УДК 512.542

Однозначность разложения ограниченной разрешимо ω-насыщенной формации на неразложимые множители

В.М. Селькин
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Все рассматриваемые группы конечны. Формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если формация $\mathfrak{F}$ является подформацией некоторой однопорожденной формации. Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ – произведение формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_t$ и $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1}\ldots\mathfrak{F}_t$ для всех $i=1,\ldots,t$, тогда $\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ называется несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется неразложимой, если она не может быть представлена в виде $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются нееденичными формациями. В данной работе доказывается, что если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ – произведение неразложимых формаций $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_t$ и $\mathfrak{F}$ является ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией, то все множители такой факторизации формации $\mathfrak{F}$ однозначно определены.

Ключевые слова: *факторизация формаций, формации конечных групп, разрешимо ω-насыщенная формация, ограниченная формация.*

The uniqueness of factorization of the limited solubly ω-saturated formation

Selkin V.M.
Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

All groups considered are finite. We say that $\mathfrak{F}$ is a limited formation if $\mathfrak{F}$ is a subformation of some one-generated formation. If $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ is the product of formations $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_t$ and $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1}\ldots\mathfrak{F}_t$ for all $i=1,\ldots,t$, then we call $\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ a noncancellative factorization of the formation $\mathfrak{F}$. A formation $\mathfrak{F}$ is nondecomposable if $\mathfrak{F}$ cannot be written as a product $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, where $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ are nonidentity formations. In this paper we proved that if $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_t$ be the product of nondecomposable formations $\mathfrak{F}_1,\ldots,\mathfrak{F}_t$ and $\mathfrak{F}$ is a limited solubly ω-saturated formation, then all the factors of $\mathfrak{F}_1\ldots\mathfrak{F}_t$ are uniquely determined.

Key words: *factorization of formation, formation of finite groups, solubly ω-saturated formation, limited formation.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, что каждая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую через $G^{\mathfrak{F}}$), факторгруппа по которой снова принадлежит $\mathfrak{F}$. Эта подгруппа называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Следуя [1], мы будем использовать символ $C^p(G)$, чтобы обозначать пересечение всех централизаторов абелевых p-главных факторов конечной группы G (заметим, что $C^p(G)=G$, если G не имеет таких главных факторов). Пусть $\mathfrak{X}$ – множество конечных групп. Тогда используем символ $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$, чтобы обозначить класс всех абелевых простых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. Также пишем, что $\mathrm{Com}(G)$ для множества $\mathrm{Com}(\{G\})$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Для любой функции f вида

$$f:\omega\cup\{\omega'\}\to\{\text{формации групп}\} \qquad \text{(I)}$$

мы определим, следуя [2],

$$CF_\omega(f)=$$
$$=\{G \text{ – конечная группа } \mid G/(R(G)\cap O_\omega(G))\in f(\omega')$$
$$\text{и}$$
$$G/C^p(G)\in f(p) \text{ для любого простого числа}$$
$$p\in\omega\cap\pi(\mathrm{Com}(G))\},$$

где подгруппа $R(G)$ обозначает корадикал группы G (т.е. $R(G)$ – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G) и $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (I). В этом случае f называется ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}$. Для произвольной функции f вида (I), следуя [3], символ $LF_\omega(f)$ обозначает класс групп

$$(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)$$
$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ для некоторой функции f вида (I), то формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, а f – ω-локальный V-спутник этой формации. Пересечение всех разрешимо ω-насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G, называется однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формацией и обозначается $c_\omega\mathrm{form}(G)$. Однопорожденные ω-насыщенные формации определяются аналогично и обозначаются $l_\omega\mathrm{form}(G)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной, если формация $\mathfrak{F}$ является подформацией некоторой однопорожденной формации. Аналогично разрешимо ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией, если она является подформацией некоторой однопорожденной разрешимо ω-насыщенной формации.

Если
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t \qquad \text{(II)}$$
произведение формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ и
$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \dots \mathfrak{F}_t$$
для всех $i = 1, \dots, t$, тогда (II) называется несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется неразложимой, если она не может быть представлена в виде $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются неединичными формациями.

Напомним известный результат Неймана–Шмелькина: если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_t$, где $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_t$ являются неразложимыми многообразиями групп, то все множители $\mathfrak{M}_i$ однозначно определены (теорема 23.32 [4]). Однако для формаций конечных групп аналогичный результат не был доказан (см. вопрос 10.58 [5]). В этой работе доказывается следующая теорема, дающая ответ на данный вопрос.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t$ – произведение неразложимых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$. Если $\mathfrak{F}$ является ограниченной разрешимо ω-насыщенной формацией, то все множители такой факторизации формации $\mathfrak{F}$ однозначно определены.*

Предварительные результаты. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы и теоремы.

Лемма 1 (лемма 5.3 [6]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_t$ – несократимая факторизация формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ – некоторая однопорожденная ω-насыщенная формация. Если $\mathfrak{F}$ является разрешимо ω-насыщенной формацией, то $t \leq 3$.*

Теорема 2 (теорема 5.5 [6]). *Произведение*
$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t \qquad \text{(III)}$$
является несократимой факторизацией некоторой ограниченной разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $t \leq 3$ и каждый фактор из (III) – неединичная формация;

2) $\mathfrak{F}_1$ – однопорожденная ω-насыщенная подформация из $\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$ и $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1)$;

3) если $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}_\omega$, тогда $t = 2$, $\mathfrak{F}_2$ – абелева однопорожденная формация и для любых групп $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{F}_2$, $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$ и $(|A/O_\omega(A)|, |B|) = 1$;

4) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $t = 3$, тогда $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, $\mathfrak{F}_3$ – однопорожденная абелева формация и для всех $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, формация $\mathfrak{F}_2(p)$ является нильпотентной однопорожденной формацией и для всех групп $A \in \mathfrak{F}_2$ и $B \in \mathfrak{F}_3$, $\pi(A/O_p(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$;

5) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, $t = 2$ и $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, тогда формации $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2$ ограничены;

6) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа p, то $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2(p)$ (если $p \in \omega$) являются ограниченными формациями, $\mathfrak{F}_2 \not\subseteq \mathfrak{F}_1$, и существует такая группа $B \in \mathfrak{F}_2$, что для всех групп $A \in \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$-корадикал группы $T^{\mathfrak{F}_2}$ регулярного сплетения $T = A \wr B$ содержится подпрямо в базе группы T.

Лемма 3 (лемма 7.1 [6]). *Пусть $\mathfrak{M}_1\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_2\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$ – разрешимо*

ω-насыщенные формации, $\mathfrak{H}_i$ – такие формации, что $(|A/F_\omega(A)|,|B|)=1$ *и* $(|A/O_\omega(A)|,|B|)=1$, *для всех групп* $A\in\mathfrak{M}_i$ *и* $B\in\mathfrak{H}_i$. *Если либо* $\mathfrak{M}_i$ Ъ $\mathfrak{N}_\omega$, *для* $i=1,2$, *либо* $\mathfrak{M}_i\subseteq\mathfrak{N}$, *для* $i=1,2$, $|\pi(\mathfrak{M}_1)|>1$ *и* $|\pi(\mathfrak{M}_2)|>1$, *тогда* $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2$.

Лемма 4 (лемма 3.4.4 [7]). *Пусть* $\mathfrak{M}_1,\mathfrak{M}_2,\dots,\mathfrak{M}_t,\mathfrak{H}$ *– однопорожденные наследственные формации. Тогда*

$$(\mathfrak{M}_1\vee\mathfrak{M}_2\vee\dots\vee\mathfrak{M}_t)\mathfrak{H}=\mathfrak{M}_1\mathfrak{H}\vee\mathfrak{M}_2\mathfrak{H}\vee\dots\vee\mathfrak{M}_t\mathfrak{H}.$$

Лемма 5 (лемма 3.4.5 [7]). *Пусть* $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\dots\mathfrak{H}_t$, *где* $\mathfrak{H}_i$ *– однопорожденная формация,* $i=1,\dots,t$. *Если* $\mathfrak{M}_1$ *и* $\mathfrak{M}_2$ *– такие формации, что* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{H}=\mathfrak{M}_2\mathfrak{H}$, *тогда* $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_2$.

Лемма 6 (лемма 4.5 [6]). *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *– разрешимо* ω*-насыщенная формация с внутренним* ω*-композиционным спутником* m. *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– такая непустая формация, что* $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{H}))\cap\omega\subseteq\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$. *Тогда* $\mathfrak{F}=CF_\omega(f)$, *где*

$$f(a)=\begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если}\quad a=p\in\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))\cap\omega;\\ \varnothing, & \text{если}\quad a=p\in\omega\setminus\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}));\\ m(\omega')\mathfrak{H}, & \text{если}\quad a=\omega'.\end{cases}$$

Лемма 7 (лемма 4.2 [6]). *Пусть* $\mathfrak{F}=c_\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ *и* $\pi=\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))\cap\omega$. *И пусть* f *– минимальный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(p)=\mathrm{form}(G/C^p(G)\,|\,G\in\mathfrak{X})$ *для всех* $p\in\pi$;

2) $f(p)=\varnothing$ *для всех* $p\in\omega\setminus\pi$;

3) $f(\omega')=\mathrm{form}(G/(O_\omega(G)\cap R(G))\,|\,G\in\mathfrak{X})$;

4) если $\mathfrak{F}=CF_\omega(h)$, *то*

$$f(p)=\mathrm{form}(A\,|\,A\in h(p)\cap\mathfrak{F}, O_p(A)=1)$$

для всех $p\in\pi$ *и*

$$f(\omega')=\mathrm{form}(A\,|\,A\in h(\omega')\cap\mathfrak{F}$$

$$\text{и } O_\omega(A)\cap R(A)=1).$$

Лемма 8 (лемма 4.6 [6]). *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ *– разрешимо* ω*-насыщенная формация, где* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– формации, причем* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$. *Пусть* f *– минимальный* ω*-композиционный спутник формации* $\mathfrak{F}$. *Предположим, что* $|\pi(\mathfrak{M})\cap\omega|>1$. *Тогда*

$$\mathfrak{H}=\mathrm{form}(f(p)\cup f(q))$$

для любых двух различных простых чисел $\{p,q\}\in\pi(\mathfrak{M})\cap\omega$.

Лемма 9 (лемма 5 [3]). *Пусть* $\mathfrak{F}=l_\omega\mathrm{form}(G)$ *для некоторой группы* G. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет минимальный* ω*-локальный спутник* f *такой, что следующие условия имеют место:*

1) $f(p)=\mathrm{form}(G/F_p(G))$ *для всех* $p\in\pi(G)\cap\omega$;

2) $f(p)=\varnothing$ *для всех* $p\in\omega\setminus\pi(G)$;

3) если $\mathfrak{F}=LF_\omega\langle h\rangle$ *для некоторого* ω*-локального спутника* h, *то*

$$f(p)=\mathrm{form}(A\,|\,A\in h(p)\cap\mathfrak{F}, O_p(A)=1)$$

для всех $p\in\pi(G)\cap\omega$ *и*

$$f(\omega')=\mathrm{form}(A\,|\,A\in h(\omega')\cap\mathfrak{F} \text{ и } O_\omega(A)=1).$$

Лемма 10 (лемма 5.1 [6]). *Пусть* $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– нееденичные формации. Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *является либо неабелевой, либо ненильпотентной формацией с* $|\pi(\mathfrak{F})|>1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}_1\dots\mathfrak{M}_n$, где $\mathfrak{M}_1,\dots,\mathfrak{M}_n$ – неразложимые формации. Необходимо показать, что $n=t$ и $\mathfrak{F}_i=\mathfrak{M}_i$ для всех $i=1,\dots,t$. Ввиду леммы 1 можем показать, что $n\le 3$.

Рассмотрим случай, когда $t=n=2$, т.е.

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2=\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2.$$

Так как $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – неразложимые формации, то имеем

$$\mathfrak{M}_1\ne\mathfrak{F}\ne\mathfrak{M}_2.$$

Это значит, что формация $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ является несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$. Если обе формации $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ – ненильпотентны или обе нильпотентны и $|\pi(\mathfrak{F}_1)|>1$, $|\pi(\mathfrak{M}_1)|>1$, то по теореме 2 и лемме 3 имеем $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{M}_2$. Следовательно, по лемме 5 имеем $\mathfrak{F}_1=\mathfrak{M}_1$.

Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{M}_1$ – такие нильпотентные формации, что $|\pi(\mathfrak{F}_1)|=1$ и $|\pi(\mathfrak{M}_1)|>1$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1)=p\in\omega$. Значит, $\mathfrak{N}_p\subseteq\mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p=\mathfrak{F}_1$. Таким образом,

$$\mathfrak{F}_1=\mathfrak{N}_p=\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_p,$$

т.е. $\mathcal{F}_1$ – разложимая формация. Полученное противоречие показывает, что $\pi(\mathcal{F}_1)\not\subseteq\omega$. Ввиду теоремы 2 $\pi(\mathcal{F})\cap\omega\subseteq\pi(\mathcal{F}_1)$. Так как $\pi(\mathcal{M}_1)\subseteq\pi(\mathcal{F})$, то $\pi(\mathcal{M}_1)\cap\omega=\varnothing$. Тогда $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{M}_2$ – однопорожденные абелевы формации и

$$\pi(\mathcal{F}_1)\cap\pi(\mathcal{F}_2)=\pi(\mathcal{M}_1)\cap\pi(\mathcal{M}_2)=\varnothing.$$

Теперь покажем, что $\mathcal{F}_2=\mathcal{M}_2$. Предположим, что $\mathcal{F}_2\not\subseteq\mathcal{M}_2$, и пусть B – группа минимального порядка из $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{M}_2$. Пусть $1\neq A\in\mathcal{F}_1$. Тогда

$$T=A\wr B=[K]B\in\mathcal{F},$$

где K – база регулярного сплетения T. Следовательно,

$$T^{\mathcal{M}_2}\in\mathcal{M}_1\subseteq\mathfrak{N}.$$

Так как $(|A|,|B|)=1$, то

$$T^{\mathcal{M}_2}\subseteq F(T)=K.$$

Значит,

$$T/F(K)=T/K\simeq B\in\mathcal{M}_2.$$

Противоречие. Следовательно, $\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{M}_2$. Используя аналогичные рассуждения можно показать, что $\mathcal{M}_2\subseteq\mathcal{F}_2$. Значит, $\mathcal{F}_2=\mathcal{M}_2$. Теперь рассуждая аналогично нетрудно видеть, что $\mathcal{F}_1=\mathcal{M}_1$. Если

$$|\pi(\mathcal{F}_1)|=1=|\pi(\mathcal{F}_1)|,$$

то нетрудно видеть, что $\mathcal{F}_1=\mathcal{M}_1$.

Пусть теперь $\mathcal{M}_1$ – нильпотентная формация и $\mathcal{F}_1$ – ненильпотентная формация. Ввиду теоремы 2 имеем $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{N}_\omega\mathcal{N}$. Пусть A – группа минимального порядка из $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{N}$. И пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы A. Так как $A\in\mathcal{N}_\omega\mathcal{N}$, то $A^{\mathcal{N}}\in\mathcal{N}_\omega$. Значит, $R=A^{\mathcal{N}}\in\mathcal{N}_\omega$. Следовательно, R – p-группа для некоторого простого числа $p\in\omega$. Нетрудно видеть, что $R=F_p(A)$. Следовательно, $A/R\in m(p)$, где m – минимальный ω-локальный спутник формации $\mathcal{F}_1$. Пусть

$$\pi=\{p_1,\dots,p_m\}=\pi(\mathrm{Com}(\mathcal{F}_1))\cap\omega.$$

Так как $p\in\pi$, видим, что

$$\mathcal{M}_0=m(p_1)\vee\dots\vee m(p_m)$$

является неединичной формацией.

Ввиду условия (2) теоремы 2 и леммы 6 видим, что формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник t, что $t(p_i)=m(p_i)\mathfrak{F}_2$ для всех $i=1,\dots,m$. Пусть f – минимальный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $t(p_i)=f(p_i)$, для всех $i=1,\dots,m$. Нетрудно видеть, что включение $f\le t$ очевидно. Пусть A – группа минимального порядка из $m(p_i)\mathfrak{F}_2\setminus f(p_i)$, где $m(p_i)\neq(1)$. Тогда, очевидно, что $m(p_i)\mathfrak{F}_2\subseteq\mathfrak{F}$. Следовательно, когда $O_{p_i}(A)=1$, то ввиду леммы 7 $A\in f(p_i)$. Если $O_{p_i}(A)\neq1$, то по лемме 2 имеем $\mathcal{M}_1\subseteq\mathcal{N}_\omega\mathcal{N}$, т.е. $\mathcal{M}_1$ – метанильпотентная формация. Значит, для любой группы $G\in\mathcal{M}_1$ имеем, что p не делит порядок группы $G/F_p(G)$ для всякого простого числа $p\in\pi(\mathcal{M}_1)\cap\omega$. Следовательно, $m(p_i)\subseteq\mathfrak{N}_{p_i}$. Так как $A^{\mathfrak{F}_2}\in m(p_i)$ и $O_{p_i}(A)\neq1$, то видим, что $A\in\mathfrak{F}_2$. Пусть Z – группа простого порядка из формации $m(p_i)$. И пусть $D=Z\wr A$. Тогда, очевидно, $O_{p_i}(D)=1$ и

$$D\in m(p_i)\mathfrak{F}_2=t(p_i).$$

Из леммы 7 следует, что $D\in f(p_i)$ и $A\in f(p_i)$. Таким образом,

$$t(p_i)=m(p_i)\mathfrak{F}_2\subseteq f(p_i).$$

Это показывает, что $t\le f$. Следовательно, $t=f$. Значит, ввиду леммы 8 имеем

$$\mathcal{M}_2=f(p_1)\vee\dots\vee f(p_m)=m(p_1)\mathfrak{F}_2\vee\dots\vee m(p_m)\mathfrak{F}_2.$$

Ввиду теоремы 2 видим, что $\mathfrak{F}_1$ – однопорожденная ω-насыщенная формация. Следовательно, ввиду леммы 9 $m(p_i)$ – однопорожденная формация для всех $i=1,\dots,m$. Теперь ввиду леммы 4 можно заключить, что
$\mathcal{M}_2=(m(p_1)\vee\dots\vee m(p_m))\mathfrak{F}_2$.
И это показывает, что формация $\mathcal{M}_2$ разложима. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый нами случай невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $t=n=3$, т.е.

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3=\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3.$$

В этом случае предположим, что $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3$ – несократимая факторизация формации $\mathcal{F}$. Ввиду леммы 10 видим, что $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ – ненильпотентные формации. Таким образом, ввиду теоремы 2 и леммы 3 имеем $\mathscr{F}_3 = \mathscr{M}_3$. Также по теореме 2 видим, что $\mathfrak{F}_3$ и $\mathfrak{M}_3$ являются однопорожденными формациями. Итак, ввиду леммы 5 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2 = \mathscr{M}_1\mathscr{M}_2$. По теореме 2 формации $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ и $\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2$ являются разрешимыми ω-насыщенными формациями. Следовательно, $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ и $\mathscr{M}_1\mathscr{M}_2$ – однопорожденные разрешимо ω-насыщенные формации. Ввиду случая, когда $t = 2$, видим, что $\mathscr{F}_1 = \mathscr{M}_1$ и $\mathscr{F}_2 = \mathscr{M}_2$.

Пусть теперь $\mathscr{F} = \mathscr{M}_i\mathscr{M}_j$, где $i < j$ и $i, j \in 1,2,3$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ Ъ $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{M}_i$ Ъ $\mathfrak{N}$, тогда ввиду леммы 3 имеем $\mathscr{F}_3 = \mathscr{M}_j$ и по лемме 5 $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2 = \mathfrak{M}_i$. Очевидно, это невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M}_i$ – несократимая формация. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}_1,$$

где $\pi = \pi(\mathscr{M}_1)$. И снова, используя лемму 8, видим, что $\mathscr{F}_2\mathscr{F}_3 = \mathscr{M}_j$. Противоречие. Таким образом, рассматриваемый нами случай невозможен. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y., 1992. – 889 p.
2. Skiba, A.N. Multiply $\mathfrak{L}$-Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. – 2000. – № 52(6). – P. 783–797.
3. Шеметков, Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Neuman, X. Varieties of groups / X. Neuman. – Ergeb. Math. Band 37. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–N. Y. – 1967.
5. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь // Институт математики СО АН СССР. – Новосибирск, 1990. – 142 с.
6. Go, W. Factorization theory of onegenerated Bear ω-local formations / W. Go, V.M. Selkin, K.P. Sham // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35. – P. 2901–2931.
7. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

Поступила в редакцию 04.05.2012. Принята в печать 14.06.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.