
УДК 512.542

О локальном задании множеств Хартли конечной группы

Т. Б. Караулова (Беларусь, г. Витебск)
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова
e-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

On the local specification of Hartley sets of a finite group

T. B. Karaulova (Belarus, Vitebsk)
Masherov Vitebsk State University
e-mail: tatyana.vasilevich.1992@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [1]. Локальный метод изучения конечных разрешимых групп с помощью радикалов и классов Фиттинга был предложен Хартли [2]. Идея локализации Хартли состоит в изучении классов групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых отображениями (локальными H-функциями или функциями Хартли) множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел во множества классов Фиттинга. Благодаря развитию локального метода Гашюцом, Фишером и Хартли в [3] были обобщены классические теоремы Силова и Холла. Ими было установлено, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то разрешимая группа имеет точно один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов.

Классом Фиттинга называют класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ любая группа G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппа V группы G называется:

(1) $\mathfrak{F}$-максимальной, если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$ при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$;

(2) $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \cap K$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой K для всякой субнормальной подгруппы K группы G.

Следуя [4], множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют фиттинговым множеством G, когда выполняются следующие условия: (1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$; (2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$; (3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Понятие $\mathcal{F}$-инъектора группы для фиттингова множества группы G определяется аналогично как и для класса Фиттинга.

Следуя [5], функцию $h : \mathbb{P} \longrightarrow \{$фиттинговы множества группы $G\}$ назовем функцией Хартли (или кратко H-функцией) группы G. Напомним, что произведением $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ фиттингова множества группы G и класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ [6] называется множество подгрупп $\{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$.

Символы $\mathfrak{E}_{p'}$, $\mathfrak{N}_p$ обозначают соответственно класс всех p'-групп, всех нильпотентных p-групп.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а π — некоторое подмножество множества $\mathbb{P}$. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π', то есть $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Следует отметить, что идея локализации состоит в изучении фиттинговых множеств группы G, определяемых локальными H-функциями. Фиттингово множество $\mathcal{F}$ группы G называется локальным [7], если $\mathcal{F} = \cap_{p \in \pi} h(p) \circ (\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'})$ для некоторой H-функции h группы G.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, h — функция Хартли группы G и $HS(h) = \cap_{p\in\pi} h(p) \circ (\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p)$. Фиттингово множество $\mathcal{H}$ группы G назовем множеством Хартли группы G, если $\mathcal{H} = HS(h)$ для некоторой h-функции h.

Основной результат работы следующая

Теорема 1. *Каждое множество Хартли $\mathcal{H}$ группы G является локальным фиттинговым множеством.*

Нетрудно показать, что обратное неверно.

Теорема 2. *Существует локальное фиттингово множество, которое не является множеством Хартли $\mathcal{H}$ группы G.*

Пусть V — $\mathcal{H}$-инъектор группы G. Заметим, что для доказательства теоремы 2 достаточно указать некоторые примеры групп, для которых фактор $V/G_{\mathcal{H}}$ не нильпотентен.

Если $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга всех p-замкнутых групп и фиттингово множество $\mathcal{H} = \{H \leq G : H \in \mathfrak{H}\}$ — след класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ в группе G, то $G_{\mathfrak{H}} = G_{\mathcal{H}}$ и $Inj_{\mathfrak{H}}(G) = Inj_{\mathcal{H}}(G)$. Поэтому для построения примера не нильпотентного фактора можно взять класс $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}$ [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. — Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3(19), № 2. P. 193-207.
3. Gaschütz W., Fischer B., Hartley B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Vol. 102, № 5. S. 337-339.
4. Anderson W. Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. 1975. Vol. 36, № 3. P. 333-338.
5. Воробьёв Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. журн. 1996. № 37(6). С. 1296-1302.
6. Семёнов М. Г. Формула инъектора конечной π-разрешимой группы // Проблемы физики, математики и техники. 2014. Т. 21, № 4. С. 77-88.
7. Yang N. On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group // Comm. Algebra. 2018. Vol. 46, № 1. P. 217-229.

УДК 512.542

О конечных группах со слабо субнормальными подгруппами Шмидта

В. Н. Княгина (Беларусь, г. Гомель)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: knyagina@inbox.ru