УДК 512.542

О решеточных, гиперрадикальных и сверхрадикальных формациях конечных групп

И.Н. Халимончик
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В работе исследуются решеточные, гиперрадикальные и сверхрадикальные формации в классе X конечных групп.

Пусть X – наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) любая наследственная насыщенная подформация из X является решеточной в X; 2) любая наследственная насыщенная подформация из X является гиперрадикальной в X; 3) любая наследственная насыщенная подформация из X является сверхрадикальной в X; 4) X состоит из групп с нильпотентным коммутантом.

Полученный результат используется при изучении конечных групп, представимых в произведение своих нормальных и обобщенно нормальных подгрупп.

Ключевые слова: *конечная группа, коммутант, формация, решеточная формация, гиперрадикальная формация, сверхрадикальная формация.*

On the lattice, hyperradical and superradical formations of finite groups

I.N. Khalimonchik
Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

The article deals with lattice, hyperradical and superradical formations in class X of finite groups.

Let X be a hereditary saturated formation. Then the following statements are equivalent: 1) any hereditary saturated subformation of X is a lattice one in X; 2) any hereditary saturated subformation of X is hyperradical in X; 3) any hereditary saturated subformation of X is superradical in X; 4) X formation consists of groups with nilpotent commutant.

The obtained result is used in the study of finite groups represented in the product of its normal and generalized normal subgroups.

Key words: *finite group, formation, lattice formation, hyperradical formation, superradical formation.*

Рассматриваются только конечные группы. Радикальные формации, или формации Фиттинга, т.е. нормально наследственные формации групп, замкнутые относительно произведений нормальных (или, что эквивалентно, относительно порождений субнормальных) подгрупп, в настоящее время занимают одно из центральных мест в теории классов групп.

Обобщая понятие субнормальности, в 1969 году Т. Хоукс ввел понятие F-субнормальной подгруппы в классе разрешимых групп. В 1978 году Л.А. Шеметков [1] распространил понятие F-субнормальности подгрупп на произвольные конечные группы. Пусть F – непустая формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется F-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=G$ такая, что $H_i \overset{\mathsf{F}}{\subseteq} H_{i-1}$ для всех i =1, 2, …, n.

В 1978 году Л.А. Шеметковым в [1] была поставлена проблема под номером 12: в каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп группы G образует решетку? Формации $\mathfrak{F}$, которые обладают данным свойством, в дальнейшем были названы решеточными. В [2] были описаны наследственные (разрешимые нормально наследственные) насыщенные формации $\mathfrak{F}$, являющиеся решеточными в классе всех групп (соответственно, всех разрешимых групп). Эти и последующие результаты о решеточных формациях вошли в [3].

В [4] было положено начало изучению сверхрадикальных формаций, т.е. нормально наследственных формаций групп $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно взятия произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп.

В отличие от радикальных формаций для сверхрадикальных формаций F замена условия замкнутости относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных F-подгрупп на условие замкнутости относительно порождений $\mathfrak{F}$-субнормальных F-подгрупп не является эквивалентной. Этот факт приводит к задаче описания формаций $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно взятия порождений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Формации с таким свойством называются ги-

перрадикальными [5]. Отметим, что независимо необходимость изучения гиперрадикальных формаций возникла в связи с исследованием решеточных формаций (см. [2, 5–6]). В этих работах были описаны наследственные насыщенные (разрешимые) гиперрадикальные формации.

Отметим, что перечисленные выше типы формаций исследовались в классе всех (разрешимых) групп. С [7] начинается изучение решеточных формаций в классе X. В частности, в [7] были установлены насыщенные наследственные формации X, для которых любая насыщенная наследственная формация $\mathfrak{F}$ является решеточной в X.

Нам потребуется следующее определение.

Определение. *Пусть* X *– некоторый непустой класс групп. Формация* $\mathfrak{F}$ *называется*:

а) *решеточной в классе* X, *если в любой* X*-группе* G *множество всех ее* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп группы* G;

б) *гиперрадикальной в классе* X, *если* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная формация в* X *и* $\mathfrak{F}$ *содержит каждую* X*-группу* $G = \langle A,B \rangle$, *где* A *и* B *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы в* G;

в) *сверхрадикальной в классе* X, *если* $\mathfrak{F}$ *– нормально наследственная формация в* X *и* $\mathfrak{F}$ *содержит каждую* X*-группу* $G = AB$, *где* A *и* B *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальные* $\mathfrak{F}$*-подгруппы в* G.

Целью данной работы является нахождение наследственных насыщенных формаций X, для которых семейства решеточных, гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций в классе X совпадают.

Предварительные результаты. В работе используются обозначения, определения и результаты из [1, 3]. Закрепим обозначения за известными классами групп. Обозначим через N класс всех нильпотентных групп, через A – класс всех абелевых групп, через S – класс всех разрешимых групп, через NA – класс всех групп, имеющих нильпотентный коммутант. Известно [1], что класс NA является наследственной насыщенной формацией.

Напомним [1], что добавлением к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. Через $\mathsf{F}(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$– некоторая непустая формация. Тогда $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа из G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$ и обозначается через G^{F}.

Пусть X – некоторый класс групп. Группа G называется минимальной не X-группой, если G не принадлежит X, а все собственные подгруппы из G принадлежат X. Через $\mathbf{M}(\mathsf{X})$ будем обозначать класс всех минимальных не X-групп.

Сформулируем в виде лемм вспомогательные результаты, необходимые для доказательства основного результата.

Лемма 2.1 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* H *– подгруппа группы* G *и* $G^{\mathsf{F}} \subseteq H$, *то* H *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы* G;

2) *если* H *–* F*-субнормальная подгруппа и* K *– подгруппа группы* G, *то* $H \cap K$ *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа в* K;

3) *если* H_1 *и* H_2 *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальные подгруппы группы* G, *то* $H_1 \cap H_2$ *–* $\mathfrak{F}$ *субнормальная подгруппа в* G;

4) *если все композиционные факторы группы* G *принадлежат формации* $\mathfrak{F}$, *то каждая субнормальная подгруппа группы* G *является* $\mathfrak{F}$*-субнормальной*;

5) *если* H *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы* G, *то* H^g *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа в* G *для любого элемента* g *из* G.

Лемма 2.2 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация,* H *и* N *– подгруппы группы* G, *причем* N *нормальна в* G. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* H F*-субнормальна в* G, *то* HN $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *а* HN/N $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/N;

2) *если* $N \subseteq H$, *то подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G *тогда и только тогда, когда подгруппа* H/N $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/N;

3) *если подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в подгруппе* K *группы* G, *а* K $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация, имеющая постоянный локальный экран* f. *Если* $G \in \mathbf{M}(\mathsf{F}) \cap \mathsf{S}$ *и* $\Phi(G)=1$, *то* $G=[N]M$, *где* N *– единственная минимальная нормальная подгруппа группы* G, *причем* N *– абелева* p*-группа для некоторого простого* p, *а* M *– максимальная подгруппа группы* G *такая, что* $M \in \mathbf{M}(f(p))$.

Доказательство проводится аналогично (с очевидными изменениями) доказательству теоремы 1.5 из [8].

Лемма 2.4 [9]. *Пусть G – группа с единственной минимальной нормальной подгруппой N, которая неабелева. Если p – простое число, делящее $|N|$, то существуют точный F_pG-модуль A и соответствующее фраттиниевое расширение $A \to E \to G$.*

Основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– наследственная насыщенная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) любая наследственная насыщенная подформация из $\mathfrak{X}$ *является решеточной в* $\mathfrak{X}$;

2) любая наследственная насыщенная подформация из $\mathfrak{X}$ *является гиперрадикальной в* $\mathfrak{X}$;

3) любая наследственная насыщенная подформация из $\mathfrak{X}$ *является сверхрадикальной в* $\mathfrak{X}$;

4) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Доказательство. Установим, что из 1) следует 2). Пусть $\mathfrak{X}$-группа G – контрпример минимального порядка. Тогда $G=\langle A_1,A_2\rangle$, где A_i – $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G, $i = 1,2$, и G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу 1) леммы 2.2 все условия пункта 2) теоремы для факторгруппы G/N выполняются. Поэтому в силу выбора группы G имеем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ − насыщенные формации, то группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N=G^{\mathfrak{F}}$ и $\Phi(G)=1$.

Рассмотрим подгруппы A_1N и A_2N. Так как A_i − собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа $\mathfrak{X}$-группы G и $N=G^{\mathfrak{F}}$, то нетрудно видеть, что A_iN – собственная подгруппа G, i=1,2. Заметим, что $A_iN= A_iF^*(A_iN)$, i=1,2. Согласно предложению 6.1.11 из [3] получаем, что $A_iN \in \mathfrak{F}$.

Пусть H – добавление к подгруппе N в группе G. Так как $\Phi(G)=1$, то $H \neq G$. Из того, что $\mathfrak{X}$ − формация, получаем, что G/N является $\mathfrak{X}$-группой. В силу насыщенности формации $\mathfrak{F}$ из $G/N=HN/N \sqsupset H/H\cap N \in \mathfrak{F}$ и $H\cap N \subseteq \Phi(H)$ по лемме 11.1 из [1] получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Итак, $G=HN$, $H \in \mathfrak{F}$ и $H\cap N \subseteq \Phi(H)$.

Используя тождество Дедекинда, имеем $A_iN=A_iN\cap HN=N(A_iN\cap H)$, для i=1,2.

Если предположить, что $A_iN\cap H = 1$, то $A_iN=N$. Предположим, что $A_1N=N$. В этом случае

$$G=\langle A_1, A_2\rangle=\langle A_1N, A_2\rangle=\langle N, A_2\rangle=A_2N.$$

Так как $N=G^{\mathfrak{F}}$, то A_2 не может быть $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G. Следовательно, можно считать, что $A_iN \cap H \neq 1$, для каждого i = 1,2.

Так как подгруппа $A_iN \in \mathfrak{F}$, то из наследственности $\mathfrak{F}$ по 1) леммы 2.1 следует, что подгруппа $A_iN\cap H$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в A_iN, для i=1,2. Отсюда и из $\mathfrak{F}$-субнормальности подгруппы A_iN в G из 3) леммы 2.2 следует, что $A_iN\cap H$ − $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в группе G, i=1,2.

По условию формация $\mathfrak{F}$ является решеточной в классе $\mathfrak{X}$, поэтому $(A_iN \cap H)^H$ – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Кроме того, из $H \in \mathfrak{F}$ и наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем $(A_iN \cap H)^H \in \mathfrak{F}$. Обозначим $B_i=A_iN\cap H$, i=1,2. Рассмотрим подгруппу NB_1^H. Если $NB_1^H=G$, то $G^{\mathfrak{F}}B_1^H=G$, что невозможно ввиду $\mathfrak{F}$-субнормальности в G подгруппы B_1H.

Пусть $B_1^H \neq H$. Из $G=HN$, ввиду того, что $N \lhd G$ и $B_1^H \lhd H$ следует, что $NB_1^H \lhd G$. Так как $G=\langle A_1,A_2\rangle$ и $A_1 \subseteq NB_1^H$, то $G = NB_1^HA_2$. Таким образом, получаем

$$G=NB_1^HA_2=NB_1^HNB_2=NB_1^HB_2.$$

Так как $B_2 \subseteq N_H(B_1^H)$, то $B_1^HB_2$ − подгруппа из H. Тогда из $\mathfrak{F}$-субнормальности в G подгрупп B_1^H и B_2 следует, что $B_1^HB_2 =\langle B_1^H, B_2\rangle$ − $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. Это невозможно ввиду равенства $G = G^{\mathfrak{F}}(B_1^HB_2)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Доказано, что $\mathfrak{F}$ − гиперрадикальная подформация в $\mathfrak{X}$.

Если наследственная насыщенная формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ является гиперрадикальной в $\mathfrak{X}$, то очевидно, что она является сверхрадикальной в $\mathfrak{X}$, поэтому из 2) следует 3).

Установим, что из 3) следует 4). Предположим, что множество $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Ясно, что $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – насыщенная формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G)=1$. Возможны два случая.

1. N – абелева группа. Так как $G/N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$, то G разрешима. В этом случае нетрудно показать, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = [N]M$, где $N=C_G(N)=F(G)$ – элементарная абелева p-группа (p – некоторое простое число), а $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{X}$ – наследственная формация, то группа G является минимальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-группой. По лемме 2.3 получа-

ем, что M является минимальной не A-группой, т.е. группой Миллера–Морено.

Так как M является неабелевой группой, то в M найдутся, по крайней мере, две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2, причем $H_i \in \mathsf{A}$, i =1,2.

Рассмотрим подгруппы $T_1=NH_1$ и $T_2=NH_2$. Так как $T_i \neq G$ и $G \in \mathbf{M}(\mathsf{NA})$, то $T_i \in \mathsf{NA}$, i=1,2.

Из $G^{\mathsf{NA}}=N \subseteq T_i$, по 1) леммы 2.1 следует, что T_i является NA-субнормальной подгруппой в G для i=1,2.

Заметим, что $M=H_1H_2$. Отсюда следует, что $G=T_1T_2$. Рассмотрим подформацию $\mathsf{F}=\mathsf{X}\cap\mathsf{NA}$ формации X. Так как F является наследственной насыщенной формацией, то по условию $\mathfrak{F}$ является сверхрадикальной формацией в X. Так как X – наследственная формация и $G \in \mathsf{X}$, то Ti – $\mathfrak{F}$-субнормальная F-подгруппа в G, i=1,2. Поэтому $G \in \mathsf{NA}$. Получили противоречие с выбором G. Таким образом, доказано, что $\mathsf{X}\cap\mathsf{S} \subseteq \mathsf{NA}$.

2. Пусть N – неабелева группа. Так как $G \in \mathbf{M}(\mathsf{NA})$ и $\Phi(G)=1$, то нетрудно видеть, что $G = N$ – простая группа и $G^{\mathsf{NA}} = G$. Так как G не является абелевой, то в G найдется подгруппа S, являющаяся минимальной не A-группой, т.е. группой Миллера–Морено. Известно, что она либо примарна, либо бипримарна. Так как G – простая группа, то $|\pi(G)| \geq 3$. Поэтому найдется $p \in \pi(G)$ такое, что $p \notin \pi(S)$. Тогда по лемме 2.4 существует точный фраттиниевый F_pG-модуль A и групповое расширение $A \to E \to\to G$ такое, что найдется элементарная абелева p-подгруппа $K \lhd E$ такая, что K G-изоморфна A, $K \subseteq \Phi(E)$ и $E/K \sqcup G$. Так как $G \in \mathsf{X}$ и X – насыщенная формация, то $E \in \mathsf{X}$. Рассмотрим S^* – прообраз подгруппы S при естественном гомоморфизме α: $E \to E/K \sqcup G$. Так как $S^*/K \sqcup S$ и K – p-группа, $p \notin \pi(S)$, то K – нормальная силовская p-подгруппа в S^*.

По теореме Шура–Цассенхауза в S^* найдется подгруппа T такая, что $S^*=KT$ и $(|S^*: K|, |S^*: T|) = 1$. Заметим, что $T \sqcup S$ и $K \subseteq \mathrm{F}(S)$. Если $K \subset \mathrm{F}(S^*)$, то $\mathrm{F}(S^*)=\mathrm{F}(S^*)\cap S^*=\mathrm{F}(S^*)\cap KT= =K(\mathrm{F}(S^*)\cap T)$ и $\mathrm{F}(S^*)\cap T \neq 1$.

Пусть $r \in \pi(\mathrm{F}(S^*)\cap T)$. Ясно, что $r \neq p$. Тогда для силовской r-подгруппы Q из $F(S^*)$ выполняется $Q \subseteq C_{\mathrm{F}(S^*)}(K) \subseteq C_{S^*}(K)=K$. Противоречие. Следовательно, $\mathrm{F}(S^*)=K$ и $S^*/\mathrm{F}(S^*)=S^*/K \sqcup = T \notin \mathsf{A}$. Значит, $S^* \notin \mathsf{NA}$. С другой стороны, $E \in \mathsf{X}$ и X – наследственная формация, следовательно, $S^* \in \mathsf{X}$. Очевидно, S^* разрешима. Поэтому $S^* \in \mathsf{X}\cap\mathsf{S}$. В первом случае было доказано, что $\mathsf{X}\cap\mathsf{S} \subseteq \mathsf{NA}$. Поэтому $S^* \in \mathsf{NA}$. Противоречие. Следовательно, $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{NA}$. Доказано, что из 3) следует 4).

Доказательство, что из 4) следует 1) вытекает из теоремы 3.1 [7]. Теорема доказана.

Заключение. Полученная выше теорема может быть использована при изучении групп, представимых в произведение своих сверхразрешимых нормальных и обобщенно нормальных подгрупп.

Пусть $\mathsf{F}=\mathsf{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Ввиду замечания 2 из [1, с. 93] подгруппа H разрешимой группы G является U-субнормальной в G тогда и только тогда, когда существует максимальная цепь подгрупп $H=H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t=G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого i=0,1,… ,t-1.

Следствие 4.1. *Пусть $G=AB$, где A и B – сверхразрешимые U-субнормальные подгруппы группы G. Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Так как нормальная подгруппа разрешимой группы является U-субнормальной в ней, то получаем следующий хорошо известный результат.

Следствие 4.2 [10]. *Пусть группа $G=AB$, где A и B – нормальные сверхразрешимые подгруппы в G. Если коммутант G' группы G нильпотентен, то группа G сверхразрешима.*

Согласно [11–12] группа $G=AB$ называется произведением взаимно (sn-перестановочных) перестановочных подгрупп A и B, если A перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из A.

Лемма 4.3. *Пусть разрешимая группа $G=AB$, где A и B – ее сверхразрешимые подгруппы. Если A и B – взаимно sn-перестановочные подгруппы, то A и B U-субнормальны в G.*

Доказательство. Если $A=G$, то G – сверхразрешимая группа. Тогда любая подгруппа из G является U-субнормальной в ней. Можно считать, что $A \neq G \neq B$. В подгруппе B найдется субнормальный ряд

$$1=B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n=B$$

с простыми индексами $|B_{j+1} : B_j|$, j=0, 1, … , n-1. Тогда из $A \neq G$ следует, что существует j такое, что $AB_{j+1} \neq AB_j$. Из $|AB_{j+1}:AB_j|= = |B_{j+1}:B_j|:|(B_{j+1}\cap A)B_j:B_j|$ и $B_j \subseteq (B_{j+1}\cap A)B_j= = B_{j+1}\cap AB_j \subseteq B_{j+1}$ следует, что $(B_{j+1}\cap A)B_j = B_j$. Отбросив из ряда $A=B_0A \subseteq B_1A \subseteq \ldots \subseteq B_n A=G$ по-

вторения, получаем ряд с простыми индексами. Следовательно, A − U-субнормальная подгруппа в G. Аналогично показывается, что B U-субнормальна в G. Лемма доказана.

Следствие 4.4 [11]. *Пусть группа G=AB является произведением взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп группы G. Если коммутант G′ группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.5 [12]. *Пусть группа G=AB является произведением взаимно sn-перестановочных сверхразрешимых подгрупп группы G. Если коммутант G′ группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 278 с.
2. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы / Ин-т математики Акад. наук Украины; редкол.: Н.С. Черников [и др.]. – Киев, 1993. – С. 27–54.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006. – 385 p.
4. Семенчук, В.Н. Сверхрадикальные формации / В.Н. Семенчук, Л.А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 5. – С. 24–26.
5. Васильев, А.Ф. Гиперрадикальные формации конечных разрешимых групп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6(27). – С. 62–70.
6. Васильев, А.Ф. Заметка о гиперрадикальных формациях конечных групп / А.Ф. Васильев, И.Н. Халимончик // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2008. – Т. 16, № 2. – С. 15–18.
7. Васильев, А.Ф. Условно решеточные формации конечных групп / А.Ф. Васильев, И.Н. Халимончик // Известия Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, № 2. – С. 50–55.
8. Семенчук, В.Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.
9. Gries, R.L. The Frattini module / R.L. Gries, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 256–266.
10. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 318–326.
11. Assad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 4. – P. 318–326.
12. Alejandre, M.J. On some permutable products of supersoluble groups / M.J. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

Поступила в редакцию 02.05.2012. Принята в печать 14.06.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: vifh@rambler.ru – Халимончик И.Н.