

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

МИНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО

---

На правах рукописи

ГУРСКИЙ Евгений Иванович

**„Теория вероятностей с элементами  
математической статистики“,  
„Сборник задач по теории  
вероятностей и математической  
статистике“ и их методическое  
обоснование**

13.00.02 — методика преподавания (математики)

## **А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

*диссертации на соискание ученой степени  
кандидата педагогических наук*

МИНСК  
1973

**(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)**

МИНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

---

На правах рукописи

**Е.И.ГУРСКИЙ**

**"ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ", "СБОРНИК ЗАДАЧ ПО  
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ"  
И ИХ МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ**

**13.00.02 - методика преподавания  
(математики)**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата педагогических наук**

Минск - 1973

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена на кафедре высшей математики Минского высшего инженерного эскадронно-ракетного училища противовоздушной обороны

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук А.И.ЯБЛОНСКИЙ, кандидат педагогических наук, доцент А.Б.БАСИЛЕВСКИЙ.

Ведущее учебное заведение: Минский радиотехнический институт.

Автореферат разослан "17" *марта* 1973 г.

Защита диссертации состоится "19" *апреля* 1973 г. в 10 часов на заседании Совета по присуждению ученых степеней Минского ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института имени А.М.Горького по адресу: Минск, ул.Советская, 18, главный корпус, ауд. № 330.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета Т.КУРИЛЕНКО.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 3 -

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. Автоматическое управление производственными процессами, насущные технические проблемы автоматизации и телемеханики вызвали бурное развитие теории автоматического регулирования как теоретической основы автоматизации и телемеханики. Но теория автоматического регулирования не могла достаточно полно отразить процесс работы автоматических систем без использования вероятностных методов.

Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, при оценке качества продукции и для многих других целей.

Поэтому вопросы методики преподавания теории вероятностей и математической статистики являются весьма важными в работе кафедры высшей математики инженерно-технических и экономических высших учебных заведений.

При изучении курса "Теория вероятностей и математическая статистика", как и при изучении любого раздела курса высшей математики, наибольшую трудность вызывает применение теории для решения практических и прикладных задач. Существует очень мало руководств к практическим занятиям по теории вероятностей и математической статистике, которые в определенной системе подробно знакомят бы студентов с методами решения задач и помогали бы им приобрести необходимые навыки.

Настоящая диссертация посвящена разработке методики построения, изложения и закрепления курса теории вероятностей и математической статистики.

В качестве диссертации представлены:

- 1) "Теория вероятностей с элементами математической статистики". М., "Высшая школа", 1971, объем 17 печ.л.
- 2) "Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике". Минск, МВИЗРУ, 1970, объем 22 печ.л.
- 3) Методическое обоснование принципов написания учебного пособия и сборника задач по теории вероятностей и математической статистике, объем 5 печ.л.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 4 -

Учебное пособие "Теория вероятностей с элементами математической статистики" и "Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике" уже вышли из печати и достаточно доступны для ознакомления. Поэтому в автореферате будут изложены только вопросы методической части диссертации.

Работа состоит из введения, двух глав и заключения.

Во введении дается анализ программ по теории вероятностей и математической статистике для инженерно-технических и экономических специальностей. Анализ программы по элементам теории вероятностей и математической статистике для инженерно-технических специальностей показал, что в ней нет вопросов, связанных с изучением системы случайных величин. Отмечается, что включение вопросов, относящихся к системе двух случайных величин, и обобщение их на произвольную систему случайных величин в значительной мере облегчает методику изучения элементов теории корреляции в математической статистике.

Во введении дается также краткий анализ учебной литературы по теории вероятностей и математической статистике. Указывается, что с учебной литературой по теории вероятностей и математической статистике, особенно для инженерных и экономических специальностей, дело обстоит неблагоприятно. Широко распространенные учебные пособия В.Е.Гмурмана<sup>1)</sup> и Л.З.Румшиского<sup>2)</sup> имеют существенные недостатки: они предельно формальны, и по ним начинающему читателю почти невозможно установить связь общей теории с задачами практики.

Учебник Е.С.Вентцель<sup>3)</sup> обладает достаточно высоким уровнем в педагогическом и научном отношении и устанавливает систематические и обоснованные связи с практикой. Однако, несмотря на большой объем учебника (свыше 30 печ.л.), он не обеспечивает полностью материалом существующую программу по теории вероятностей и математической статистике.

---

1) В.Е.Г м у р м а н. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., "Высшая школа", 1963.

2) Л.З.Р у м л и с к и й. Элементы теории вероятностей, М., "Наука", 1960.

3) Е.С.В е н т ц е л ь. Теория вероятностей. М., "Наука", 1964.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 5 -

В первой главе диссертации рассматриваются вопросы методики, связанные с написанием учебного пособия "Теория вероятностей с элементами математической статистики".

Учебное пособие написано на основе курса теории вероятностей и математической статистики, который автор читал в течение более десяти лет слушателям Минского высшего инженерного зенитно-ракетного училища, и предназначается для лиц, знакомых с высшей математикой в объеме программы высших технических учебных заведений.

Кроме теоретического материала в конце каждой главы имеются подробно составленные вопросы и предложения для самопроверки, а также приводится достаточное количество задач по каждому разделу курса, что в значительной мере способствует усвоению излагаемого материала.

В первом параграфе первой главы рассматриваются вопросы, связанные с определением вероятности случайного события и основными правилами ее вычисления. Основной особенностью методики изложения этих вопросов является то, что на основании сложной частоты события и статистического определения вероятности случайного события вводится аксиомы теории вероятностей. В силу этого вероятность события обладает основными свойствами частоты события и, следовательно, данная теория хорошо согласуется с опытом.

Второй параграф первой главы посвящается методике изложения вопросов, связанных с понятием случайной величины.

Понятие случайной величины является фундаментальным понятием теории вероятностей и играет большую роль в ее приложениях.

Случайная величина является своего рода абстрактным выражением случайного события, и роение многих практических задач, связанных со случайными событиями, переводят на язык случайных величин. Поэтому в работе обращается внимание на методику перевода в общем виде задачи с языка случайных событий на язык случайных величин.

Основной характеристикой случайной величины является ее закон распределения. Величина считается полностью описанной с

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 6 -

вероятностной точки зрения лишь в том случае, если задан ее закон распределения. В связи с этим учебное пособие особое внимание уделяет вопросам методики изложения различных форм закона распределения случайной величины.

Для дискретных случайных величин рассматривается закон распределения в форме ряда распределения, многоугольника распределения и функции распределения. Для непрерывных случайных величин — функции распределения, плотность распределения и кривая распределения. Подчеркивается, что функция распределения является универсальной формой закона распределения, так как она существует для дискретных и непрерывных случайных величин. Однако для описания непрерывных случайных величин используется плотность распределения: она дает более наглядное представление о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности или другой точки числовой оси и имеет широкое применение при решении практических задач.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, а достаточно иметь о ней только некоторое общее представление.

Для общей характеристики случайной величины используются числовые характеристики, которые в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности того или иного распределения.

Основными числовыми характеристиками являются математическое ожидание и дисперсия, которые рассматриваются во второй и четвертой главах учебного пособия. Это объясняется тем, что во второй главе для полного изучения основных числовых характеристик случайной величины нет еще достаточной теоретической базы. Такая методика изложения вопросов, связанных с изучением математического ожидания и дисперсии, объясняется тем, что они являются основными параметрами законов распределений и, следовательно, необходимы при изучении частных законов распределений, т.е. законов распределений, которым подчиняются отдельные случайные величины, удовлетворяющие определенным условиям. Кроме того, при изучении случайных величин, имеющих кон-

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 7 -

кретный закон распределения, очень важным с практической точки зрения является определение их среднего значения.

На практике при решении задач, связанных со случайными величинами, основная трудность состоит в определении вида закона распределения, которому подчиняется случайная величина. Поэтому при рассмотрении частных законов распределений особое внимание обращается на общую постановку задачи, приводящей к конкретному закону распределения, и на основные особенности, которыми обладает случайная величина, подчиняющаяся указанному закону распределения.

Методике изложения вопросов, относящихся к системам случайных величин, рассматривается в третьем параграфе первой главы.

Все вопросы, связанные с описанием системы случайных величин, излагаются для системы двух случайных величин, а затем обобщаются для произвольной системы.

Особое внимание уделено методике изложения числовых характеристик системы случайных величин и понятию зависимости или независимости случайных величин, которое является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

При рассмотрении свойств корреляционного момента и коэффициента корреляции подчеркивается, что величина коэффициента корреляции  $r_{xy}$  характеризует, насколько зависимость между случайными величинами  $X$  и  $Y$  близка к линейной. Чем меньше по абсолютной величине коэффициент корреляции  $r_{xy}$ , тем сильнее отклоняется зависимость между величинами  $X$  и  $Y$  от линейной.

Чтобы отличать зависимость и независимость случайных величин от связи между случайными величинами, которая характеризуется коэффициентом корреляции, вводится понятие коррелированных и некоррелированных случайных величин. Подчеркивается, что только для системы случайных величин, подчиняющейся нормальному закону, понятия некоррелированности и независимости равносильны. В общем случае случайные величины могут быть зависимыми, но некоррелированными.

Особое внимание уделено методике изучения условных законов распределения и связанных с ними различных характеристик.

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 8 -

Наиболее важной характеристикой является условное математическое ожидание, которое выражает изменение средних размеров одной случайной величины при изменении возможных значений другой случайной величины.

Функция  $x = m_x(y)$ , выражающая изменение средних размеров случайной величины  $X$  в области возможных значений величины  $Y$ , называется регрессией  $X$  по  $Y$ . Аналогична функция  $y = m_y(x)$ , выражающая изменения средних размеров случайной величины  $Y$  в области возможных значений случайной величины  $X$ , называется регрессией  $Y$  по  $X$ .

Уравнения

$$\begin{aligned}x &= m_x(y), \\y &= m_y(x)\end{aligned}$$

называются уравнениями регрессии, а линии, определяемые этими уравнениями, называются линиями регрессии.

В учебном пособии подчеркивается, что для системы случайных величин, подчиняющихся нормальному закону, линии регрессии являются прямыми линиями, проходящими через центр рассеивания системы.

При решении задач, связанных с оценкой точности работы реальных автоматических систем, точности производства отдельных элементов системы, часто приходится рассматривать функции одной или нескольких случайных величин. Такие функции также являются случайными величинами. Поэтому при изучении курса теории вероятностей студенты должны овладеть методикой определения законов распределения таких функций и их числовых характеристик.

В четвертом параграфе первой главы рассматриваются вопросы методики определения законов распределения функции одной случайной величины и функции нескольких случайных величин, когда известен закон распределения случайных аргументов, а также вопросы методики определения числовых характеристик таких функций.

Основной особенностью методики определения закона распределения функции нескольких случайных величин в учебном пособии является то, что мы исходим из задачи функционального преобразования системы случайных величин.

## - 9 - (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Рассматривая задачу определения числовых характеристик функции случайных аргументов, особое внимание обращаем на те случаи, когда для нахождения математического ожидания и дисперсии функции случайных аргументов даже не требуется знания законов распределения аргументов, а достаточно иметь только некоторые их числовые характеристики. Эти случаи в учебном пособии сформулированы в виде теорем и играют очень большую роль в теории вероятностей и ее приложениях.

В конце четвертого параграфа излагается вопрос, связанные с характеристическими функциями и применением их к решению задачи композиции законов распределения.

В пятом параграфе рассматриваются предельные теоремы теории вероятностей, устанавливающие соотношения между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и событий при большом числе испытаний. Уделяется также внимание теоремам, касающимся предельных законов распределения.

Теоремы, устанавливающие соотношения между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и событий, объединяются под общим названием закона больших чисел. Закон больших чисел, занимающий важнейшее место в теории вероятностей, является связующим звеном между теорией вероятностей как математической наукой и закономерностями случайных явлений при массовых наблюдениях над ними. Закон больших чисел играет очень важную роль в практических приложениях теории вероятностей к явлениям природы и техническим процессам, связанным с массовым производством.

Доказательство теорем закона больших чисел основывается на неравенстве П.Л.Чебышева.

Основной теоремой, касающейся предельных законов распределения, является центральная предельная теорема теории вероятностей. Она устанавливает условия, при которых предельный закон распределения суммы

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

## (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 13 -

ние классных занятий, и особенно для студентов заочного обучения, которым приходится самостоятельно изучать курс теории вероятности и математической статистики. Многие учащиеся, сверив правильность полученного ответа, заканчивают на этом решение задачи, не анализируя полученного решения. Опыт работы показывает, что студенты при решении задач по теории вероятностей очень часто получают правильный ответ при совершенно неправильном решении задачи. Поэтому в сборнике приводятся не только конечные ответы ко всем задачам, но и промежуточные ответы, когда основная задача представлено в виде составной. Кроме того, ответы многих задач сопровождаются указанными или полным их решением. Читателю это не мешает пытаться самостоятельно решить каждую из предложенных задач и только в особо трудных для него случаях обращаться к дополнительным задачам или к решению, которое приведено в ответах.

В четвертом параграфе рассматриваются некоторые методические рекомендации к проведению практических занятий с помощью сборника.

Целевая обучающаяся и приобретение опыта самостоятельной работы — одна из наиболее важных обязанностей преподавателя. Преподаватель, стремящийся развить способности студентов к решению задач, должен пробудить в них известный интерес к этим задачам и обеспечить им широкие возможности для подражания и приобретения опыта.

Методика проведения практических занятий может быть различной, но в основном — двух типов. Это зависит от того, впервые ли преподаватель приступил к решению задач по данной теме или соответствующие задачи решались на предыдущих занятиях. В первом случае должен происходить коллективный разбор условия и плана решения предложенной задачи под руководством преподавателя. После того как найден путь решения задачи, преподаватель предлагает записать ее решение. Во втором случае не следует разбирать решение предложенной задачи до тех пор, пока все учащиеся самостоятельно некоторое время не подумали над ней.

В сборнике задач, как уже указывалось, для каждого упражнения имеется набор задач, к которым дано по несколько дополни-

# (ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

- 19 -

тельных вопросов и которые должны быть предварительно решены в случае, если учащийся встретит затруднения при решении основной задачи. Эти дополнительные вопросы, по существу, являются планом решения задачи. Поэтому, решая их, учащийся приобретает некоторые навыки составления плана решения последующих задач.

Опыт работы со сборником задач позволяет сделать вывод, что он полезен как при проведении практических занятий в аудитории обычными методами, так и с применением технических средств группового контроля в автоматизированном классе АИ-15 ("Миллиарк"). Сборник оказался особенно полезным при выполнении студентами домашнего задания и работе с заочниками.

В заключении работы указывается, что учебное пособие полностью обеспечивает как изучение раздела "Элементы теории вероятностей и математической статистики" программы общего курса высшей математики для вузов, так и изучение программы специального курса "Основы теории вероятностей", утвержденного учебно-методическим управлением по высшему образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР.

Сборник задач написан в соответствии с указанным выше учебным пособием, и пользование сборником будет наиболее эффективным, если учащийся будет обращаться к нему в порядке закрепления пройденного материала учебного пособия по отдельным главам, а в некоторых случаях по отдельным параграфам.

Сборником задач можно пользоваться при изучении теоретического материала по другим учебным пособиям по выбору рекомендованных для студентов инженерно-технических и экономических специальностей высших учебных заведений.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

Г. И.И.Г у р з и я. Теория вероятностей с элементами комбинаторической статистики. М., "Высшая школа", 1971.

В. И.И.Г у р з и я. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Минск, ИИЭАН, 1970.