Однозначность разложения ограниченной разрешимо ω -насыщенной формации на неразложимые множители

В.М. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Все рассматриваемые группы конечны. Формация F называется ограниченной, если формация F является подформацией некоторой однопорожденной формации. Если $F = F_1 \dots F_t$ – произведение формаций $F_1, \dots, F_t$ и $F \neq F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_t$ для всех $i=1, \dots, t$, тогда $F_1 \dots F_t$ называется несократимой факторизацией формации F . Формация F называется неразложимой, если она не может быть представлена в виде $F = MN$, где M и N являются неединичными формациями. В данной работе доказывается, что если $F = F_1 \dots F_t$ – произведение неразложимых формаций $F_1, \dots, F_t$ и F является ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией, то все множители такой факторизации формации F однозначно определены.

Ключевые слова: факторизация формаций, формации конечных групп, разрешимо ω -насыщенная формация, ограниченная формация.

The uniqueness of factorization of the limited solubly ω -saturated formation

Selkin V.M.

Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

All groups considered are finite. We say that F is a limited formation if F is a subformation of some one-generated formation. If $F = F_1 \dots F_t$ is the product of formations $F_1, \dots, F_t$ and $F \neq F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_t$ for all $i=1, \dots, t$, then we call $F_1 \dots F_t$ a noncancellative factorization of the formation F . A formation F is nondecomposable if F cannot be written as a product $F = MN$, where M and N are nonidentity formations. In this paper we proved that if $F_1, \dots, F_t$ be the product of nondecomposable formations $F_1, \dots, F_t$ and F is a limited solubly ω -saturated formation, then all the factors of $F_1 \dots F_t$ are uniquely determined.

Key words: factorization of formation, formation of finite groups, solubly ω -saturated formation, limited formation.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация F – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую через G^F), факторгруппа по которой снова принадлежит F . Эта подгруппа называется F -корадикалом группы G . Произведением MN формаций M и N называется класс групп $(G | G^H \in M)$. Следуя [1], мы будем использовать символ $C^p(G)$, чтобы обозначать пересечение всех централизаторов абелевых p -главных факторов конечной группы G (заметим, что $C^p(G) = G$, если G не имеет таких главных факторов). Пусть X –

множество конечных групп. Тогда используем символ $\text{Com}(X)$, чтобы обозначить класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \trianglelefteq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in X$. Также пишем, что $\text{Com}(G)$ для множества $\text{Com}(\{G\})$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Для любой функции f вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\} \quad (I)$$

мы определим, следуя [2],

$$CF_{\omega}(f) = \{G - \text{конечная группа} | G / (R(G) \cap O_{\omega}(G)) \in f(\omega')\}$$

и

$$G / C^p(G) \in f(p) \text{ для любого простого числа } p \in \omega \cap \pi(\text{Com}(G)),$$

где подгруппа $R(G)$ обозначает корадикал группы G (т.е. $R(G)$ – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G) и $\emptyset \neq \omega \subseteq P$. Формация F называется разрешимо ω -насыщенной, если $F = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (I). В этом случае f называется ω -композиционным спутником формации F . Для произвольной функции f вида (I), следуя [3], символ $LF_\omega(f)$ обозначает класс групп

$$(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация F такова, что $F = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (I), то формация F называется ω -насыщенной, а f – ω -локальный V -спутник этой формации. Пересечение всех разрешимо ω -насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G , называется однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формацией и обозначается $c_\omega \text{form}(G)$. Однопорожденные ω -насыщенные формации определяются аналогично и обозначаются $l_\omega \text{form}(G)$. Формация F называется ограниченной, если формация F является подформацией некоторой однопорожденной формации. Аналогично разрешимо ω -насыщенная формация F называется ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω -насыщенной формации.

Если

$$F = F_1 \dots F_t \quad (\text{II})$$

произведение формаций $F_1, \dots, F_t$ и

$$F \neq F_1 \dots F_{i-1} F_{i+1} \dots F_t$$

для всех $i=1, \dots, t$, тогда (II) называется несократимой факторизацией формации F . Формация F называется неразложимой, если она не может быть представлена в виде $F = MN$, где M и N являются неединичными формациями.

Напомним известный результат Неймана–Шмелькина: если $M = M_1 \dots M_t$, где $M_1, \dots, M_t$ являются неразложимыми многообразиями групп, то все множители M_i однозначно определены (теорема 23.32 [4]). Однако для формаций конечных групп аналогичный результат не был доказан (см. вопрос 10.58 [5]). В этой рабо-

те доказывается следующая теорема, дающая ответ на данный вопрос.

Теорема. Пусть $F = F_1 \dots F_t$ – произведение неразложимых формаций $F_1, \dots, F_t$. Если F является ограниченной разрешимо ω -насыщенной формацией, то все множители такой факторизации формации F однозначно определены.

Предварительные результаты. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы и теоремы.

Лемма 1 (лемма 5.3 [6]). Пусть $F = F_1 \dots F_t$ – несократимая факторизация формации F и $F \subseteq R$, где R – некоторая однопорожденная ω -насыщенная формация. Если F является разрешимо ω -насыщенной формацией, то $t \leq 3$.

Теорема 2 (теорема 5.5 [6]). Произведение

$$F_1 F_2 \dots F_t \quad (\text{III})$$

является несократимой факторизацией некоторой ограниченной разрешимо ω -насыщенной формации F тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $t \leq 3$ и каждый фактор из (III) – неединичная формация;

2) F_1 – однопорожденная ω -насыщенная подформация из $N_\omega N$ и $\pi(\text{Com}(F)) \cap \omega \subseteq \pi(F_1)$;

3) если $F_1 \notin N_\omega$, тогда $t=2$, F_2 – абелева однопорожденная формация и для любых групп $A \in M$ и $B \in F_2$, $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$ и $(|A/O_\omega(A)|, |B|) = 1$;

4) если $F_1 \subseteq N_\omega$ и $t=3$, тогда $|\pi(F_1)| > 1$, F_3 – однопорожденная абелева формация и для всех $p \in \pi(F_1)$, формация $F_2(p)$ является нильпотентной однопорожденной формацией и для всех групп $A \in F_2$ и $B \in F_3$, $\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \emptyset$;

5) если $F_1 \subseteq N_\omega$, $t=2$ и $|\pi(F_1)| > 1$, тогда формации $F_2(\omega')$ и F_2 ограничены;

б) если $F_1 = N_p$ для некоторого простого числа p , то $F_2(\omega')$ и $F_2(p)$ (если $p \in \omega$) являются ограниченными формациями, $F_2 \notin F_1$, и существует такая группа $B \in F_2$, что для всех групп $A \in F_1$, F_2 -корадикал группы T^{F_2} регулярного сплетения $T = A \in B$ содержится прямо в базе группы T .

Лемма 3 (лемма 7.1 [6]). Пусть $M_1H_1 = M_2H_2$, где $M_i \subseteq N_\omega N$ – разрешимо ω -насыщенные формации, H_i – такие формации, что $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$ и $(|A/O_\omega(A)|, |B|) = 1$, для всех групп $A \in M_i$ и $B \in H_i$. Если либо $M_i \in N_\omega$, для $i=1,2$, либо $M_i \subseteq N$, для $i=1,2$, $|\pi(M_1)| > 1$ и $|\pi(M_2)| > 1$, тогда $H_1 = H_2$.

Лемма 4 (лемма 3.4.4 [7]). Пусть $M_1, M_2, \dots, M_t, H$ – однопорожденные наследственные формации. Тогда

$$(M_1 \vee M_2 \vee \dots \vee M_t)H = M_1H \vee M_2H \vee \dots \vee M_tH.$$

Лемма 5 (лемма 3.4.5 [7]). Пусть $H = H_1 \dots H_t$, где H_i – однопорожденная формация, $i=1, \dots, t$.

Если M_1 и M_2 – такие формации, что

$$M_1H = M_2H, \text{ тогда } M_1 = M_2.$$

Лемма 6 (лемма 4.5 [6]). Пусть $F = MN$, где M – разрешимо ω -насыщенная формация с внутренним ω -композиционным спутником m . Пусть H – такая непустая формация, что $\pi(\text{Com}(H)) \cap \omega \subseteq \pi(\text{Com}(M))$. Тогда $F = CF_\omega(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} m(p)H, & \text{если } a = p \in \pi(\text{Com}(M)) \cap \omega; \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(\text{Com}(M)); \\ m(\omega')H, & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Лемма 7 (лемма 4.2 [6]). Пусть $F = c_\omega \text{form}(X)$ и $\pi = \pi(\text{Com}(F)) \cap \omega$. И пусть f – минимальный ω -композиционный спутник формации F . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(p) = \text{form}(G/C^p(G) | G \in X)$ для всех $p \in \pi$;
- 2) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi$;
- 3) $f(\omega') = \text{form}(G/(O_\omega(G) \cap R(G)) | G \in X)$;
- 4) если $F = CF_\omega(h)$, то

$$f(p) = \text{form}(A | A \in h(p) \cap F, O_p(A) = 1)$$

для всех $p \in \pi$ и

$$f(\omega') = \text{form}(A | A \in h(\omega') \cap F$$

$$\text{и } O_\omega(A) \cap R(A) = 1).$$

Лемма 8 (лемма 4.6 [6]). Пусть $F = MN$ – разрешимо ω -насыщенная формация, где M и H – формации, причем $M \subseteq N$. Пусть f – минимальный ω -композиционный спутник

формации F . Предположим, что $|\pi(M) \cap \omega| > 1$. Тогда

$$H = \text{form}(f(p) \cup f(q))$$

для любых двух различных простых чисел $\{p, q\} \in \pi(M) \cap \omega$.

Лемма 9 (лемма 5 [3]). Пусть $F = l_\omega \text{form}(G)$ для некоторой группы G . Тогда F имеет минимальный ω -локальный спутник f такой, что следующие условия имеют место:

1) $f(p) = \text{form}(G/F_p(G))$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$;

2) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(G)$;

3) если $F = LF_\omega\langle h \rangle$ для некоторого ω -локального спутника h , то

$$f(p) = \text{form}(A | A \in h(p) \cap F, O_p(A) = 1)$$

для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$ и

$$f(\omega') = \text{form}(A | A \in h(\omega') \cap F \text{ и } O_\omega(A) = 1).$$

Лемма 10 (лемма 5.1 [6]). Пусть $F = MN$, M и H – неединичные формации. Тогда формация F является либо неабелевой, либо ненильпотентной формацией с $|\pi(F)| > 1$.

Доказательство. Пусть $F = M_1 \dots M_n$, где $M_1, \dots, M_n$ – неразложимые формации. Необходимо показать, что $n = t$ и $F_i = M_i$ для всех $i = 1, \dots, t$. Ввиду леммы 1 можем показать, что $n \leq 3$.

Рассмотрим случай, когда $t = n = 2$, т.е.

$$F = F_1F_2 = M_1M_2.$$

Так как M_1 и M_2 – неразложимые формации, то имеем

$$M_1 \neq F \neq M_2.$$

Это значит, что формация M_1M_2 является несократимой факторизацией формации F . Если обе формации F_1 и M_1 – ненильпотентны или обе нильпотентны и $|\pi(F_1)| > 1$, $|\pi(M_1)| > 1$, то по теореме 2 и лемме 3 имеем $F_2 = M_2$. Следовательно, по лемме 5 имеем $F_1 = M_1$.

Пусть F_1 и M_1 – такие нильпотентные формации, что $|\pi(F_1)| = 1$ и $|\pi(M_1)| > 1$. Предположим, что $\pi(F_1) = p \in \omega$. Значит, $N_p \subseteq F_1$. Следовательно, $N_p = F_1$. Таким образом,

$$F_1 = N_p = N_p N_p,$$

т.е. F_1 – разложимая формация. Полученное противоречие показывает, что $\pi(F_1) \not\subseteq \omega$. Ввиду теоремы 2 $\pi(F) \cap \omega \subseteq \pi(F_1)$. Так как $\pi(M_1) \subseteq \pi(F)$, то $\pi(M_1) \cap \omega = \emptyset$. Тогда F_2, M_2 – однопорожденные абелевы формации и

$$\pi(F_1) \cap \pi(F_2) = \pi(M_1) \cap \pi(M_2) = \emptyset.$$

Теперь покажем, что $F_2 = M_2$. Предположим, что $F_2 \not\subseteq M_2$, и пусть B – группа минимального порядка из F_2, M_2 . Пусть $1 \neq A \in F_1$. Тогда

$$T = A \in B = [K]B \in F,$$

где K – база регулярного сплетения T . Следовательно,

$$T^{M_2} \in M_1 \subseteq N.$$

Так как $(|A|, |B|) = 1$, то

$$T^{M_2} \subseteq F(T) = K.$$

Значит,

$$T / F(K) = T / K \square B \in M_2.$$

Противоречие. Следовательно, $F_2 \subseteq M_2$. Используя аналогичные рассуждения можно показать, что $M_2 \subseteq F_2$. Значит, $F_2 = M_2$. Теперь рассуждая аналогично нетрудно видеть, что $F_1 = M_1$. Если

$$|\pi(F_1)| = 1 = |\pi(F_1)|,$$

то нетрудно видеть, что $F_1 = M_1$.

Пусть теперь M_1 – нильпотентная формация и F_1 – ненильпотентная формация. Ввиду теоремы 2 имеем $F_1 \subseteq N_\omega N$. Пусть A – группа минимального порядка из F_1, N . И пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы A . Так как $A \in N_\omega N$, то $A^N \in N_\omega$. Значит, $R = A^N \in N_\omega$. Следовательно, R – p -группа для некоторого простого числа $p \in \omega$. Нетрудно видеть, что $R = F_p(A)$. Следовательно, $A/R \in m(p)$, где m – минимальный ω -локальный спутник формации F_1 . Пусть

$$\pi = \{p_1, \dots, p_m\} = \pi(\text{Com}(F_1)) \cap \omega.$$

Так как $p \in \pi$, видим, что

$$M_0 = m(p_1) \vee \dots \vee m(p_m)$$

является неединичной формацией.

Ввиду условия (2) теоремы 2 и леммы 6 видим, что формация F имеет такой ω -локальный спутник t , что $t(p_i) = m(p_i)F_2$ для всех $i=1, \dots, m$. Пусть f – минимальный ω -композиционный спутник формации F . Покажем, что $t(p_i) = f(p_i)$, для всех $i=1, \dots, m$. Нетрудно видеть, что включение $f \leq t$ очевидно. Пусть A – группа минимального порядка из $m(p_i)F_2 \setminus f(p_i)$, где $m(p_i) \neq (1)$. Тогда, очевидно, что $m(p_i)F_2 \subseteq F$. Следовательно, когда $O_{p_i}(A) = 1$, то ввиду леммы 7 $A \in f(p_i)$. Если $O_{p_i}(A) \neq 1$, то по лемме 2 имеем $M_1 \subseteq N_\omega N$, т.е. M_1 – метанильпотентная формация. Значит, для любой группы $G \in M_1$ имеем, что p не делит порядок группы $G/F_p(G)$ для всякого простого числа $p \in \pi(M_1) \cap \omega$. Следовательно, $m(p_i) \subseteq N_{p_i}$. Так как $A^{F_2} \in m(p_i)$ и $O_{p_i}(A) \neq 1$, то видим, что $A \in F_2$. Пусть Z – группа простого порядка из формации $m(p_i)$. И пусть $D = Z \in A$. Тогда, очевидно, $O_{p_i}(D) = 1$ и

$$D \in m(p_i)F_2 = t(p_i).$$

Из леммы 7 следует, что $D \in f(p_i)$ и $A \in f(p_i)$. Таким образом,

$$t(p_i) = m(p_i)F_2 \subseteq f(p_i).$$

Это показывает, что $t \leq f$. Следовательно, $t = f$. Значит, ввиду леммы 8 имеем

$$M_2 = f(p_1) \vee \dots \vee f(p_m) = m(p_1)F_2 \vee \dots \vee m(p_m)F_2.$$

Ввиду теоремы 2 видим, что F_1 – однопорожденная ω -насыщенная формация. Следовательно, ввиду леммы 9 $m(p_i)$ – однопорожденная формация для всех $i=1, \dots, m$. Теперь ввиду леммы 4 можно заключить, что

$$M_2 = (m(p_1) \vee \dots \vee m(p_m))F_2.$$

И это показывает, что формация M_2 разложима. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый нами случай невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $t = n = 3$, т.е.

$$F = F_1 F_2 F_3 = M_1 M_2 M_3.$$

В этом случае предположим, что $M_1 M_2 M_3$ – несократимая факторизация формации F . Ввиду леммы 10 видим, что $F_1 F_2$ и $M_1 M_2$ – ненильпотентные формации. Таким образом, вви-

ду теоремы 2 и леммы 3 имеем $F_3 = M_3$. Также по теореме 2 видим, что F_3 и M_3 являются однопорожденными формациями. Итак, ввиду леммы 5 $F_1F_2 = M_1M_2$. По теореме 2 формации F_1F_2 и M_1M_2 являются разрешимыми ω -насыщенными формациями. Следовательно, F_1F_2 и M_1M_2 – однопорожденные разрешимо ω -насыщенные формации. Ввиду случая, когда $t = 2$, видим, что $F_1 = M_1$ и $F_2 = M_2$.

Пусть теперь $F = M_iM_j$, где $i < j$ и $i, j \in 1, 2, 3$. Нетрудно видеть, что $F_1F_2 \in \mathbf{N}$. Если $M_i \in \mathbf{N}$, тогда ввиду леммы 3 имеем $F_3 = M_j$ и по лемме 5 $F_1F_2 = M_i$. Очевидно, это невозможно. Следовательно, M_i – несократимая формация. Таким образом,

$$M_1 = N_\pi = F_1,$$

где $\pi = \pi(M_i)$. И снова, используя лемму 8, видим, что $F_2F_3 = M_j$. Противоречие. Таким образом, рассматриваемый нами случай невозможен. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y., 1992. – 889 p.
2. Skiba, A.N. Multiply $\mathbf{L}$ -Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. – 2000. – № 52(6). – P. 783–797.
3. Шеметков, Л.А. Кратно Ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Neuman, X. Varieties of groups / X. Neuman. – Ergeb. Math. Band 37. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–N. Y. – 1967.
5. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Институт математики СО АН СССР. – Новосибирск, 1990. – 142 с.
6. Go, W. Factorization theory of one-generated Bear ω -local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.
7. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Белорусская наука, 1997. – 240 с.

Поступила в редакцию 04.05.2012. Принята в печать 14.06.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.