на рабочий стол лазерного комплекса и запускают программу изготовления деталей. Выполняется лазерная гравировка поверхности деталей с одновременным вырезанием деталей по контуру. Вначале выполняются гравировки. В последнюю очередь детали вырезаются по контурам.

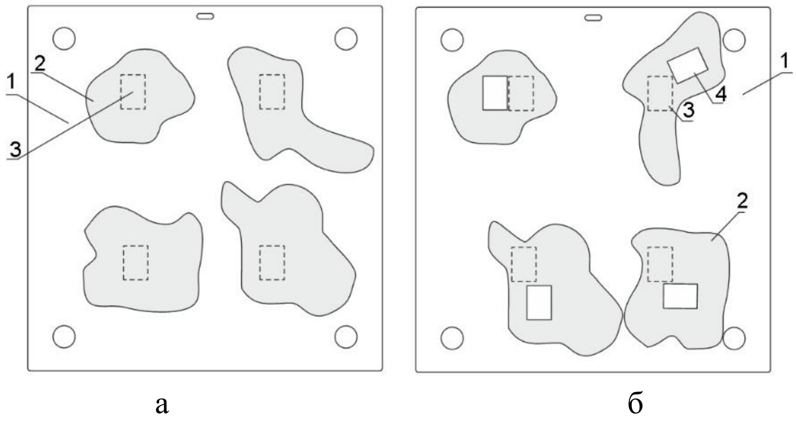

Рисунок 2 – Схема вырезания деталей

За один рабочий цикл изготавливается восемь деталей – по две в каждом гнезде 4. Расположение декоративных деталей в гнездах изображено на рисунке 3. После изготовления деталей заготовки переклеиваются согласно схеме 5б таким образом, что гнезда 4 перекрываются неиспользованными участками заготовок.

Заключение. Предлагаемая автоматизированная технология лазерной обработки мелких деталей значительно сокращает время процесса, расходы на изготовление резаков и шаблонов, способствуют экономии сырья и трудовых ресурсов. Кроме этого, повышается качество изготовленных деталей, расширяется их ассортимент.

1. Буевич, Т. В. Анализ технологического оборудования для лазерной обработки / Т. В. Буевич, А. А. Жукова, В. Н. Якимук // Тезисы докладов 52 Международной научно-технической конференции преподавателей и студентов / УО «ВГТУ». – Витебск, 2019. – С. 215–216.

2. Буевич, Т. В. Технологическая оснастка для лазерной гравировки деталей верха обуви / Т. В. Буевич, А. Э. Буевич // Инновационные технологии в текстильной и легкой промышленности : Материалы Международной научно-технической конференции, Витебск, 13-14 ноября 2019 г. / УО «ВГТУ». – Витебск, 2019. – С. 141–143.

3. Кибицкий, Д. А. Выполнение лазерной перфорации на деталях верха обуви / Д. А. Кибицкий, А. Э. Буевич, // XVII Машеровские чтения : материалы международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Витебск, 20 октября 2023 г. : в 2 т. / Витеб. гос. ун-т ; редкол.: Е.Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – Т. 1. – С. 20–23. – URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/40535 (дата обращения: 10.03.2024).

САМОПОДОБНОЕ ОДНОРОДНОЕ ЛОРЕНЦЕВО МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ ЛИ $SE(1,1)$

Линкевич М.В.,

студент 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Подоксёнов М.Н., канд. физ.-мат. наук, доцент

Пусть $E(1,1)$ – группа Ли движений плоскости Минковского, а $G_3 = SE(1,1)$ – её компонента связности единичного элемента. Цель данной работы: доказать, что группа Ли G_3, снабжённая левоинвариантной лоренцевой метрикой, может быть самоподобным многообразием, и что такое многообразие единственно с точностью до изометрии.

Материал и методы. Рассматривается группа Ли $G_3 = SE(1,1)$, снабженная левоинвариантной лоренцевой метрикой. Используются методы теории групп и алгебр Ли.

Результаты и их обсуждение. Преобразование $f: M \to M$ риманова или лоренцева многообразия (M, g) называется *подобием* с коэффициентом e^{ν} ($\nu = \mathrm{const}$), если любой точки $p \in M$ и любых векторов $X, Y \in T_p M$ выполнено $g(f_* X, f_* Y)_{f(p)} = e^{2\nu} g(X, Y)_p$. Однопараметрическая группа подобий называется *существенной*, если она не сводится к группе изометрий для некоторой метрики, конформно эквивалентной g. Многообразие (M, g) называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий.

Пусть G – алгебра Ли, снабженная скалярным произведением. Назовем линейное преобразование $f: G \to G$ *автоподобием*, если оно является подобием и автоморфизмом алгебры Ли. Назовем алгебру Ли G *самоподобной*, если она допускает однопараметрическую группу автоподобий, которая не является группой изометрий.

Пусть g – левоинвариантная метрика на связной группе Ли G. Любое подобие $h: G \to G$ однородного пространства (G, g), раскладывается в композицию $L_a \circ f$, где f – подобие, оставляющее единичный элемент $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг, $a \in G$. Поэтому задача поиска подобий многообразия (G, g) сводится к поиску подобий, оставляющих неподвижной единицу группы Ли. Такие подобия определяются автоподобиями соответствующей алгебры Ли, если группа Ли является экспоненциальной [1].

Алгебру Ли группы G_3 обозначим $G_3 = E(1,1)$. Она является разрешимой. Две левоинвариантные метрики на группе Ли G_3 мы будем относить к одному классу, если соответствующие однородные многообразия изометричны.

Группа Ли G_3 и алгебра Ли G_3 имеют следующие матричные представления:

$$X = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x_1 & \operatorname{sh} x_1 & x_2 \\ \operatorname{sh} x_1 & \operatorname{ch} x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

($u_i \in \boldsymbol{R}, i = 1,2,3$; $x_j \in \boldsymbol{R}$, $j = 1,2,3$) с операциями умножения и коммутатора матриц. Припишем матрицам (1) соответственно координаты (x_1, x_2, x_3) и (u_1, u_2, u_3). Эти координаты будем называть естественными. В базисе в G_3, составленном из матриц

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

операция скобки задаётся равенствами $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_3] = E_2$, $[E_2, E_3] = \vec{0}$.

В работе [2] мы нашли формулы, по которым действуют экспоненциальное отображение $\exp: G_3 \to G_3$ и обратное к нему отображение:

$$x_1 = u_1,\ x_2 = \frac{u_2}{u_1} \operatorname{sh} u_1 + \frac{u_3}{u_1} (\operatorname{ch} u_1 - 1),\ x_3 = \frac{u_3}{u_1} \operatorname{sh} u_1 + \frac{u_2}{u_1} (\operatorname{ch} u_1 - 1).$$

$$u_1 = x_1,\ u_2 = \frac{x_1 x_2 \operatorname{sh} x_1}{2(\operatorname{ch} x_1 - 1)} - \frac{x_1 x_3}{2},\ u_3 = \frac{x_1 x_3 \operatorname{sh} x_1}{2(\operatorname{ch} x_1 - 1)} - \frac{x_1 x_2}{2}.$$

Эти формулы показывают, что группа Ли G_3 является экспоненциальной, а экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом.

Там же мы нашли матрицу Грама лоренцевого скалярного произведения, при котором алгебра Ли G_3 допускает однопараметрическую группу автоподобий, и выписали матрицу, описывающую действие такой группы в базисе (E_1, E_2, E_3):

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [F(t)] = e^{3\nu t} \begin{pmatrix} e^{-3\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \nu t & \operatorname{sh} \nu t \\ 0 & \operatorname{sh} \nu t & \operatorname{ch} \nu t \end{pmatrix}, \ \nu = \mathrm{const} > 0,\ t \in \boldsymbol{R}.$$

Формулы левого сдвига:

$$L_X(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \operatorname{ch} x_1 + y_3 \operatorname{sh} x_1, x_3 + y_3 \operatorname{ch} x_1 + y_2 \operatorname{sh} x_1).$$

Используя их, мы находим матрицу дифференциала $(L_X)_*: T_Y G_3 \to T_{XY} G_3$ и обратную к ней матрицу W:

$$[(L_X)_*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}x_1 & \mathrm{sh}x_1 \\ 0 & \mathrm{sh}x_1 & \mathrm{ch}x_1 \end{pmatrix}, \quad W = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}x_1 & \mathrm{sh}x_1 \\ 0 & \mathrm{sh}x_1 & \mathrm{ch}x_1 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *На группе Ли $G_3 = SE(1,1)$ существует единственный класс левоинвариантных лоренцевых метрик, при которых она допускает существенную однопараметрическую группу подобий, оставляющую инвариантной единичный элемент группы. Матрица метрического тензора и формулы, по которым действует указанная однопараметрическая группа подобий, имеют следующий вид относительно естественных координат:*

$$[g(x)] = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x1} & e^{-x1} \\ e^{-x1} & e^{2x1} & -e^{2x1} \\ e^{-x1} & -e^{2x1} & e^{2x1} \end{pmatrix};$$

$$f_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1, e^{3\nu t}(x_2 \mathrm{ch}\,\nu t + x_3 \mathrm{sh}\,\nu t), e^{3\nu t}(x_2 \mathrm{sh}\,\nu t + x_3 \mathrm{ch}\,\nu t)),$$

где $\nu = \mathrm{const} > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.

2. *Полная группа подобий полученного многообразия является связной, четырехмерной, и состоит из преобразований, действующих по формулам*

$$\begin{cases} x_1' = h_1 + x_1, \\ x_2' = h_2 + e^{3\nu t} x_2 \mathrm{ch}(h_1 + \nu t) + e^{3\nu t} x_3 \mathrm{sh}(h_1 + \nu t), \\ x_3' = h_3 + e^{3\nu t} x_2 \mathrm{sh}(h_1 + \nu t) + e^{3\nu t} x_3 \mathrm{ch}(h_1 + \nu t), \end{cases}$$

где $H(h_1, h_2, h_3)$ – произвольный элемент группы Ли G_3, $\nu = \mathrm{const} > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Заключение. Мы построили самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(1,1)$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой. Воспользовавшись рабочей книгой Excel, разработка которой описана в [3], мы выяснили, что это многообразие не является плоским. Ненулевыми компонентами тензора кривизны типа (4.0) являются $R_{1212} = 1{,}5$, и получающиеся из неё перестановкой индексов.

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой / М.Н.Подоксёнов // Весник Витебского государственного ун-та. – 2011. – №5.– С.10-15. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/4581 (дата обращения: 25.03.2024).

2. Podoksenov, M.N. Special three-dimensional lie algebra and its group of autoisomorphisms / M.N.Podoksenov, M.V. Linkevich // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов XI Международной научной конференции, посвященной памяти В.А. Романькова (Омск, 15 марта 2024 г.) – Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2024. P. 24-26.

3. Подоксёнов, М.Н. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли / М.Н. Подоксёнов, Ю.А. Шпакова // Математические структуры и моделирование. 2023. № 2(67) С. 16-22.

ФИЗИКА И МЕДИЦИНА

Митько Д.Д., Томашевич А.С.,

студенты 1 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь

Научный руководитель – Буевич Т.В., канд. техн. наук, доцент

Человек ежедневно сталкивается с различными физическими явлениями, функционирование организма подчиняется физическим законам. Развитие познаний в медицине исторически связано с развитием физики как науки и наоборот: существует множество подтверждений тому, что большое количество физических понятий и явлений появилось благодаря исследованиям и наблюдениям медиков. Тема работы актуальна и познавательна для развития и расширения кругозора.