УДК 373.3.016:51

Приемы укрупнения ключевых задач

В.В. Устименко, А.В. Виноградова
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

Важной составной частью изучения школьного курса геометрии является обучение школьников решению геометрических задач. Многими методистами реализуется идея рассмотрения взаимосвязанных задач. Принципы создания таких задач у разных авторов нередко различаются.

Особо следует выделить подход, который включает в себя выделение системы ключевых задач (под ключевой понимают такую задачу, к которой можно свести решение некоторого количества задач той или иной темы). От учащегося требуется не только прочное знание условия, рисунка и решения ключевой задачи, но и умение «видеть» ее в данной задаче. Таким образом, вместе с целью научиться решать задачи одновременно ставится и другая – знать и уметь решать ключевые задачи.

Актуальность исследования определяет возникшее противоречие между необходимостью осуществления динамического развития методов решения ключевых задач в контексте деятельностного подхода и особенностями традиционной методики обучения учащихся средней школы. В данной статье рассматривается проблема укрупнения ключевых задач в школьном курсе геометрии, а также вопрос о том, как практически образовать на основе конкретной ключевой задачи некоторый блок новых задач, взаимосвязанных между собой по линии укрупнения своих решений.

Ключевые слова: *укрупнение действия, ключевые задачи, блоки взаимосвязанных задач.*

Ways of integration of key problems

V.V. Ustimenko, A.V. Vinogradova
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

An important part of the study of school Geometry course is to teach students the solution of geometric problems. A lot of methodologists implement the idea of considering interrelated problems. Principles of creation of such problems by various authors often differ.

Special attention should be given to the approach that includes selection of the system of key tasks (a key problem is considered to be the problem, to which the solution of a number of problems of one or another topic can be reduced). The student is required not only to solidly know of the conditions, the figure and solutions of the key problem, but also to be able to «see» it in this task. Thus, within the goal to learn to solve problems, another goal is set – to know and be able to solve key problems.

The relevance of the research determines the contradiction between the need to implement a dynamic development of methods of solving key problems in the context of activity approach and the features of the traditional methods of teaching high school students. This paper addresses the problem of consolidation of key problems in school Geometry course as well as the issue of how to practically form a definite key problem based block of new tasks related to each other through the consolidation of their solutions.

Key words: *integration of the operation, key problems, the blocks of interrelated problems.*

В настоящее время в учебных планах, регламентирующих процесс обучения в общеобразовательной школе, наметилась тенденция к сокращению количества часов на изучение математических дисциплин. Одновременно происходит возрастание требований к качеству приобретенных учащимися знаний, умений и навыков. В связи с этим обострились многие методические проблемы преподавания математики, в том числе проблема обучения школьников решению задач.

Как показывает анализ научно-методической литературы, идея рассмотрения взаимосвязанных задач в методике преподавания математики не нова. Примеры создания таких задач, объединяемых авторами в блоки, системы, совокупности и т.д., можно встретить в работах И.В. Ульяновой, Т.А. Лепехиной, Р.Г. Хазанкина, Э.Г. Готмана, Г.В. Дорофеева, И.Е. Дразнина, Т.М. Калинкиной, Е.С. Канина, И.А. Кушнира, Н.С. Мельника, Г.И. Саранцева, Г.В. Токмазова, Б.Ф. Харитонова, П.М. Эрдниева и др. Принципы их образования у разных авторов нередко различаются. Например, рассмотрим укрупненное упражнение П.М. Эрдниева, являющееся «главным оружием теории УДЕ» и представляющее собой «многокомпонентное задание, образующееся из нескольких логически разнородных, но психологически состыкованных в некоторую целостность частей: а) решение обычной «готовой» задачи; б) составление обратной задачи и ее решение; в) составление аналогичной задачи по данной формуле (тождеству) или уравнению и решение ее; г) составление задачи по некоторым элементам, общим с исходной задачей; д) решение или составление задачи, обобщенной по тем или иным параметрам исходной задачи» [1]. Нетрудно заметить, что оно представляет собой блок взаимосвязанных задач, в котором одна задача (представленная в пункте а) является основной, а другие – ее производными, полученными на ее основе.

Вместе с тем Р.Г. Хазанкин [2] предлагает использовать при изучении геометрии ключевые задачи. Под ключевой задачей автор понимает такую задачу, к которой можно свести решение некоторого количества задач той или иной темы. Для отбора ключевых задач предлагается следующий порядок действий:

1. Внимательно проанализировать всевозможные способы решения как каждой задачи по теме, так и всех задач в целом.
2. Разбить все задачи темы на группы, которые включают, по возможности, максимальное количество задач, решения которых осуществляются при помощи одной и той же задачи (которая, скорее всего, уже сформулирована как одна из этих задач). Она и будет ключевой задачей для данной группы.
3. Из выбранных таким образом ключевых задач создают новую группу, которая должна включать не более 7–8 (иногда 10) подобных задач.

Кроме этого в методической литературе были определены и другие способы объединения геометрических задач. Однако независимо от того или иного способа ученые, рассматривающие подобные задачи, указывали на многие их достоинства и широкие возможности применения в обучении школьников. Так, например, применение взаимосвязанных задач в учебном процессе, по словам Э.Г. Готмана, позволяет учащимся лучше усвоить метод их решения [3]. По мнению И.В. Ульяновой, ожидаемый при этом результат можно значительно улучшить, если задачи, входящие в тот или иной блок, оказываются взаимосвязанными между собой главным образом по линии укрупнения своих решений. То есть связи между ними носят не столько содержательный (хотя это тоже возможно), сколько процессуальный характер, так как на первое место здесь выступает связь между процессами их решений. Эта связь характеризуется в первую очередь не наличием общей закономерности или общего метода решения таких задач, а тем, что каждая последующая из них в данном блоке расширяет (укрупняет) решение любой из предшествующих ей в нем задач посредством выполнения одного или более новых действий. Другими словами, решение каждой последующей в блоке задачи содержит в себе как составную часть решение одной из предшествующих ей в нем задач. Такие задачи предоставляют реальную возможность укрупнения действий, адекватных методам решения, что способно оказывать положительное воздействие на процесс усвоения школьниками данных методов [4].

Цель данного исследования заключается в определении методических приемов укрупнения ключевых задач.

Материал и методы. Материалом для исследования послужил многолетний опыт работы авторов со школьниками. В работе использованы методы сравнительно-сопоставительного и системно-комплексного анализа научно-методической литературы, эмпирические и логические методы исследования.

Результаты и их обсуждение. Предположим, что у нас имеется некоторая задача-1, для решения которой каким-либо конкретным методом необходимо выполнить определенную последовательность действий. Эти действия взаимосвязаны между собой. Каждое последующее из них опирается на результат выполнения предыдущего, а вместе они направлены на достижение одной цели: получение ответа в задаче-1, выполнение ее требования. Эту совокупность действий определим как одно целое, укрупненное действие-1. Если далее мы расширим задачу-1 до задачи-2 (т.е. решение задачи-2 будет непосредственно опираться на решение задачи-1), то действия, способствующие решению второй задачи некоторым методом, будут взаимосвязаны между собой так же, как и действия первой задачи. Поэтому их совокупность определим как новое целое, укрупненное действие-2. Решение задачи-2 включает в себя решение задачи-1. Часть действий из тех, что способствуют решению задачи-2, тождественна действиям в решении задачи-1. Значит, к предыдущим действиям мы просто добавили несколько новых и получили действие-2. Таким образом, действие-2 содержит в себе действие-1 как структурный элемент (в качестве более мелкого действия). Тогда действие-2 есть укрупненное действие-1.

Таким образом можно расширить любую геометрическую задачу, однако нас будет интересовать вопрос: как можно на практике расширить ту или иную наиболее важную задачу для данной темы, т.е. как практически образовать на основе конкретной ключевой задачи некоторый блок новых задач, взаимосвязанных между собой по линии укрупнения своих решений (блок укрупненных ключевых задач)? Поиск ответа на этот вопрос требует выделения возможных приемов укрупнения ключевых задач по геометрии.

Как показывает анализ выделяемых в научно-методической литературе возможных приемов образования взаимосвязанных между собой по содержательной линии задач, наиболее применимым для укрупнения геометрических задач является прием постановки нового требования задачи при сохранении неизменным ее условия. Для подтверждения этого обратимся к следующему задачному блоку:

1.1. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны 10 см, 5 см, 8 см соответственно. Найти высоту трапеции.

1.2. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны 10 см, 5 см, 8 см соответственно. Найти диагонали трапеции.

1.3. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны 10 см, 5 см, 8 см соответственно. Найти угол между диагоналями трапеции.

Задачи, составляющие этот блок, имеют одинаковые условия, но разные требования. При их решении традиционным методом (связанным с использованием различных соотношений в трапеции) можно выделить такие действия, адекватные их решению, которые представлены в табл.

Из табл. видно, что постановка нового требования задачи действительно дает возможность укрупнения ее решения. В некотором случае в блоке задач задачу 3 можно решить, не используя предварительных действий, но тогда не будет укрупнения. Процесс решения задачи есть деятельность, результат которой зависит не только от вида выполняемых действий, но и от места следования их друг за другом. Методический прием постановки нового требования задачи будет способствовать укрупнению ее решения каким-либо методом, когда решение новой (укрупненной) задачи дополнит количество «старых» действий новыми и с обязательным сохранением последовательности выполнения.

Возможность изменения условия задачи при некотором изменении ее требования вызывает предположение, что изменение ее условия и при сохранении требования также будет способствовать укрупнению задач по геометрии. Для подтверждения обратимся к примерам:

2.1. Дана трапеция ABCD, основания которой равны 10 и 24, а боковые стороны – 13 и 15. Найти высоту трапеции.

2.2. Дана равнобедренная трапеция ABCD, основания которой равны 3, 10, а боковая сторона – 5. Найти высоту трапеции.

2.3. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Основания трапеции равны 4 см, 10 см. Найти высоту трапеции.

Следует отметить, что в случае постановки нового условия задачи также происходит укрупнение ее решения каким-либо конкретным методом. Однако этот прием менее эффективный и более сложный в обращении, чем прием постановки нового требования.

Решения указанных выше задач, в связи с построением дополнительных линий (построение высоты, диагоналей трапеции), способствуют выделению еще одного приема образования блоков укрупненных задач: приема укрупнения чертежа, соответствующего данной задаче, посредством построения в нем каких-либо новых линий (одной или более). Для демонстрации его сущности обратимся к задачам 3.1–3.3.

Таблица

<table>
<tr><td>Задача</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>1.3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Действия, адекватные решению задачи</td><td colspan="3">1) нахождение длины AE как полуразности длин оснований $\left(AE = \dfrac{AD - BC}{2}\right)$;
2) нахождение длины BE из треугольника ABE по теореме Пифагора;</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">3) нахождение длины ED вычитанием из AD длины AE;
4) нахождение длины BD из треугольника BED по теореме Пифагора;
5) нахождение длины AC из треугольника ACF по теореме Пифагора;</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6) нахождение площади трапеции по формуле $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE$;
7) нахождение угла между диагоналями трапеции из формулы $S = \dfrac{d_1 d_2 Sin\alpha}{2}$.</td></tr>
</table>

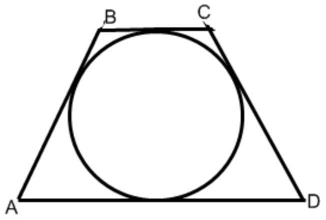

Рис. 1.

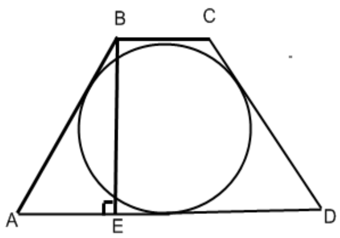

Рис. 2.

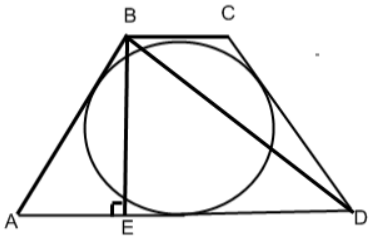

Рис. 3.

3.1. В трапецию ABCD вписана окружность. Основания трапеции равны 6 см и 10 см, соответственно. Найти боковую сторону (рис. 1).

3.2. В трапецию ABCD вписана окружность. Основания трапеции равны 6 см и 10 см, соответственно. Найти высоту трапеции (рис. 2).

3.3. В трапецию ABCD вписана окружность. Основания трапеции равны 6 см и 10 см, соответственно. Найти диагональ трапеции (рис. 3).

Чертежи, соответствующие задачам 3.2 и 3.3, расширяют чертеж задачи 3.1 посредством построения высоты и диагонали. Расширять чертеж, адекватный той или иной задаче, можно не только, строя новые линии внутри границ, задаваемых самой крупной из образующих его фигур, но и выходя за эти границы.

Укрупнение чертежа задачи, осуществляемое построением в нем новых линий, позволяет укрупнять действия, адекватные конкретному методу решения этих задач. В этом случае нередко происходит увеличение числа совершаемых действий, характерных для решения предыдущей задачи. При этом возможно выделить два варианта расширения чертежа:

1) чертеж каждой новой задачи содержит в себе в качестве основного элемента чертеж одной и той же задачи. (Так, в чертежах задач 3.2 и 3.3 легко обнаружить как основную часть чертеж задачи 3.1, содержащий трапецию и вписанную в нее окружность);

2) чертеж каждой новой задачи являет собой результат расширения чертежа только что решенной задачи.

Укрупнение задачи через расширение ее чертежа, постановку нового требования или использование какого-либо другого возможного приема допускает также рассмотрение аналогов задач, их обобщений или конкретизации и т.д. Приведем пример обобщения первого блока задач:

4.1. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны *a* см, *b* см, *c* см, соответственно. Найти высоту трапеции.

4.2. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны *a* см, *b* см, *c* см, соответственно. Найти диагонали трапеции.

4.3. В равнобедренной трапеции ABCD стороны AD, AB, BC равны *a* см, *b* см, *c* см, соответственно. Найти угол между диагоналями трапеции.

При определении приемов образования блоков укрупненных задач невозможно пройти мимо взаимно обратных задач.

Систему действий (таких, что осуществление каждого (i+1)-го действия опирается на результат выполнения i-го действия), способствующих решению задачи-1 каким-либо методом, определим как одно целое укрупненное действие-1. Для решения задачи-2, обратной к задаче-1, также можно выделить совокупность действий, адекватных методу ее решения ($m = n$, если методы решения одинаковы; если они разные, то количество действий разное, $m \neq n$). Эти действия взаимосвязаны между собой, как и действия на задаче-1, поэтому они также образуют укрупненное действие. Однако действие-1 и действие-2, подобно задачам 1 и 2, являются взаимно обратными друг к другу, так как то, что было неизвестным в задаче-1, становится известным в задаче-2. И наоборот, известное в задаче-1 становится неизвестным, которое надо найти, в задаче-2. Объединение же двух взаимно обратных действий представляет собой одно целое действие, названное нами укрупненным действием.

Подтверждается возможность образования блоков укрупненных задач по геометрии, т.е. возможность осуществления укрупнения действий, адекватных методам их решения. И это на фоне того, что прием рассмотрения взаимно обратных задач является эффективным средством анализа задачи, проясняющим для учеников ее математическую сущность через осознание ими, например, связей между величинами задачи; средством, позволяющим школьникам осуществлять самоконтроль за правильностью решения, а также развивать собственные творческие способности и интеллектуальные возможности и т.д. В то же время обращение к взаимно обратным задачам позволяет осуществить сочетание разных методов их решения. В качестве примера приведем следующую пару таких задач.

5.1. В четырехугольнике ABCD, противоположные стороны которого равны и параллельны, проведена диагональ BD. Найдите величину угла ABC четырехугольника, если его периметр равен 84 см, AD = 24 см, а периметр треугольника ABD равен 72 см.

5.2. В прямоугольнике ABCD проведена диагональ BD. Найдите периметр треугольника ABD, если периметр данного прямоугольника равен 84 см, AD = 24 см.

Заключение. Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что образовывать блоки укрупненных ключевых задач (взаимосвязанных между собой по линии укрупнения своих решений), предоставляющих нам возможность осуществлять укрупнение действий, адекватных различным методам их решений, наиболее вероятно посредством комплекса методических приемов, включающих в себя:

1) замену требования задачи каким-либо новым требованием;
2) замену условия задачи каким-либо новым условием;
3) расширение чертежа задачи (через построение в нем новых линий);
4) рассмотрение аналогов задач, их обобщение и конкретизацию;
5) использование обратных задач.

Включение таких блоков в учебный процесс всегда будет подразумевать использование деятельностного подхода, причем во всех трех значениях, наиболее употребимых в методике обучения математике. Действительно, нетрудно заметить, что при решении подобных задач:

- происходит выделение действий, адекватных методам их решений, которые (методы) являются предметным содержанием процесса обучения математике;
- выстраиваются алгоритмы решения последующих в блоке задач. Тем самым школьники обучаются возможным способам решения данных задач. Кроме того, неоднократное повторение действий, способствующих решению блочных задач, позволяет учащимся самостоятельно «открывать» те или иные существенные моменты в решении, не замеченные ими первоначально и позволяющие им выявлять новые способы решений;
- осуществляются изучение школьниками различных эвристических приемов, выполнение ими контроля и самоконтроля за совершаемыми действиями и т.д. Очевидно, что приобретаемые ими при этом знания будут выступать как деятельность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с.
2. Халамайзер, А.В. Об опыте работы учителя Р.Г. Хазанкина / А.В. Халамайзер // Математика в школе. – 1987. – № 4. – С. 16–21.
3. Готман, Э.Г. Вариации задачи о квадрате и вписанном в него треугольнике / Э.Г. Готман // Математика в школе. – 1991. – № 1. – С. 26–28.
4. Ульянова, И.В. Обучение школьников методам решения геометрических задач в контексте укрупнения дидактических единиц: дис. ... канд. пед. наук / И.В. Ульянова. – Саранск, 2002. – 182 с.

Поступила в редакцию 20.02.2012. Принята в печать 14.06.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: alla.vin@inbox.ru – Виноградова А.В.