункера комбайна зачерпнули ведро пшеницы – это генеральная совокупность. Для исследования мы взяли из ведра 50 зерен – это выборка, причем бесповторная.

4. У нас нет возможности содержать одновременно много белок. Отловили одну или две, исследовали их, а потом отпустили в лес. Затем, мы в другом краю леса поймали еще две белки. Среди них может случайно оказаться одна из уже исследованных белок. Это повторная выборка.

Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть *репрезентативной*.

Пример **5.** Для того чтобы выборка получилась репрезентативной, яблоки в саду следует выбирать с разных деревьев. При социологических опросах следует выбирать людей разного пола, разных возрастов и из разных социальных слоев.

§ 13. Статистическое распределение выборки

Пусть из генеральной совокупности была извлечена выборка. При этом величина x_1 наблюдалась n_1 раз, x_2 – n_2 раз, … , x_k – n_k раз. Тогда $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ – это *объем выборки*. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанная в определенном порядке, называется *вариационным рядом*.

Числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называют *частотами*, а их отношения к объему выборки

$$p_1^*=\frac{n_1}{n},\quad p_2^*=\frac{n_2}{n},\quad \ldots,\quad p_k^*=\frac{n_k}{n}$$

называют *относительными частотами*. Заметим, что сумма относительных частот всегда равна единице:

$$p_1^*+p_2^*+\ \ldots+p_k^*=\frac{1}{n}(n_1+n_2+\ldots+n_k)=\frac{1}{n}\cdot n=1.$$

Статистическим распределением называют перечень вариант и соответствующих им относительных частот. Для отображения статистического распределения используют таблицы, полигоны и гистограммы.

***Пример* 1.** Пусть статистическое распределение задано таблицей

Варианта x_i	1	2	3	4	5
Относительная частота p_i^*	0,15	0,35	0,3	0,15	0,05

(например, это может быть количество птенцов в гнезде некоторой птицы)

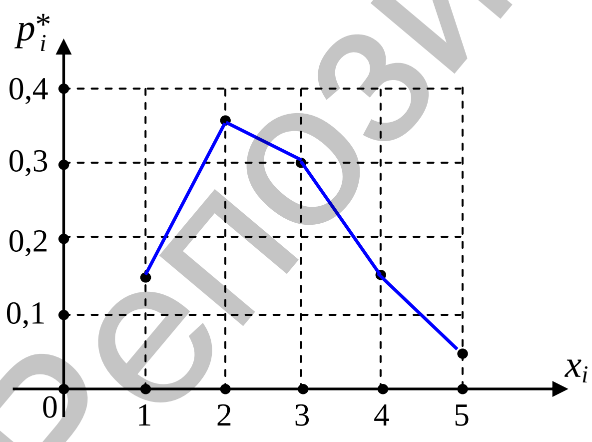


Рис. 8.6

Тогда графически это распределение отображается с помощью следующего графика, который называется *полигоном* (рис. 8.6). Но такие полигоны строят только тогда, когда имеется небольшое количество вариант. Если распределение является непрерывным, или имеется очень большое число вариант, то распределение может быть задано таблицей с интервалами. Интервал, в который попадают все значения, варианты разбивают на частичные интервалы, по возможности одинаковой длины h. В таблице указывают количество вариант n_i, попавших в данный интервал, а также отношение этого количества к длине интервала: n_i/h.

Для графического отображения непрерывного распределения строят *гистограмму*. Для этого на оси Ox откладывают частичные интервалы. На каждом из интервалов строят прямоугольник высоты $\frac{n_i}{h}$. Тогда площадь каждого прямоугольника равна абсолютной частоте появления случайной величины X на этом интервале:

$$S = \frac{n_i}{h} \cdot h = n_i.$$

Площадь всей гистограммы равна объему выборки.

***Пример* 2.** В пруду выловлено 50 карасей. При этом их вес распределился следующим образом. Менее 100 грамм – 22 штуки, от 100 до 200 грамм – 12 штук, от 200 до 300 грамм – 10 штук, от 300 до 400 грамм – 4 штуки, от 400 до 500 грамм – 2 штуки. При составлении таблицы мы в третьей колонке дополнительно вычисляем относительную частоту появления карася с весом из данного интервала, т.е. делим абсолютную частоту появления на 50.

Вес рыбы (г)	Абсолютная частота	Относительная частота	$\frac{n_i}{h}$
0 – 100	22	0,44	0,22
100 – 200	12	0,24	0,12
200 – 300	10	0,2	0,1
300 – 400	4	0,08	0,04
400 – 500	2	0,04	0,02

Гистограмма выглядит следующим образом (рис. 8.7):

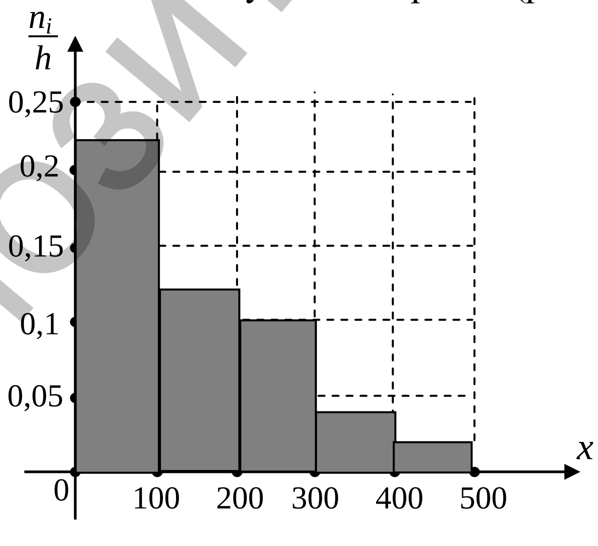


Рис. 8.7

§ 14. Выборочное среднее и выборочная дисперсия

Определение. Пусть все предметы из генеральной совокупности обладают некоторым количественным признаком X, который данной выборке принял значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с частотами $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Пусть $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ – это объем выборки. Выборочной средней называется величина

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k) = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*.$$

Если все варианты в данной выборке оказались различными, то

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$$

Если рассматривать X, как случайную величину, то выборочная средняя совпадает с математическим ожиданием этой случайной величины: $\overline{x}_B = M(X)$.

Выборочной дисперсией называется величина

$$D_B = \frac{1}{n}(n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \overline{x})^2).$$

Если все варианты в выборке оказались различными, то

$$D_B = \frac{1}{n}((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_k - \overline{x})^2).$$

Выборочным среднеквадратичным отклонением называется величина

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Предположим, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ являются достаточно большими и неудобными для вычисления, но они группируются вокруг некоторого значения C. Тогда используют следующий прием. Постоянную C называют ложным нулем. Вместо значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ рассматривают значения $x_1 - C, x_2 - C, \ldots, x_k - C$, вычисляют выборочную среднюю и после этого к ней прибавляют C.

Пример. Вес 10 куриных яиц, выбранных случайным образом составил в граммах 53,1; 53,2; 54,0; 54,1; 54,3; 55,2; 55,5; 56,0; 56,7; 56,9. Мы видим, что все числа приблизительно группируются вокруг числа 55. Отнимаем от всех чисел 55:

–1,9; –1,8; –1; –0,9; –0,7; 0,2; 0,5; 1; 1,7; 1,9.

Находим их сумму: –1,0. Среднее арифметическое этих чисел: –0,1. Прибавляем к полученному числу мнимый ноль и получаем выборочное среднее: $\overline{x} = 54{,}8$. Вычисляем величины $x_i - \overline{x}$:

–1,7; –1,6; –0,8; –0,7; –0,5; 0,4; 0,7; 1,2; 1,9; 2,1.

Находим квадраты этих чисел, складываем их и делим получившуюся величину на 10 (объем выборки):

$$D_B = \frac{1}{10}(2{,}89+2{,}56+0{,}64+0{,}49+0{,}25+0{,}16+0{,}49+1{,}44+3{,}61+4{,}41) \approx 1{,}7$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 1{,}3.$$

Если выборка совпадает по объему со всей генеральной совокупностью, то выборочная средняя называется *генеральной средней* $\bar{x}_Г$, а выборочная дисперсия называется *генеральной дисперсией* $D_Г$. *Генеральным среднеквадратичным отклонением* называется величина $\sigma_Г = \sqrt{D_Г}$.

Предположим, что из генеральной совокупности было сделано m выборок с одинаковым объемом n. Каждую выборку можно рассматривать, как независимое испытание. Значение, которое примет выборочная средняя в каждой отдельной выборке, можно рассматривать как случайную величину $\bar{X}$, которая называется *выборочной средней случайной величиной*. Математическое ожидание этой случайной величины $M(\bar{X})$ совпадает с генеральной средней.

Но точный закон распределения этой случайной величины нам неизвестен. В нашем распоряжении есть лишь результаты m экспериментов, которые дают значения выборочных средних $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ – это значения, которые выборочная средняя принимает в результате проведения m исследований. Тогда их среднее математическое можно использовать для приблизительной оценки генеральной средней:

$$\bar{x}_Г \approx \frac{1}{m}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_m).$$

В принципе возможна ситуация, когда все выборки были бесповторными, одинакового объема и охватывают всю генеральную совокупность (т.е. каждый объект из генеральной совокупности побывал в выборке ровно один раз). Тогда данная оценка генеральной средней будет точной.

Выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение тоже можно рассматривать как случайные величины. Обозначим $\tilde{S}$ выборочное среднеквадратичное отклонение. Тогда выборочная дисперсия равна $\tilde{S}^2$. Для оценки генеральной дисперсии можно использовать следующую теорему.

Теорема. *Математическое ожидание выборочной дисперсии равно*

$$M(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n} D_Г.$$

Таким образом, если $D_1, D_2, \ldots, D_m$ – это значения, которые выборочная дисперсия приняла в результате проведения m исследований, то генеральную дисперсию можно приблизительно оценить следующим образом:

$$D_Г \approx \frac{n}{m(n-1)}(D_1 + D_2 + \ldots + D_m).$$

Задания для решения на практических занятиях

1. Поезд на аттракционе «Американские горки» состоит из 8 вагончиков. Имеется 8 баллончиков с краской различных цветов. Сколькими способами можно раскрасить поезд, так чтобы все вагончики имели различные цвета?

2. Владелец банковской пластиковой карты помнит, что пин-код состоит из цифр 1, 2, 3, 4, но забыл в каком порядке. Какова вероятность того, что он правильно наберет пин-код с первой попытки?

3. В королевскую карету запрягается шестерка лошадей одной масти. Сколькими способами могут быть размещены 6 лошадей по различным местам в упряжке?

4. Садово-парковый дизайнер хочет создать на клумбе трехцветный узор из живых цветов. В его распоряжении имеется 6 сортов гвоздик различного цвета. Сколькими способами он может выбрать себе нужные три сорта? При этом расположение цветов по различным элементам узора имеет значение.

5. В подарочный набор входят 4 наименования шоколадных конфет. На фабрике выпускается 9 наименований конфет. Сколькими способами можно выбрать из них нужные 4 наименования?

6. Садовник должен был сложить в ящик 80 луковиц гладиолусов одного сорта. Но среди них случайно попали 2 луковицы другого сорта. Какова вероятность того, что одна случайно выбранная луковица окажется «неправильного» сорта?

7. На стол брошены 2 игральные кости. На одной из них выпало 5 очков, а вторая упала под стол. Какова вероятность того, что выпала сумма очков не менее 9?

8. Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что выпало:
а) 12 очков; б) 11 очков; в) 10 очков?

9. Монета брошена 2 раза. Найти вероятность того, что:
а) оба раза выпадет орел; б) хотя бы один раз выпадет орел.

10. При выстреле из пневматической винтовки вероятность «попадания в десятку» равна 0,05; вероятность «попадания в девятку» равна 0,1; вероятность «попадания в восьмерку» равна 0,15. Отличная оценка ставится, если при одном выстреле выбито не менее 8 баллов. Какова вероятность получить отличную оценку?

11. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено:

а) 2 билета; б) 4 билета?

12. В коробке 5 одинаковых бочонков, на которых написаны различные номера. Какова вероятность того, что все номера выпадут в возрастающем порядке?

13. Для сигнализации о возгорании в помещении установлены 2 датчика – старый и новый. В помещении ведутся ремонтные работы, и датчики могут дать ложное срабатывание на пыль. Вероятность того, что сработает старый датчик, равна 0,2; вероятность того, что сработает новый датчик, равна 0,1. Найти вероятность того, что ложное срабатывание произойдет хотя бы у одного датчика.

14. На полке расставлены 12 учебников, причем 5 из них по высшей математике. Студент не глядя, берет 2 учебника. Какова вероятность того, что оба они окажутся по высшей математике?

15. Вероятность того, что авиационная бомба попадет в мост равна 0,85; вероятность того, что при попадании бомбы мост будет разрушен, равна 0,8. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если сбросить на него

а) одну бомбу;

б) две бомбы, если вторая бомба сбрасывается только при условии, что мост не был разрушен при сбрасывании первой бомбы;

в) две бомбы, если вторая бомба сбрасывается сразу вслед за первой, не дожидаясь результата сброса первой бомбы.

16. Специалист высшей квалификации собирает 40% приборов, надежность которых равна 0,95. Специалист средней квалификации собирает 60% приборов, надежность которых равна 0,75. Определить вероятность того, что случайно выбранный прибор будет работать безотказно.

17. Детали одного наименования поставляются на завод тремя фирмами. Первая поставляет 20% от общего количества деталей, вторая поставляет 30%, а третья – 50%. Среди продукции первой фирмы детали высшего качества составляют 85%, среди продукции второй – 90%, а среди продукции третьей – 80%. Найти вероятность того, что одна выбранная наугад деталь будет высшего качества.

18. Недобросовестный производитель семян расфасовал в пакеты по 6 семян нового урожая и по 4 семени старого урожая. Всхожесть семян старого урожая составляет 50%, а нового урожая – 85%. Найти вероятность того, что одно наугад выбранное семя взойдет.

19. Какова вероятность, что из шести родившихся в один день детей ровно 3 окажутся мальчиками, если считать, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы?

20. Смешали 1 тонну пшеницы старого урожая с четырьмя тоннами пшеница нового урожая. Найти вероятность того, что:

а) из шести выбранных наугад зерен ровно 4 окажутся старого урожая;

б) из 25-ти зерен ровно 4 окажутся старого урожая.

21. Среди участников международного молодежного лагеря 16% составляют представители Беларуси. Для участия в конкурсе организаторы лагеря случайным образом выбирают пять человек. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно один представитель Беларуси.

22. В городе жители 9% квартир пользуются интерактивным телевидением. Представитель новой компании-провайдера интерактивного телевидения в рекламных целях совершает поквартирный обход многоэтажного дома, в котором 196 квартир. Найти вероятность того, что пользователями интерактивного телевидения окажутся жильцы:

а) ровно в 16 квартирах данного дома;

б) от 1 до 16 квартир данного дома.

23. На трех гранях кубика написано число 1, на двух гранях – число 2, на трех гранях – число 3. Составьте закон распределения случайной величины «число очков, выпавшее при бросании кубика». Найти для нее математическое ожидание и дисперсию.

24. В лотерее из 100 билетов один выигрывает 100 евро, два по 50 евро, шесть – по 20 евро и восемь – по 10 евро. Составьте закон распределения случайной величины «сумма выигрыша в лотерею». Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

25. Контрольная работа состоит из 3 заданий. На каждое задание приведено 4 ответа, один из которых является правильным. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании. Найти математическое ожидание и дисперсию этой СВ.

26. Дана дифференциальная функция распределения (плотность вероятности) случайной величины X.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0{,}4, & 1<x\le 2 \\ 0{,}6, & 2<x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}$$

Найти функцию распределения и построить ее график. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины X.

27. Случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание; в) дисперсию; г) вероятность $p(x<0{,}5)$; д) вероятность $p(0{,}5<x\le 1)$.

28. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале $[-1, 3]$, задана функцией распределения $F(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$. Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $[0, 2]$. Построить график $F(x)$.

29. В следующей таблице приведена максимальная температура в течение дня 1 января в Витебске. Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
0,8	–9,8	–5,4	0,4	1,3	0,8	4,4	–2,3	–2,3	–3,6

30. В фермерском хозяйстве содержатся 50 дойных коров. Наблюдения за жирностью молока (в %) дали следующие результаты:

4,06; 3,67; 3,86; 3,62; 3,76; 4,04; 3,96; 3,94; 3,84; 3,98;
3,57; 4,07; 3,87; 3,61; 3,69; 3,99; 3,76; 3,61; 3,82; 3,91;
4,16; 3,96; 4,00; 3,76; 3,46; 4,08; 3,93; 3,88; 4,02; 3,71;
3,81; 3,72; 4,09; 3,78; 4,02; 3,53; 3,73; 3,92; 3,79; 4,26;
4,18; 4,17; 4,14; 3,72; 4,03; 3,82; 4,31; 4,03; 3,62; 3,91.

Построить по этим данным интервальный вариационный ряд с равными интервалами (длина интервала равна 0,10) и изобразить его графически – нарисовать гистограмму и полигон.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1

1. В ящике 5 белых шаров и 5 черных шаров. Какова вероятность, того, что:

а) два шара, взятые наугад, оба окажутся белыми?

б) два шара, взятые наугад, окажутся разного цвета?

2. Преподаватель для зачета приготовил 5 задач по Д.У. и 7 задач по Т.В. Вероятность того, что студент решит задачу по Д.У., равна 0,2; вероятность того, что студент решит задачу по Т.В., равна 0,6. Студент вытягивает наугад билет с одной задачей. Какова вероятность того, что он решит эту задачу?

3. В магазине имеются гвоздики 5 разных расцветок. Продавец хочет составить букет из трех различных по цвету гвоздик. Какое количество различных вариантов букета может получиться?

4. В следующей таблице приведена температура в градусах, измеренная в полдень с 1 по 10 июля в некоторой местности. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Дата	1.07	2.07	3.07	4.07	5.07	6.07	7.07	8.07	9.07	10.07
Температура	27,7	30,1	31,6	25,0	26,4	30,5	32,8	29,3	28,7	27,9

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
10 – 20	6	40 – 50	10
20 – 30	12	50 – 60	4
30 – 40	16	60 – 70	2

Вариант 2

1. Имеется 10 зерен пшеницы, из которых 3 имеют недостаточную по стандарту массу. Какова вероятность того, что:

а) два зерна, взятые наугад, оба окажутся стандартными?

б) одно будет стандартным, а второе нет?

2. Преподаватель дал студенту 6 задач. Вероятность того, что студент решит каждую из задач, равна 3/4. Какова вероятность того, что студент решит ровно половину из них?

3. В баре имеется 8 различных напитков. Бармен при приготовлении коктейлей смешивает в равной пропорции любые три напитка. Какое количество различных коктейлей может у него получиться?

4. В следующей таблице приведена урожайность пшеницы по годам в некотором сельскохозяйственном предприятии с 2001 по 2010 год. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Урожайность	36,6	30,0	31,4	35,5	37,8	34,3	31,7	30,9	30,7	33,1

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Постройте гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
10 – 15	16	25 – 30	6
15 – 20	12	30 – 35	4
20 – 25	10	35 – 40	2

Вариант 3

1. В ящике находятся по 6 клубней картофеля двух разных сортов. Какова вероятность того, что:

а) три клубня, взятые наугад, оба окажутся одного сорта?

б) два клубня, взятые наугад, окажутся разных сортов?

2. Преподаватель дал студенту 6 задач. Вероятность того, что студент решит каждую из задач, равна 0,7. Какова вероятность, что студент решит ровно 4 задачи?

3. У школьника есть 9 карандашей различного цвета. Он хочет для раскрашивания контурной карты использовать 4 карандаша. Сколькими способами он может выбрать эти карандаши?

4. В следующей таблице приведена высота в дюймах десяти наугад выбранных на поле растений кукурузы. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Высота	72,4	76,5	78,8	75,3	72,7	71,9	71,7	74,1	77,6	71,0

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
5 – 15	4	35 – 45	14
15 – 25	8	45 – 55	12
25 – 35	10	55 – 65	2

Вариант 4

1. В ящике находятся по 5 зерен белой фасоли, 4 зерна коричневой и 2 зерна черной фасоли. Какова вероятность того, что:

а) три зерна, взятые наугад, оба окажутся белыми?

б) из двух зерен, взятых наугад, одно окажется белым, а второе – черным?

2. Преподаватель для зачета приготовил 5 задач по алгебре и 10 задач по Т.В. Вероятность того, что студент решит задачу по алгебре, равна 0,8; вероятность того, что студент решит задачу по Т.В., равна 0,6. Студент вытягивает наугад одну задачу. Какова вероятность того, что он ее решит?

3. На рыболовной базе имеется 5 одинаковых лодок на прокат. Лодочник решил покрасить их красками различных цветов. На складе он обнаружил 8 банок краски различных цветов. Сколькими способами он может выбрать необходимые ему 5 банок?

4. Измерен вес 10 годовалых кроликов-самцов на ферме. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вес (кг)	3,37	3,29	3,27	3,51	3,86	3,20	3,34	3,75	3,98	3,63

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построть гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
0 – 5	10	15 – 20	8
5 – 10	12	20 – 25	4
10 – 15	14	25 – 30	2

Вариант 5

1. В аквариуме зоомагазина плавают 15 декоративных рыбок, среди которых 7 самцов и 8 самок. Какова вероятность того, что:

а) две рыбки, выловленные сачком наугад, обе окажутся самками?

б) две рыбки, выловленные сачком наугад, окажутся разного пола?

2. В куче зерна смешаны 1 тонна пшеницы и 2 тонны ржи. Какова вероятность того, что из 7 взятых наугад зерен окажется ровно 4 зерна пшеницы?

3. Дизайнер разработал рисунок ткани, предполагающий использование краски трех различных оттенков. На фабрике имеется подходящая краска десяти оттенков. Сколькими способами дизайнер может раскрасить свой эскиз ткани?

4. У десяти чулочных ужей, содержащихся в террариуме, измерена длина тела. Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Длина (см)	74,1	77,6	71,0	72,4	76,5	78,8	75,3	72,7	71,9	71,7

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
0 – 10	6	30 – 40	8
10 – 20	10	40 – 50	4
20 – 30	12		

Вариант 6

1. Садовод нечаянно положил вместе 8 черенков красных роз и 17 черенков белых роз. Какова вероятность того, что два черенка, взятые наугад,

а) оба окажутся черенками белых роз?

б) окажутся черенками роз различного цвета?

2. Вероятность того, что из яйца вылупится курочка, составляет 0,6. Вероятность того, что вылупится петушок, составляет 0,4. Какова вероятность, что из пяти выбранных наугад яиц вылупится ровно 3 курочки?

3. Студентка захотела купить в кафетерии 3 различных пирожных. В продаже имеется 8 видов пирожных. Сколько различных вариантов выбора у нее есть?

4. У десяти трехлетних плотвиц, выловленных в низовьях Днепра, измерена длина тела. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Длина (см)	23,3	22,7	21,9	21,7	24,1	25,6	19,0	20,4	34,5	26,8

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
0 – 3	6	9 – 12	15
3 – 6	15	12 – 15	9
6 – 9	24	15 – 18	6

Вариант 7

1. В мешочке для лото находятся бочонки с номерами от 1 до 11. Достают по очереди два бочонка. Какова вероятность того, что:

а) оба раза будет вытащены бочонки с четными номерами?

б) сумма номеров на бочонках окажется нечетной?

2. Вероятность того, что Цезарь поведет свои войска в Галлию вдоль берега моря, равна 0,8; вероятность того, что он поведет свои войска через перевал в Альпах, равна 0,2. Вероятность того, что галлы разобьют противника на побережье, равна 0,1; вероятность того, что они разобьют противника в горах, равна 0,7. Какова полная вероятность того, что галлы сумеют отразить нападение?

3. Для проведения фуршета заказано 10 различных видов закуски. Официанту необходимо поставить на два фуршетных стола по 5 различных видов закуски. Сколькими способами он может это сделать?

4. На элеваторе выбрано 10 проб, каждая из которых содержит по 1000 зерен пшеницы. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вес пробы (г)	30,5	32,8	29,3	28,7	27,9	27,7	30,1	31,6	25,0	26,4

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
0 – 4	32	12 – 16	12
4 – 8	24	16 – 20	10
8 – 12	16	20 – 24	6

Вариант 8

1. В учебной подгруппе учатся 8 девушек и 2 юноши. Преподаватель для проверки домашнего задания выбирает по журналу наугад двух студентов. Какова вероятность того, что:

а) он вызовет двух девушек?

б) он вызовет одну девушку и одного юношу?

2. Яйца на птицефабрике сортируются по категориям. В категорию Д-1 попадает 40% яиц. Какова вероятность того, что из 5 выбранных наугад яиц ровно 2 окажутся яйцами категории Д-1?

3. Технолог молочного завода предложила выпускать йогурты с ароматами двух различных фруктов. На заводе имеется концентрат 7 фруктов. Сколько различных сортов йогурта можно выпустить?

4. В таблице приведены данные о весе десяти, выбранных наугад, перепелиных яиц. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Вес яйца (г)	11,5	11,8	11,3	10,7	9,9	9,7	12,1	12,6	10,0	10,4

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
0 – 10	24	30 – 40	12
10 – 20	20	40 – 50	8
20 – 30	16		

Вариант 9

1. Из 20 лотерейных билетов 5 являются выигрышными. Вытягивают наугад два билета. Какова вероятность того, что:

а) оба билета окажутся выигрышными?

б) ровно один билет окажется выигрышным?

2. Из деталей, отлитых на заводе, 10% оказываются бракованными. Какова вероятность того, что из 6 выбранных наугад деталей ровно 4 окажутся бракованными?

3. Профсоюзный комитет решил закупить для формирования новогодних подарков конфеты 7 различных наименований. На складе имеется 10 наименований конфет. Сколько существует различных вариантов выбора наименований конфет?

4. У десяти 7-летних плотвиц из Киевского водохранилища подсчитано число икринок (тыс. шт.). Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Число икринок (тыс. шт.)	77,9	77,7	80,1	81,6	75,0	76,4	80,5	82,8	79,3	78,7

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
50 – 60	14	80 – 90	14
60 – 70	20	90 – 100	8
70 – 80	24		

Вариант 10

1. В корзине находятся 8 куриных яиц, 5 утиных и 7 гусиных. Хозяйка выбирает наугад два яйца. Какова вероятность того, что:

а) оба яйца окажутся утиными?

б) одно яйцо окажется куриным, а второе – утиным?

2. На птицефабрике 40% несушек имеют возраст 2 года и 60% несушек имеют возраст 3 года. Вероятность того, что яйцо, снесенное несушкой в возрасте 2 года, окажется категории Д-0, равна 0,1. Вероятность того, что яйцо, снесенное несушкой в возрасте 3 года, окажется категории Д-0, равна 0,3. Какова вероятность того, что одно яйцо, выбранное наугад, окажется категории Д-0?

3. Для награждения студентов, занявших 1, 2 и 3 места в олимпиаде по биологии, организаторам необходимо выбрать три книги из 12 имеющихся книг (необходимо определить персонально, какая книга вручается за каждое место). Сколькими способами организаторы олимпиады могут выбрать книги?

4. У десяти взрослых мужчин измерено количество эритроцитов в крови (10^{12}/л.). Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Кол-во эритроцитов (10^{12}/л)	44,7	43,9	43,7	46,1	47,6	41,0	42,4	46,5	48,8	45,3

5. Выборочное распределение задано следующей таблицей. Построить гистограмму этого распределения.

Частичный интервал	Абсолютная частота	Частичный интервал	Абсолютная частота
20 – 24	30	32 – 36	14
24 – 28	24	36 – 40	10
28 – 32	18	40 – 44	4

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ
(репетиционные)

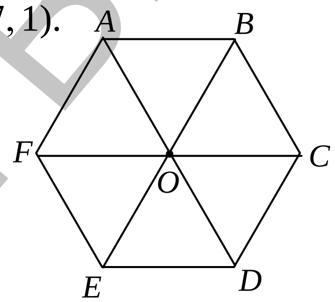
Тест № 1

1. Известны координаты точек $A(7,-4)$, $B(5,2)$. Укажите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

а) $(12,-2)$; б) $(2,-6)$; в) $(6;-1)$; г) $(-1;3)$; д) $(-2,6)$.

2. Известны координаты точек $A(-6,3)$, $B(8,5)$. Укажите координаты середины отрезка AB:

а) $(14,2)$; б) $(-14,-2)$; в) $(1,4)$; г) $(2,8)$; д) $(7,1)$.



3. На следующем чертеже изображен правильный шестиугольник. В каких пунктах ниже указаны пары равных векторов:

а) $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{OE}$; б) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{AC}$;

г) $\overrightarrow{FO}$ и $\overrightarrow{OC}$; д) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$; д) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CB}$.

4. Пользуясь тем же чертежом, укажите сумму векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{FE}$:

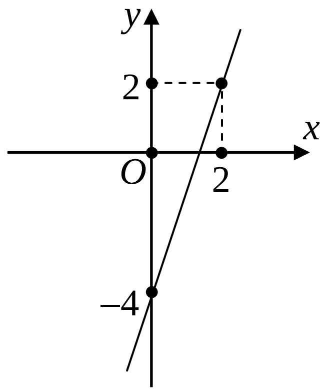
а) $\overrightarrow{BO}$; б) $\overrightarrow{AE}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{EA}$; д) $\overrightarrow{FO}$.

5. Даны координаты векторов $\vec{\mathbf{a}}(-3,1)$, $\vec{\mathbf{b}}(4,-1)$. Какие координаты имеет вектор $2\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$?

а) $(-2,1)$; б) $(-1,2)$; в) $(-5,2)$; г) $(-1,1)$; д) $(5,-2)$.

6. Известны координаты вектора $\vec{\mathbf{a}}(9,-12)$. Какую длину имеет вектор $\vec{\mathbf{a}}$?

а) -3; б) 3; в) $\sqrt{15}$; г) 15; д) 225.



7. Какое уравнение имеет прямая, изображенная на рисунке?

а) $y=\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}$; б) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; в) $y=-\frac{1}{3}x-1$;

г) $y=-3x+4$; д) $y=3x-4$; е) $y=2x-3$.

8. Среди перечисленных выше прямых укажите ту, которая параллельна прямой, $y=3x-9$ и ту, которая перпендикулярна ей.

9. Вычислите $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 24; б) 0; в) –3; г) 13; д) 19.

10. Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \end{pmatrix}$.

11. Укажите область определения функции $y=\ln(x^2-25)$:

а) $[5,+\infty)$; б) $(-\infty,-5)$; в) $[-5,5]$; г) $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$; д) $(-5,5)$.

12. Укажите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$:

а) $[-1,+\infty)$; б) $[-1,0)\cup(0,+\infty)$; в) $[-1,1]$; г) $(0,+\infty)$; д) $(-\infty,-1)$.

13. Укажите номера рисунков, на которых изображены графики функций $y=\sin x$, $y=\arccos x$, $y=\ln x$, $y=e^x$ в том же порядке, в каком перечислены эти функции.

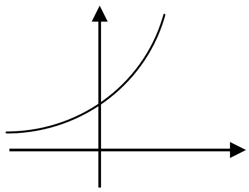


Рис. 1

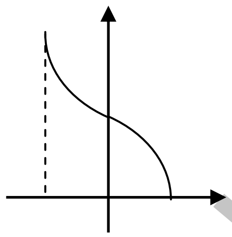


Рис. 2

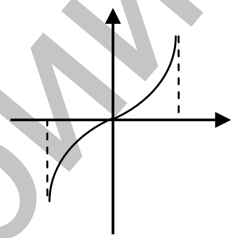


Рис. 3

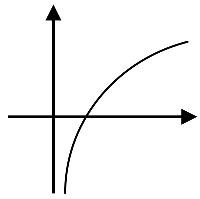


Рис. 4

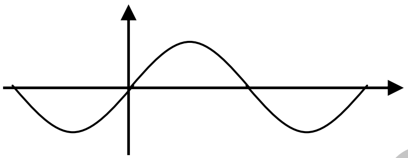


Рис. 5

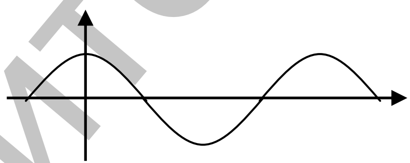


Рис. 6

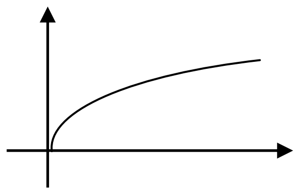


Рис. 7

14. Каждой из следующих функций $y=\dfrac{1}{3}x^6$, $y=\sqrt{x^3}$, $y=\cos x$, $y=\ln x$ поставьте в соответствие ее производную (букву, которой она обозначена). Запишите эти буквы в том же порядке, в каком перечислены функции:

а) $y'=-\sin x$; б) $y'=\dfrac{\ln x}{x}$; в) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$; д) $y'=\dfrac{x^4}{5}$;

е) $y'=2x^5$; ж) $y'=\dfrac{1}{x}$; з) $y'=-\sin x$.

15. $y=\sqrt{2x+7}$. Найти $y'(1)$.

а) $\dfrac{1}{3}$; б) 3; в) $\dfrac{1}{6}$; г) $-\dfrac{1}{6}$; д) 9.

16. На каком из указанных ниже промежутков возрастает функция $y=\frac{x^3}{3}-x+1$?

а) $(-1,1)$; б) $(-\infty,-1)$; в) $(0,1)$; г) $(1,+\infty)$; д) $(-1,0)$.

17. Функция $y=\frac{1}{x^2-4}$ имеет единственную точку экстремума. Какому из следующих промежутков она принадлежит?

а) $(-\infty,-2)$; б) $(-2,0)$; в) $(0,2)$; г) $(-2,2)$; д) $(2,+\infty)$.

18. Каждой из следующих функций $y=x^4$, $y=\cos x$, $y=\frac{1}{1+x^2}$ поставьте в соответствие ее первообразную (букву, которой она обозначена). Запишите эти буквы в том же порядке, в каком перечислены функции.

а) $y=-\sin x+C$; б) $y=\sin x+C$; в) $y=\mathrm{arctg}\,x+C$; г) $y=\frac{\ln x}{x}+C$;

д) $y=\frac{x^5}{5}+C$; е) $y=4x^5+C$.

19. Какая из следующих функций является частным решением дифференциального уравнения $y'=2y$?

а) $y=-\sin 2x$; б) $y=2x$; в) $y=x^2$; г) $y=e^{2x}$; д) $y=e^{x^2}$.

В следующих вопросах варианты ответа не предлагаются

20. В феврале 28 дней. Какова вероятность того, что выбранное наугад число окажется выходным днем (субботой или воскресеньем)?

21. Дан закон распределения случайной величины. Вычислите ее математическое ожидание.

X	0	2	4
P	1/4	1/2	1/4

23. С помощью правила Крамера найдите решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 5x+4y=1, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$$

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{A}-2\mathbf{B}$.

Тест № 2

1. Известны координаты точек $A(-1,3)$, $B(5,1)$. Укажите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

а) $(4,4)$; б) $(2,2)$; в) $(6,-2)$; г) $(-6,2)$; д) $(4,-2)$.

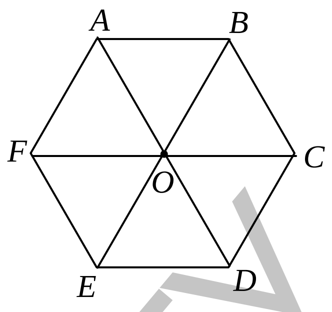
2. Известны координаты точек $A(2,1)$, $B(-8,5)$. Укажите координаты середины отрезка AB:

а) $(-3,3)$; б) $(-10,4)$; в) $(-5,2)$; г) $(6,6)$; д) $(5,-2)$.

3. На следующем чертеже изображен правильный шестиугольник. В каких пунктах ниже указаны пары равных векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DE}$; б) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{FB}$;

г) $\overrightarrow{EO}$ и $\overrightarrow{BO}$; д) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$.



4. Пользуясь тем же чертежом, укажите сумму векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$:

а) $\overrightarrow{BO}$; б) $\overrightarrow{OB}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{CA}$; д) $\overrightarrow{BC}$.

5. Даны координаты векторов $\vec{\mathbf{a}}(3,-1)$, $\vec{\mathbf{b}}(-2,1)$. Какие координаты имеет вектор $\vec{\mathbf{a}}+2\vec{\mathbf{b}}$?

а) $(1,0)$; б) $(-1,2)$; в) $(-5,2)$; г) $(-1,1)$; д) $(5,-2)$.

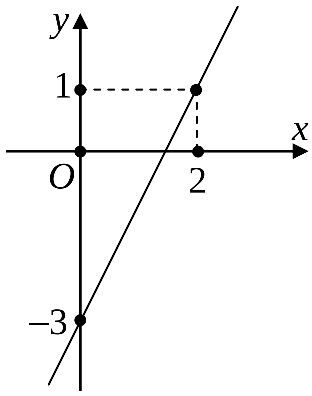
6. Известны координаты вектора $\vec{\mathbf{a}}(15,-8)$. Какую длину имеет вектор $\vec{\mathbf{a}}$?

а) 7; б) 23; в) $\sqrt{7}$; г) 17; д) 289.

7. Какое уравнение имеет прямая, изображенная на рисунке?

а) $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$; б) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$; в) $y=2x-3$;

г) $y=-2x+3$; д) $y=3x-2$.



8. Среди перечисленных выше прямых укажите ту, которая параллельна прямой $y=-2x-9$ и ту, которая перпендикулярна ей.

9. Вычислите $\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$.

а) 1; б) –1; в) –19; г) 13; д) 19.

10. Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 13 \\ -11 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & -15 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$.

11. Укажите область определения функции $y=\ln(4-x^2)$:

а) $[2,+\infty)$; б) $(-\infty,2)$; в) $[-2,2]$; г) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; д) $(-2,2)$.

12. Укажите область определения функции $y=\sqrt{x+9}$:

а) $[-3,+\infty)$; б) $(-\infty,3]$; в) $[-9,9]$; г) $(9,+\infty)$; д) $[-9,+\infty)$.

13. Укажите номера рисунков, на которых изображены графики функций $y=\sin x$, $y=\arcsin x$, $y=\ln x$, $y=e^x$ в том же порядке, в каком перечислены эти функции.

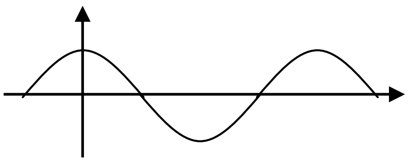


Рис. 1

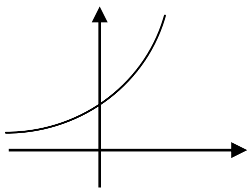


Рис. 2

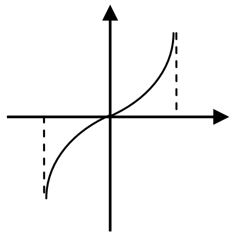


Рис. 3

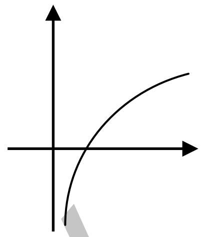


Рис. 4

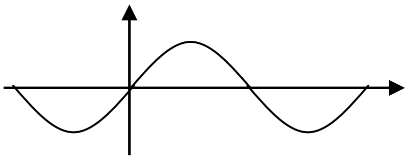


Рис. 5

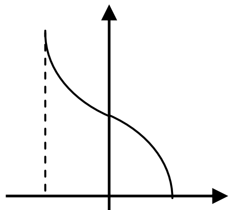


Рис. 6

14. Каждой из следующих функций $y=\frac{x^5}{5}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\ln x$, $y=\frac{1}{x}$ поставьте в соответствие ее производную (букву, которой она обозначена). Запишите эти буквы в том же порядке, в каком перечислены функции.

а) $y'=\frac{2}{x^2}$; б) $y'=\frac{\ln x}{x}$; в) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $y'=-\frac{2}{\sqrt{x}}$; д) $y'=\frac{x^4}{5}$;

е) $y'=x^4$; ж) $y'=\frac{1}{x}$; з) $y'=-\frac{1}{x^2}$.

15. $y=\sqrt{x^2+9}$. Найдите $y'(4)$.

а) $\frac{4}{5}$; б) 4; в) $\frac{1}{5}$; г) 5; д) 25.

16. На каком из указанных ниже промежутков возрастает функция $y=\frac{x^4}{2}-x^2$?

а) $(-1,1)$; б) $(-\infty,-1)$; в) $(0,1)$; г) $(0,+\infty)$; д) $(-1,0)$.

17. Функция $y=e^{x^4+4x}$ имеет единственную точку экстремума. Какому из следующих промежутков она принадлежит?

а) $(-\infty,-2)$; б) $(-2,0)$; в) $(0,2)$; г) $(2,4)$; д) $(4,+\infty)$.

18. Каждой из следующих функций $y=\frac{1}{x}$, $y=\operatorname{sh}x$, $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ поставьте в соответствие ее первообразную (букву, которой она обозначена). Запишите эти буквы в том же порядке, в каком перечислены функции.

а) $y=-\operatorname{ch}x+C$; б) $y=\operatorname{arctg}x+C$; в) $y=\ln x+C$; г) $y=\frac{\ln x}{x}+C$;

д) $y=\operatorname{ch}x+C$; е) $y=\operatorname{tg}x+C$.

19. Какая из следующих функций является частным решением дифференциального уравнения $y' = -y$?

а) $y = \cos x$; б) $y = -x$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = e^{-x}$; д) $y = \frac{1}{x}$.

В следующих вопросах варианты ответа не предлагаются

20. Комплект для игры в шахматы состоит из 32 фигур: 16 белых и 16 черных. Каждая сторона имеет по 8 пешек, 2 коня, 2 слона, 2 ладьи, одному королю и одному ферзю. Какова вероятность того, что выбранная наугад фигура окажется слоном?

21. Дан закон распределения случайной величины. Вычислите ее математическое ожидание.

X	0	4	6
P	1/6	1/2	1/3

22. С помощью правила Крамера найдите решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} 7x + 11y = 5, \\ 4x + 7y = 3. \end{cases}$$

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

Репетиционные и зачетные тесты размещены в системе дистанционного обучения учреждения образования «ВГУ имени П.М. Машерова» sdo.vsu.by. После вхождения в систему следует выбрать «Математический факультет», «Кафедра геометрии и математического анализа», «Высшая математика».

ОТВЕТЫ НА РЕПЕТИЦИОННЫЕ ТЕСТЫ

Тест № 1

1. д)	7. д)	13. 5,2,4,1	19. г)
2. в)	8. д), в)	14. е), г), а), ж)	20. 2/7
3. а), в), г)	9. а)	15. а)	21. 2
4. б)	10. в)	16. б), г)	22. $\left(-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)$
5. а)	11. г)	17. г)	23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. г)	12. б)	18. д), б), в)	

Тест № 2

1. в)	7. в)	13. 5, 3, 4, 2	19. г)
2. а)	8. г), а)	14. е), в), ж), з)	20. 1/8
3. б), в)	9. д)	15. а)	21. 4
4. в)	10. в)	16. д)	22. $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$
5. г)	11. д)	17. б)	23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. г)	12. д)	18. в) д) е)	

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Глава 1

1. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 15 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. а) 17; б) –3.

3. а) 90; б) –90; в) 420.

4. а) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; б) $(4,-1)$; в) $(1, 1, 1)$.

5. а) $(1, 1, 1)$; б) $(1, 2, 0)$.

6. а) $(13 \;\; 8)$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 2

1. а) $\overrightarrow{AQ}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{DB}$.

2. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AD}$.

3. $\vec{\mathbf{c}}(15, 8)$; $|\vec{\mathbf{c}}| = 17$.

4. $C(5, 10)$ $S = 20$ед^2; $h = 2\sqrt{10}$.

5. $AD = 6\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = 12$, $\cos\angle DAB = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

6. а) $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
$\angle C = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\angle A = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

б) AB: $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$; BC: $y = -3x + 15$.

7. $S = 16$ ед^2; BM: $y = -x + 3$.

8. а) $S = 80$ед^2; б) $O(-1;-1)$, AC: $y = -3x - 4$; BD: $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$;
в)* $B(5; 1)$, $D(-7;-3)$.

9. а) $S = 9$ед^2; б) $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

10. а) BC: $y = \frac{1}{2}x + 2$; AB: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; $\angle BAC = 45°$;

б) BD: $y = -2x + 12$, $D(4; 4)$; в) $M(2; 3)$, MN: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

11. а) 45°; б) $\operatorname{arctg} 2$.

12. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Глава 3

1. а) $13+\mathrm{i}$; б) $9+3\mathrm{i}$; в) $24-7\mathrm{i}$; г) $4+3\mathrm{i}$.

2. а) $\sqrt{2}(\cos 45°+\mathrm{i}\cdot\sin 45°)$; б) $2(\cos(-30°)+\mathrm{i}\cdot\sin(-30°))$;
в) $2\sqrt{2}(\cos 135°+\mathrm{i}\cdot\sin 135°)$.

3. а) $9+9\sqrt{3}\mathrm{i}$; б) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

4. а) $(-\infty,2]\cup[2,+\infty)$; б) $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$; в) $(0{,}5;+\infty)$;
г) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; д) $[2,3]$; е) $[1,4]$; ж) $(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$; з) $[-1,3]$;
и) $(-3,3)$; к) $\boldsymbol{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi k\}$; л) $[-1,0)\cup(0,1]$.

5. а) 3; б) $\frac{3}{4}$; в) 0; г) -3; д) $\frac{1}{2}$; е) ∞.

6. а) -1; б) 0.

7. а) $-\frac{7}{27}$; б) $\frac{9}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 10; д) $-\frac{1}{12}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{32}$; ж) 2; з) $-\frac{1}{2}$; и) $+\infty$; к) 0;
л) 2; м) $\frac{1}{5}$; н) 0; о) $\frac{1}{5}$; п) π^3; р) e^7; с) e^{21}; т) e^{-6}; у) e^2+1; ф) e^2+1.

8. а) $A=4$; б) разрыв неустранимый; в) $A=1$; г) $A=0$; д) $A=3$; е) $A=0$.

Глава 4

1. 1) $2x-4$; 2) x^3-x^2+2; 3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{3\sqrt{x}}{2}$; 5) $-\frac{2}{5x^3}$; 6) $\frac{2x}{a^2}+\frac{2a^2}{x^3}$;
7) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}+\frac{3\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$; 8) $40x^4+12x^2-20x$; 9) $3\cos x-2\sin x$;
10) $(x^2+1)\sin x-x\cdot\cos x$; 11) $\mathrm{tg}\,x+\frac{x}{\cos^2 x}$; 12) $-\frac{1}{1+\sin x}$; 13) $3a^x\ln a-\frac{1}{x}$;
14) $2e^x\cos x$; 15) $2^x e^x(\ln 2+1)$; 16) $15(1+3x^4)$; 17) $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
18) $\frac{4x+1}{3\sqrt[3]{(2x^2+x-1)^2}}$; 19) $\frac{3(1+x^2)^2(-x^2+2x+1)}{(1-x)^4}$; 20) $-2x\cdot\sin(x^2+1)$;
21) $\frac{4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$; 22) $2\sin 2x$; 23) $-2\sin(4x-2)$; 24) $\frac{2\sin^2 x}{\cos^4 x}$; 25) $\frac{6\ln(3x-1)}{3x-1}$;
26) $-2x\cdot e^{-x^2}$; 27) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; 28) $-\mathrm{tg}\,x$; 29) $-\frac{1}{x^2+1}$; 30) $\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$.

3. $v(0{,}5)=2$ м/с.

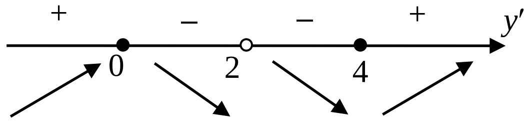
4. а) $y=-2x-1$; б) $y=-\frac{1}{4}x+2$; в) $y=\pi x+1-\frac{\pi}{4}$; г) $y=-2x+8$; д) $y=x+1$.

5. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$; $(3,7)$.

6. а) $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$;

$y'=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$; лок. максимум $y(0)=0$;

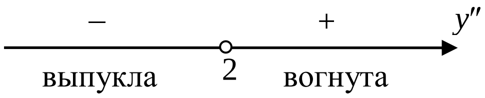
лок. минимум $y(4)=8$;

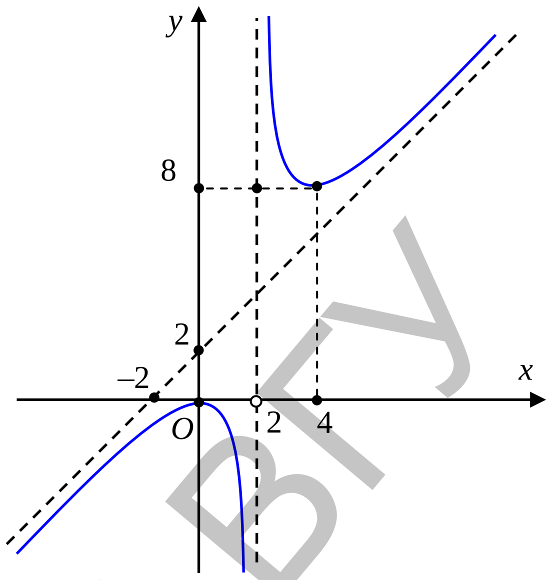


вертикальная асимптота: $x=2$;

наклонная асимптота: $y=x+2$;

$y''=\dfrac{8}{(x-2)^3}$;

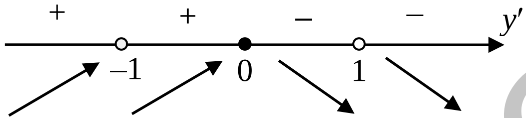




б) $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

функция является четной;

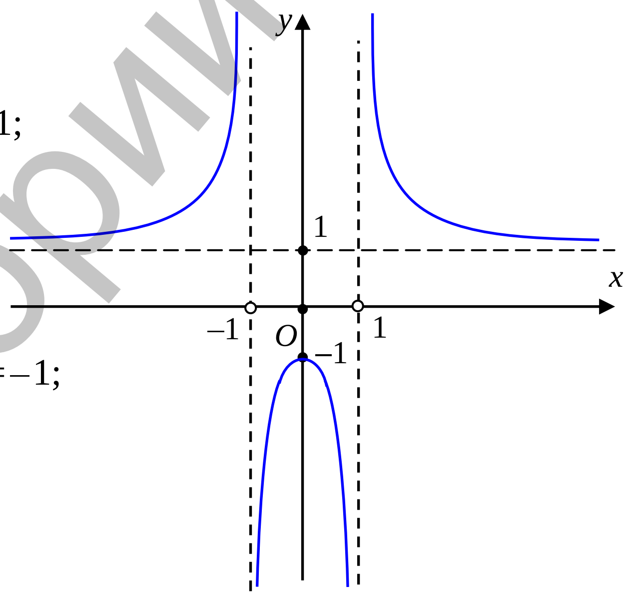
$y'=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$; лок. максимум $y(0)=-1$;



горизонтальная асимптота: $y=1$;

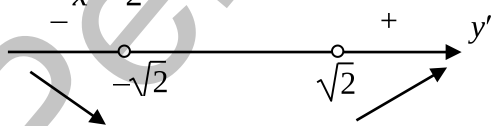
вертикальные асимптоты: $x=1$, $x=-1$;

$y''=\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}$;



в) $D(f)=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$;

$y'=\dfrac{2x}{x^2-2}$;

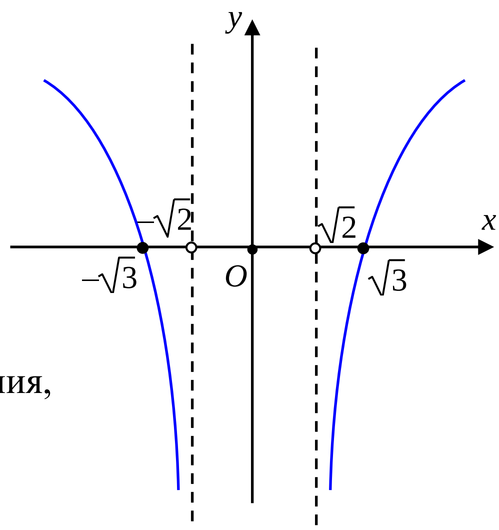


функция является четной.

вертикальные асимптоты: $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$;

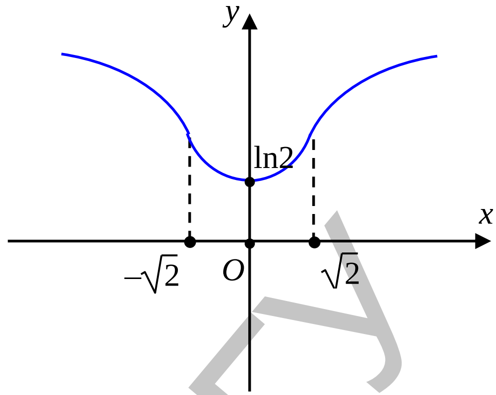
$y''=\dfrac{-2(x^2+2)}{(x-2)^2}<0$ на всей области определения,

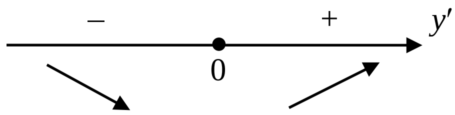
значит функция везде выпукла.



г) $D(f)=\boldsymbol{R}$;

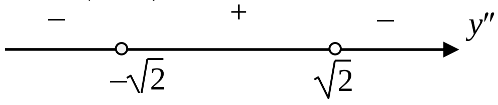
$y' = \dfrac{2x}{x^2+2}$; лок. минимум $y(0) = \ln 2$;





функция является четной; асимптот нет;

$y'' = \dfrac{-2(x^2-2)}{(x+2)^2}$

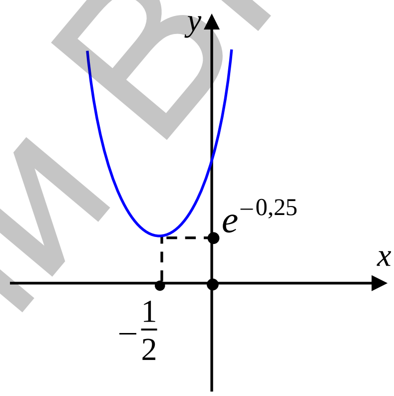


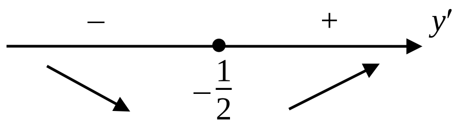
выпукла вогнута выпукла

д) $D(f) = \boldsymbol{R}$;

$y' = (2x+1)e^{x^2+x}$;

лок. минимум $y(-\frac{1}{2}) = e^{-0,25}$;

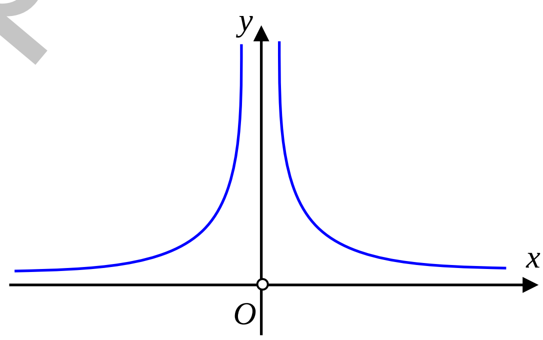


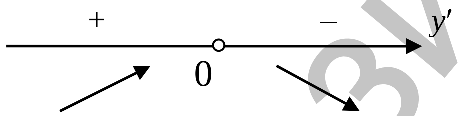


е) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$y' = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$;

локальных экстремумов нет;

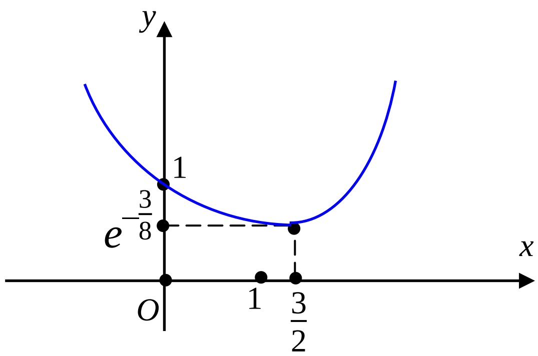




ж) $D(f) = \boldsymbol{R}$; $y' = \dfrac{2x-3}{3} e^{\frac{x^3}{3}-x}$

лок. минимум $y(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{3}{8}}$;

асимптот нет.



7. а) $y_{max} = y(1) = y(4) = 0$, $y_{min} = y(0) = y(3) = -4$;

б) $y_{max} = y(1) = 10,75$, $y_{min} = y(3) = -24,75$;

в) $y_{max} = y(-0,5) = y(0,5) = \sqrt{2}$, $y_{min} = y(-1) = y(1) = -1$.

8. а) 8,06; б) 5,03.

Глава 5

1. а) $z\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{3}{8}$; б) $z(0,0)=0$; в) $z\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{81}$.

2. а) $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$; б) $z'_x = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$, $z'_y = -\frac{2x^2}{y^3} + \frac{x}{y^2}$;

в) $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{\sqrt{x}}$, $z'_y = \frac{x}{x^2+y^2} + 2\sqrt{x}$.

3. $z_{max} = z(3,3) = 13$, $z_{min} = z(1,1) = -3$.

Глава 6

1. а) $\frac{x^3}{3} + 9x + C$; б) $\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$; в) $\ln|x| - \frac{4}{3x^3} + C$; г) $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + C$.

2. а) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} + C$; б) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3} + C$; г) $\frac{\sin^6 x}{6} + C$.

3. а) $x\cdot\sin x + \cos x + C$; б) $x\cdot\ln x - x + C$; в) $\sqrt{x}\cdot\ln x - 2\sqrt{x} + C$.

4. а) 2 ед^2; б) $\frac{8}{3}$ ед^2; в) $e-1$ ед^2. **5.** 128 м.

6. а) $5\ln|x-6| + 4\ln|x-6| + C$; б) $\ln|x-5| - \frac{3}{x-5} + C$. **7.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

8. $V = 8\pi$ ед^3, $S_{полн.} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{4913}+31)$ ед^3.

Глава 7

1. а) $y = -\frac{4}{\ln(x^2+1)+C}$; б) $y = \operatorname{arctg}(x^2+x+C)$; в) $y = \sin(C - e^{-x})$.

2. а) $y = 4(x+1)e^{-x}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}-6}$.

3. а) $y = Cx^2 - x$; б) $(x+y)e^{\frac{x}{x-y}} - Cx^2 = 0$; в) $e^{\frac{y^2}{2x^2}} - Cx = 0$.

4. а) $y = 2x^3 + x^2$; б) $y = \sin x - 2\cos x$; в) $y = \frac{2x^3+3x^2+12}{x+1}\cdot e^x$.

5. а) $y = e^{-x}(\sin 3x + \cos 3x)$; б) $y = e^{5x}(x-1)$.

6. $\begin{cases} x = \ \ 2C_1e^{-2t} + C_2\alpha_2e^{5t}, \\ y = -C_1\beta_1e^{-2t} + 3C_2\beta_2e^{5t}. \end{cases}$

Глава 8

1. 40320. **2.** $\frac{1}{24}$. **3.** 720. **4.** 120. **5.** 14. **6.** $\frac{1}{40}$. **7.** $\frac{1}{2}$.

8. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{18}$; в) $\frac{1}{12}$. **9.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$. **10.** 0,3.

11. а) $\frac{39}{400} \approx 9{,}8\%$; б) $\frac{29679}{160000} \approx 18{,}5\%$. **12.** $\frac{1}{120}$. **13.** 0,28. **14.** $\frac{5}{33}$.

15. а) 0,68; б) 0,898; в) 0,898. **16.** 0,183. **17.** 0,84. **18.** 0,71. **19.** $\frac{5}{16}$.

20. 0,176. **21.** 0,335. **22.** а) 0,92; б) 0,659.

23.

X	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$MX = 1\frac{2}{3}$; $DX = \frac{5}{9}$.

24.

X	0	10	20	50	100
$p(x)$	0,83	0,08	0,06	0,02	0,01

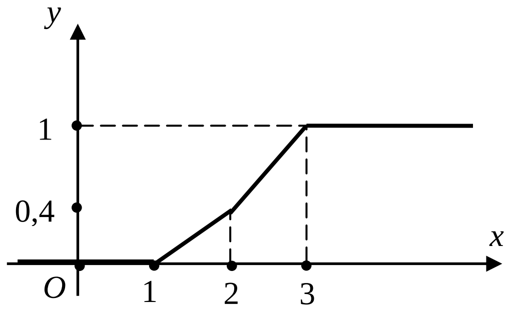
$MX = 4$; $DX = 166$.

25.

X	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$MX = \frac{3}{4}$; $DX = \frac{11}{16}$.

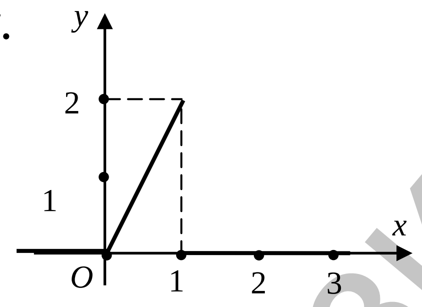
26.



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0{,}4x - 0{,}4, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}6x - 0{,}8, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$MX = 2{,}1$; $DX \approx 0{,}32$.

27.



а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

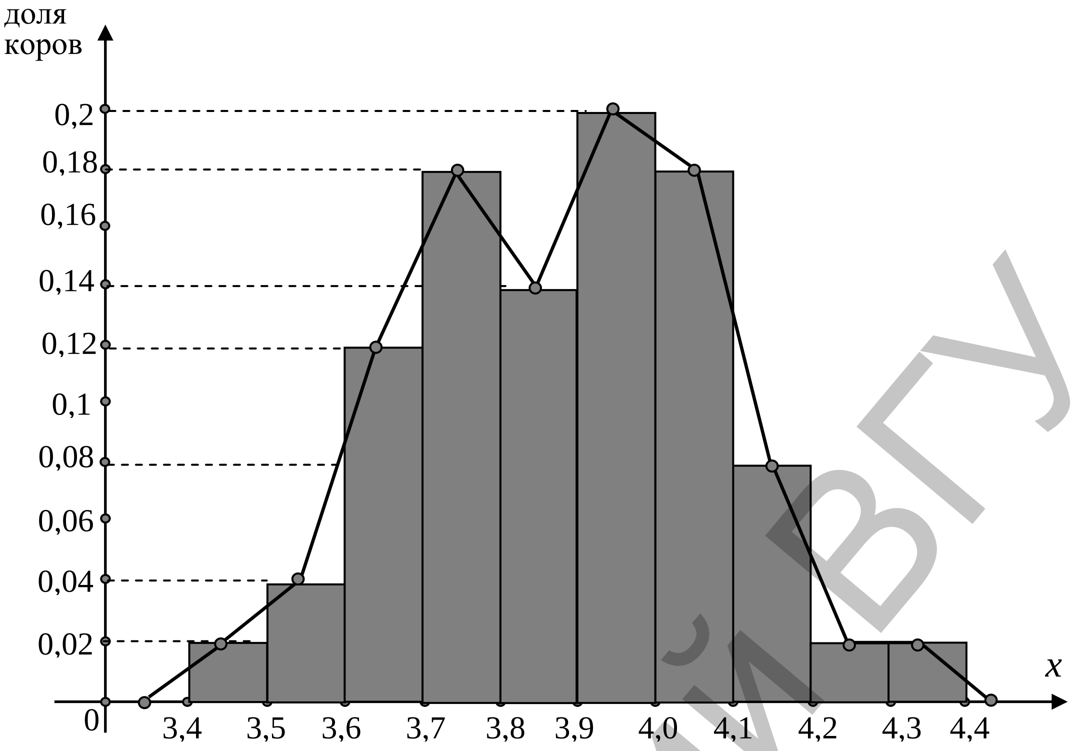
б) $MX = \frac{2}{3}$; $DX = \frac{1}{18}$.

в) 0,25; г) 0,75.

28. $\frac{1}{2}$. **29.** $\overline{x}_B = -1{,}57$; $D_B = 14{,}66$.

30.

Жирность	Кол-во коров	Доля коров	Жирность	Кол-во коров	Доля коров
3,41 – 3,50	1	0,02	3,91 – 4,00	10	0,2
3,51 – 3,60	2	0,04	4,01 – 4,10	9	0,18
3,61 – 3,70	6	0,12	4,11 – 4,20	4	0,08
3,71 – 3,80	9	0,18	4,21 – 4,30	1	0,02
3,81 – 3,90	7	0,14	4,31 – 4,40	1	0,02



ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	1,00	0,2420	2,00	0,0540	3,00	0,0044
0,05	0,3984	1,05	0,2299	2,05	0,0488	3,05	0,0038
0,10	0,3970	1,10	0,2179	2,10	0,0440	3,10	0,0033
0,15	0,3945	1,15	0,2059	2,15	0,0396	3,15	0,0028
0,20	0,3910	1,20	0,1942	2,20	0,0355	3,20	0,0024
0,25	0,3867	1,25	0,1826	2,25	0,0317	3,25	0,0020
0,30	0,3814	1,30	0,1714	2,30	0,0283	3,30	0,0017
0,35	0,3752	1,35	0,1604	2,35	0,0252	3,35	0,0015
0,40	0,3683	1,40	0,1497	2,40	0,0224	3,40	0,0012
0,45	0,3605	1,45	0,1394	2,45	0,0198	3,45	0,0010
0,50	0,3521	1,50	0,1295	2,50	0,0175	3,50	0,0009
0,55	0,3429	1,55	0,1200	2,55	0,0154	3,55	0,0007
0,60	0,3332	1,60	0,1109	2,60	0,0136	3,60	0,0006
0,65	0,3230	1,65	0,1023	2,65	0,0119	3,65	0,0004
0,70	0,3123	1,70	0,0940	2,70	0,0104	3,70	0,0004
0,75	0,3911	1,75	0,0863	2,75	0,0091	3,75	0,0004
0,80	0,2897	1,80	0,0790	2,80	0,0079	3,80	0,0003
0,85	0,2780	1,85	0,0721	2,85	0,0069	3,85	0,0002
0,90	0,2661	1,90	0,0656	2,90	0,0060	3,90	0,0002
0,95	0,2541	1,95	0,0596	2,95	0,0051	3,95	0,0002

Таблица 2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,15	0,0596	0,30	0,1179	0,45	0,1736	0,60	0,2257
0,01	0,0040	0,16	0,0636	0,31	0,1217	0,46	0,1772	0,61	0,2291
0,02	0,0080	0,17	0,0675	0,32	0,1255	0,47	0,1808	0,62	0,2324
0,03	0,0120	0,18	0,0714	0,33	0,1293	0,48	0,1844	0,63	0,2357
0,04	0,0160	0,19	0,0753	0,34	0,1331	0,49	0,1879	0,64	0,2389
0,05	0,0199	0,20	0,0793	0,35	0,1368	0,50	0,1915	0,65	0,2422
0,06	0,0239	0,21	0,0832	0,36	0,1406	0,51	0,1950	0,66	0,2454
0,07	0,0279	0,22	0,0871	0,37	0,1443	0,52	0,1985	0,67	0,2486
0,08	0,0319	0,23	0,0910	0,38	0,1480	0,53	0,2019	0,68	0,2517
0,09	0,0359	0,24	0,0948	0,39	0,1517	0,54	0,2054	0,69	0,2549
0,10	0,0398	0,25	0,0987	0,40	0,1554	0,55	0,2088	0,70	0,2580
0,11	0,0438	0,26	0,1026	0,41	0,1591	0,56	0,2123	0,71	0,2611
0,12	0,0478	0,27	0,1064	0,42	0,1628	0,57	0,2157	0,72	0,2642
0,13	0,0517	0,28	0,1103	0,43	0,1664	0,58	0,2190	0,73	0,2673
0,14	0,0557	0,29	0,1141	0,44	0,1700	0,59	0,2224	0,74	0,2703

0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,56	0,4406	1,98	0,4761	2,40	0,4918
0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,58	0,4429	2,00	0,4772	2,42	0,4922
0,77	0,2794	1,18	0,3810	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,44	0,4927
0,78	0,2823	1,20	0,3949	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,46	0,4931
0,80	0,2881	1,22	0,3888	1,64	0,4495	2,08	0,4803	2,48	0,4934
0,82	0,2939	1,24	0,3924	1,66	0,4515	2,08	0,4812	2,50	0,4938
0,84	0,2995	1,26	0,3962	1,68	0,4535	2,10	0,4821	2,52	0,4941
0,86	0,3051	1,28	0,3997	1,70	0,4554	2,12	0,4830	2,56	0,4948
0,88	0,3106	1,30	0,4032	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,60	0,4953
0,90	0,3159	1,32	0,4066	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,70	0,4965
0,92	0,3212	1,34	0,4099	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,80	0,4974
0,94	0,3264	1,36	0,4131	1,78	0,4625	2,20	0,4861	2,90	0,4981
0,96	0,3315	1,38	0,4162	1,80	0,4608	2,22	0,4868	3,00	0,4987
0,98	0,3365	1,40	0,4195	1,82	0,4656	2,24	0,4875	3,10	0,4993
1,00	0,3413	1,42	0,4222	1,84	0,4671	2,26	0,4881	3,20	0,4997
1,02	0,3461	1,44	0,4251	1,86	0,4686	2,28	0,4887	3,40	0,4997
1,04	0,3508	1,46	0,4279	1,88	0,4699	2,30	0,4893	3,60	0,4998
1,06	0,3554	1,48	0,4306	1,90	0,4713	2,32	0,4898	3,80	0,49993
1,08	0,3599	1,50	0,4332	1,92	0,4726	2,34	0,4904	4,00	0,49997
1,10	0,3643	1,52	0,4357	1,94	0,4738	2,36	0,4909	4,50	0,49999
1,12	0,3686	1,54	0,4382	1,96	0,4750	2,38	0,4913	5,00	0,5000

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

Д.у. – дифференциальное уравнение
М.О. – математическое ожидание
СЛУ – система линейных уравнений

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин, И.И. Высшая математика / И.И. Баврин. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1975.
3. Гильдерман, Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов/ Ю.И. Гильдерман. – Новосибирск: Наука, 1974.
4. Гросман, С. Математика для биологов / С. Гросман, Дж. Тернер. – М.: Высшая школа, 1983.
5. Гусак, А.А. Высшая математика / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2001.
6. Гусак, А.А. Сборник задач и упражнений по высшей математике / А.А. Гусак. – Минск: Вышэйшая школа, 1980.
7. Подоксенов, М.Н. Индивидуальные задания по аналитической геометрии и высшей алгебре с примерами решения задач / М.Н. Подоксенов, В.В. Бабич. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2009. – 40 с.

Учебное издание

ПОДОКСЕНОВ Михаил Николаевич
ШЛАПАКОВ Сергей Алексеевич
КОЧЕРГИНА Ольга Юрьевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Технический редактор *Г.В. Разбоева*
Корректор *Т.В. Образова*
Компьютерный дизайн *И.В. Волкова*

Подписано в печать 04.08.2014. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 11,57. Уч.-изд. л. 11,17. Тираж 150 экз. Заказ 98.

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014 г.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.