УДК 512.542

О гипотезе Локетта для классов Фиттинга конечных групп

Е.Н. Залесская, Ж.П. Макарова
Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»

Класс Фиттинга F назовем классом Локетта, если имеет место $F=F^*$, где F^* – наименьший из классов Фиттинга, содержащий класс Фиттинга F такой, что $(G \times H)_{F^*} = G_{F^*} \times H_{F^*}$ для всех групп G и H. Класс Фиттинга F удовлетворяет гипотезе Локетта, если справедливо равенство $F_* = F^* \cap S_*$. Доказано, что если $F = (S_{PR})_* Y$, где Y – такой локальный класс Фиттинга, что $S_{PR} \cap Y = (1)$, то F удовлетворяет гипотезе Локетта и не является классом Локетта. Доказано также, что если $H = F_* Y_i$, где F – конструкция класса Фиттинга, предложенная Бергером и Косси, $\{Y_i \mid i \in I\}$ – семейство насыщенных радикальных гомоморфов таких, что $Y_i \cap Y_j = (1)$, $\bigcup_{i \in I} Y_i = E$, то найдется такое $i \in I$, что класс Фиттинга H не удовлетворяет гипотезе Локетта.

Ключевые слова: *класс Фиттинга, класс Локетта, гипотеза Локетта, локальный класс Фиттинга, формация, радикальный гомоморф.*

On Lockett conjecture for Fitting classes of finite groups

E.N. Zalesskaya, Zh.P. Makarova
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

By Lockett class we shall mean Fitting class F if $F=F^*$ is valid, where F^* – the least out of Fitting classes that contains such Fitting class F that the equation $(G \times H)_{F^*} = G_{F^*} \times H_{F^*}$ is valid for all G and H groups. Fitting class F meets Lockett conjecture if the equation $F_* = F^* \cap S_*$ is valid. It is proved that if $F = (S_{PR})_* Y$, where Y – local Fitting class is such that $S_{PR} \cap Y = (1)$, then F meets Lockett conjecture and is not Lockett class. It is also proved that if $H = F_* Y_i$, where $i \in I$ and F – Fitting class construction proposed by Berger and Cossey and $\{Y_i \mid i \in I\}$ – a family of saturated radical homomorphs such that $Y_i \cap Y_j = (1)$, $\bigcup_{i \in I} Y_i = E$, then there will appear such $i \in I$ that Fitting class H does not meet Lockett conjecture.

Key words: *Fitting class, Lockett class, Lockett conjecture, local Fitting class, formation, radical homomorph.*

Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Классическими объектами исследования в теории классов групп и ее приложениях являются разрешимые группы. Более полуторавековая история развития теории разрешимых групп связана с крупнейшими достижениями в этой области.

Со второй половины 1960-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Напомним, что классом Фиттинга (или радикальным классом) называется класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и их произведений.

Впервые классы Фиттинга упоминаются в статье Фишера [1] в 1966 году. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [2] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп. В первой статье (1966 г.) классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям – классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Классы Фиттинга замкнуты относительно нормальных подгрупп и прямого произведения нормальных X-подгрупп. Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга получалось из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы. Ввиду двойственности формацию называют корадикальным классом (класс Фиттинга – радикальный класс). Двойственность наблюдается и в теории F-проекторов (формации) и F-инъекторов (классы Фиттинга).

Следует отметить, что сам термин «класс Фиттинга» возник исходя из долгосрочной программы структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х. Фиттингом, в которой впервые систематически использовался нильпотентный радикал групп. В дальнейшем классы Фиттинга стали рассматриваться и как самостоятельные объекты изучения.

В 70-е годы XX века сформировался ряд проблем, связанных с построением структурной теории классов Фиттинга. Среди них центральное место занимала общая проблема определения структуры класса Фиттинга, известная в теории классов групп под названием «гипотеза Локетта». Ее возникновение обусловлено результатами Блессеноля–Гашюца [3] и Локетта [4], которые в терминах радикалов определили два обширных семейства классов Фиттинга: нормальные классы и классы, которые в дальнейшем стали называть классами Локетта.

Напомним, что нормальный класс Фиттинга – такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, у которого в любой группе G ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G, и что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [4] сопоставляет класс $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта [4], если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

Гипотеза Локетта [4]. Каждый ли класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение некоторого нормального класса Фиттинга и класса Локетта, порожденного $\mathfrak{F}$?

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий гипотезе Локетта, будем называть $\mathfrak{L}$-классом. Если же класс $\mathfrak{F}$ не является $\mathfrak{L}$-классом, то мы будем называть его $\overline{\mathfrak{L}}$-классом.

Примечателен тот факт, что первоначально гипотеза Локетта была подтверждена для следующих отдельных случаев локального класса Фиттинга: наследственного (Брайс, Косси, 1975 г., [5]), классов вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi R}$ (Бейдлеман, Хаук, 1979 г., [6]), классов вида $\mathfrak{X}(\cap_{p\in\pi}\ \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi R})$ (Дерк, Хоукс, 1992 г., [7]). Для произвольных локальных классов Фиттинга указанная гипотеза подтверждена в разрешимом случае в 1988 году Н.Т. Воробьевым [8] и в произвольном случае в 1996 году Галледжи [9]. Кроме того, Е.Н. Залесской совместно с Н.Т. Воробьевым [10] была подтверждена гипотеза Локетта для ω-локальных классов Фиттинга заданной характеристики, причем эти классы являлись классами Локетта. Вместе с тем Бергер и Косси [11] установили, что это предположение неверно для нелокальных классов Фиттинга.

Заметим, что семейство классов Локетта обширно: оно содержит наследственные и обобщенно наследственные классы Фиттинга (классы Фишера), а также классы Фиттинга, замкнутые относительно гомоморфных образов или конечных подпрямых произведений (в частности, формации Фиттинга).

Ввиду результата Дерка и Хоукса X.6.1 [7] естественно следующее обобщение гипотезы Локетта и понятия $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-класса.

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-гипотеза. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$, если справедливо равенство*

$$\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{X}_*.$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тогда мы будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Однако проблема описания классов Фиттинга, не являющихся классами Локетта и удовлетворяющих гипотезе Локетта, остается попрежнему актуальной. В данной работе описаны новые классы Фиттинга, не являющиеся классами Локетта и удовлетворяющие гипотезе Локетта, а также построен новый контрпример к гипотезе Локетта.

1. Вспомогательные результаты

Теорема 1.1 [4, с. 164]. *Если $\mathfrak{F}$ – некоторый класс Фиттинга и $\mathfrak{X}$ – насыщенный радикальный гомоморф, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{X})^*=\mathfrak{F}^*\mathfrak{X}$.*

Теорема 1.2 [7, с. 682]. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{X}^*\subseteq\mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{X}_*\subseteq\mathfrak{Y}_*$;*

2) $(\mathfrak{X}_*)_*=\mathfrak{X}_*=(\mathfrak{X}^*)_*\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{X}^*=(\mathfrak{X}_*)^*=(\mathfrak{X}^*)^*$;

3) $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{F}_*\mathfrak{A}$;

4) *если $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ – множество непустых классов Фиттинга, то $(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i)^*=\bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i^*$.*

Теорема 1.3 [7, с. 757]. *Пусть p и q – различные простые числа. Тогда $\mathfrak{S}_q\mathfrak{S}_p\not\subseteq\mathfrak{S}_*$.*

Теорема 1.4 [7, с. 762]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{S}_*$.*

Теорема 1.5 [12, с. 106]. *Пусть классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ таковы, что $\mathfrak{X}$ является $\mathfrak{L}$-классом, а $\mathfrak{Y}$ – насыщенная радикальная формация, тогда если класс $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$ является $\mathfrak{L}$-классом, то и класс $\mathfrak{X}_*\mathfrak{Y}$ является $\mathfrak{L}$-классом.*

2. О гипотезе Локетта для классов Фиттинга, не являющихся классами Локетта

Проблема описания классов Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта и не являющихся классами Локетта, остается по-прежнему актуальной. Следующая теорема доказана в классе S всех конечных разрешимых групп.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathrm{F} = (\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y}$, *где* Y – *локальный класс Фиттинга такой, что* $\mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{Y} = (1)$. *Тогда* F – L-*класс, который не является классом Локетта.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как S_{PR} и Y – локальные классы Фиттинга, то из того, что произведение локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга, $\mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y}$ является L-классом. Но S_{PR} – класс Локетта, следовательно, $(\mathrm{S}_{PR})^{*}\mathrm{Y}$ является L-классом. Таким образом, по теореме 1.5, ввиду того, что S_{PR} – L-класс, Y – насыщенная радикальная формация, $(\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y}$ также является L-классом.

Остается показать, что класс F не является классом Локетта, т.е., что $\mathrm{F} \neq \mathrm{F}^{*}$.

Если предположить, что F – класс Локетта, то $(\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y} = ((\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y})^{*}$.

Но тогда учитывая, что Y – насыщенная радикальная формация, то по теоремам 1.2 и 1.1 имеем

$$((\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y})^{*} = ((\mathrm{S}_{PR})_{*})^{*}\mathrm{Y} = (\mathrm{S}_{PR})^{*}\mathrm{Y} = \mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y}$$

и справедливо равенство $\mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y} = (\mathrm{S}_{PR})_{*}\mathrm{Y}$.

Так как S_{PR} является L-классом, то $(\mathrm{S}_{PR})_{*} = \mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{S}_{*}$.

Следовательно, $(\mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{S}_{*})\,\mathrm{Y} = \mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y}$.

Но тогда ввиду того, что Y – насыщенная радикальная формация, следует, что

$$(\mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{S}_{*})\mathrm{Y} = \mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{Y}.$$

Значит, $\mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{Y} = \mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y}$, и поэтому $\mathrm{S}_{PR}\,\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{S}_{*}\mathrm{Y}$.

Очевидно, что $\mathrm{S}_{PR} \subseteq \mathrm{S}_{*}\,\mathrm{Y}$.

Следовательно, справедливо включение:

$$\mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{S}_{PR} \subseteq \mathrm{S}_{*}\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{S}_{PR}.$$

Ясно, что $\mathrm{S}_{PR} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{S}_{PR} = \mathrm{S}_{PR}$ и $\mathrm{S}_{*}\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{*}\mathrm{S}_{PR} = \mathrm{S}_{*}(\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{PR}) = \mathrm{S}_{*}$, так как $\mathrm{Y} \cap \mathrm{S}_{PR} = (1)$ по условию.

Следовательно, $\mathrm{S}_{PR} \subseteq \mathrm{S}_{*}$.

Последнее противоречит тому, что по теореме 1.3 $\mathrm{S}_{PR} \not\subseteq \mathrm{S}_{*}$. Значит, наше предположение неверно и класс Фиттинга F не является классом Локетта.

Теорема доказана.

3. Контрпример к гипотезе Локетта

В работе [11] Бергером и Косси доказано существование классов Локетта, которые не являются классами Фишера (в частности, нелокальны) и для которых гипотеза Локетта неверна.

В работе [12] было доказано, что не каждый разрешимый р-локальный класс Фиттинга является L-классом. В данном разделе с помощью указанных результатов мы построим новый пример разрешимого класса Фиттинга, опровергающий гипотезу Локетта.

Для построения таких классов будем использовать конструкцию класса Фиттинга, предложенную Бергером и Косси [11].

Пусть R – экстраспециальная группа порядка 27 и экспоненты 3 и W – точный неприводимый R-модуль над полем $GF(7)$ размерности 3. И пусть $Y=WR$. Обозначим через A группу автоморфизмов группы R. Пусть $B=C_A(Z(R))$, Q – подгруппа кватернионов группы B и $X=Z(Q)Y$.

Следуя [11], определим класс F следующим образом:

$$\mathrm{F} = (G \mid O_2(G|O_{\{2,3\}}(G)) \in S_n D_0(X)) \cap \mathrm{S}_7\mathrm{S}_3\mathrm{S}_2,$$

где $D_0(X)$ – класс всех конечных прямых произведений изоморфных копий группы X.

В работе [11] доказано, что класс F является классом Локетта и не удовлетворяет гипотезе Локетта [7, с. 773]). Нами в классе S всех конечных разрешимых групп доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathrm{H} = \mathrm{F}_{*}\mathrm{Y}_i$, *где* $i \in I$ *и* F – *конструкция класса Фиттинга, предложенная Бергером и Косси в* [10] *и* $\{ \mathrm{Y}_i \mid i \in I \}$ – *семейство насыщенных радикальных гомоморфов таких, что* $\mathrm{Y}_i \cap \mathrm{Y}_j = (1)$, *а* $\bigcup_{i\in I}\mathrm{Y}_i = \mathrm{E}$. *Тогда найдется такое* $i \in I$, *что класс Фиттинга* H *не удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Методом от противного. Предположим, что для каждого $i \in I$ класс Фиттинга $\mathrm{F}_{*}\mathrm{Y}_i$ является L-классом. Тогда согласно теореме 1.4 $(\mathrm{F}_{*}\mathrm{Y}_i)_{*} = (\mathrm{F}_{*}\mathrm{Y}_i)^{*} \cap \mathrm{S}_{*}$ для каждого $i \in I$.

Так как Y_i – насыщенный радикальный гомоморф для любого $i \in I$, а F_{*} – класс Фиттинга, то по теореме 1.2 имеем $(F_*Y_i)^* = (F_*)^*Y_i$ для каждого $i \in I$.

По второму утверждению теоремы 1.2 получим: $(F_*Y_i)^* = (F_*)^*Y_i = F^*Y_i$ для каждого $i \in I$.

Тогда, так как F_*Y_i для каждого $i \in I$ является L-классом (по предположению) и, учитывая последнее равенство, получаем:

$$\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* = \cap_{i\in I}(F_*Y_i)^* \cap S_* = \cap_{i\in I}((F_*Y_i)^* \cap S_*)$$
$$= \cap_{i\in I}(F^*Y_i \cap S_*) = \cap_{i\in I}(F^*Y_i) \cap S_*.$$

Так как

$$\cap_{i\in I}\ Y_i = (1), \text{ то } \cap_{i\in I}(F^*Y_i) \cap S_* = F^* \cap S_*.$$

Окончательно имеем $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* = F^* \cap S_*$.

Докажем теперь, что $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* = F_*$.

Ввиду утверждения 2 теоремы 1.2 имеем $(F_*Y_i)_* \subseteq F_*Y_i$ для каждого $i \in I$. Следовательно,

$$\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* \subseteq \cap_{i\in I}(F_*Y_i) = F_*\,(\cap_{i\in I}Y_i) = F_*.$$

Таким образом, $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* \subseteq F_*$.

С другой стороны, $F_* \subseteq F_*Y_i$ для каждого $i \in I$. Тогда по утверждению 1 теоремы 1.2

$$(F_*)_* \subseteq (F_*Y_i)_*$$

для каждого $i \in I$.

По второму утверждению теоремы 1.2 $(F_*)_* = F_*$, тогда $F_* \subseteq (F_*Y_i)_*$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $F_* \subseteq \cap_{i\in I}(F_*Y_i)$.

Таким образом, из включений $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* \subseteq F_*$ и $F_* \subseteq \cap_{i\in I}(F_*Y_i)_*$ следует, что $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* = F_*$.

Из равенств $\cap_{i\in I}(F^*Y_i) \cap S_* = F^* \cap S_*$ и $\cap_{i\in I}(F_*Y_i)_* = F_*$ следует, что $F^* \cap S_* = F_*$. Ввиду результата Бергера–Косси [11] это противоречит тому, что F является $\bar{L}$-классом.

Следовательно, наше предположение неверно, и существует такое $i \in I$, что класс F_*Y_i является $\bar{L}$-классом.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Klassen konjugirter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschrift, Universitat Frankfurt (M). – 1966.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337–339.
3. Blessenohl, D. Uber normal Schunk und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschutz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1–8.
4. Lockett, P. The Fitting class F^* / P. Lockett. – Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136.
5. Bryce, R.A. A problem in Theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Vol. 141, № 2. – P. 99–110.
6. Beidleman, J.C. Uber fittingklassen und Lockett-Vermutung / J.C. Beidleman, P. Hauck // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 2. – S. 161–167.
7. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gryeter. – 1992. – N. Y.–Berlin. – 891 p.
8. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.
9. Gallego, M.P. Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – Vol. 24, № 6. – P. 2011–2023.
10. Залесская, Е.Н. Классы Фиттинга с заданными свойствами функций Хартли / Е.Н. Залесская. – Гомель, 2003. – 45 с. – (Препринт / Гомельск. гос. ун-т имени Ф. Скорины; № 60).
11. Berger, T.R. An example in the theory of normal Fitting classes / T.R. Berger, J. Cossey // Math. Z. – 1977. – Bd. 154. – S. 287–293.
12. Воробьев, Н.Т. О проблемах структуры классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, Н.Н. Воробьев // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2007. – № 2(44). – С. 105–108.

Поступила в редакцию 23.10.2012. Принята в печать 14.12.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: alenushka0404@mail.ru – Залесская Е.Н.