УДК 517.587

Движение корней экстремальных полиномов

Ю.В. Трубников, И.А. Орехова, Сунь Байюй
Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В статье приведены некоторые факты из истории исследования построения экстремальных полиномов в областях, лежащих в комплексной плоскости. К рассмотренным положениям относятся: критерий оптимальности А.Н. Колмогорова приближения функции комплексного аргумента обобщенными полиномами, критерий оптимальности В.К. Иванова–Е.Я. Ремеза. Сформулирована схема построения экстремального полинома, основанная на субдифференциальных конструкциях, которая является эффективной, если в зависимости от изменения параметров области задания приближаемой функции следить за движением корней экстремального полинома. В связи с этим в данной работе проводится анализ движения корней экстремальных полиномов второй степени, вида $P(z)=1+a_1z+a_2z^2$, *заданных на некоторых прямоугольниках комплексной плоскости, в зависимости от изменения параметров прямоугольника.*

Ключевые слова: *экстремальный полином, комплексная плоскость, движение корней.*

Movement of the roots of extreme polynomials

Y.V. Trubnikov, I.A. Orehova, Syn Baiyi
Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

The article presents some facts from the history of the research of the construction of extreme polynomials in areas that lie in complex plane. We refer to the considerations: optimality criterion by A.N. Kolmogorov, approximation to the complex argument by generalized polynomial optimality criterion by V.K. Ivanov–E.Ya. Remez. The scheme for constructing extreme polynomial is formulated, which is based on the subdifferential constructions, which is effective if it changes depending on the parameters of the domain of the approximated function, to monitor the movement of the extreme roots of a polynomial. In this regard, this paper analyzes the movement of the roots of polynomials of the second degree extremes, of the type $P(z)=1+a_1z+a_2z^2$, *given at rectangles of the complex plane, depending on changes in the parameters of the rectangle.*

Key words: *extreme polynomial, complex plane, the movement of the roots.*

В связи с построением экстремальных полиномов в областях, лежащих в комплексной плоскости, напомним некоторые аспекты истории исследования этой задачи.

Отсутствие теоремы об альтернансе привело А.Н. Колмогорова в 1948 году к необходимости сформулировать новый критерий оптимальности приближения функции комплексного аргумента обобщенными полиномами (в частном случае приближения алгебраическими многочленами соответствующий критерий был доказан еще в 1911 году Валле-Пуссеном).

Целью данной работы является анализ движения корней экстремальных полиномов второй степени, вида

$$P(z)=1+a_1z+a_2z^2,$$

заданных на некоторых прямоугольниках комплексной плоскости, в зависимости от изменения параметров прямоугольника.

Напомним критерий А.Н. Колмогорова [1].

Определение. *Если на замкнутом ограниченном множестве* M *комплексной плоскости заданы непрерывная функция* $f(z)$ *и полином* $P_n(z)$ *(вообще говоря, обобщенный), то всякая точка,* $z_0\in M$, *в которой выполняется равенство*

$$\left| f\ \ z_0\ - P_n\ \ z_0\ \right| =$$

$$=\left\| f-P_n \right\| := \max_{z\in M}\left| f\ \ z\ - P_n\ \ z\ \right|,$$

называется e-точкой разности $f-P_n$.

Теорема 1 (А.Н. Колмогоров, 1948). *Пусть на замкнутом ограниченном множестве M комплексной плоскости заданы n+1 фиксированных непрерывных функций*

$$\varphi_0(z),\ \varphi_1(z),\ \dots,\ \varphi_n(z)$$

и непрерывная функция f(z), которую следует приблизить обобщенными полиномами вида

$$P_n\ \ z\ = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k\ \ z\ . \qquad (1)$$

Тогда для того чтобы некоторый полином

$$P_n^*(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k^* \varphi_k(z)$$

был полиномом наилучшего равномерного приближения (экстремальным полиномом) для функции f(z) в том смысле, что

$$\left\| f-P_n^* \right\| = \inf_{P_n} \left\| f-P_n \right\|,$$

необходимо и достаточно, чтобы на множестве $E=E(P_n^*)$ *всех е-точек из М при любом полиноме* $P_n(z)$ *вида* (1) *выполнялось неравенство*

$$\min_{z\in E} \operatorname{Re} P_n(z)\overline{\left[f(z)-P_n^*(z)\right]} \le 0. \qquad (2)$$

Трудность использования этого критерия в том, что е-точки разности $f-P_n^*$ *не известны и в проверяемые условия входит произвольный полином* $P_n(z)$.

Еще одним критерием является критерий оптимальности В.К. Иванова–Е.Я. Ремеза (1952, 1953):

Теорема 2 (В.К. Иванов, Е.Я. Ремез). *Для того чтобы для непрерывной на М функции f(z) некоторый полином* $P_n^*(z)$ *вида (1) был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество* $(z_k)_1^m$ $(1\le m\le 2n+3)$ *такое, что*

$$\left| f(z_k)-P_n^*(z_k) \right| = \left\| f-P_n^* \right\|,$$

и положительные числа ρ_k (k = 1, 2, …, m) *такие, чтобы при любом полиноме* $P_n(z)$ *вида (1) выполнялось равенство*

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k \overline{\left[f(z_k)-P_n^*(z_k)\right]} P_n(z_k)=0. \qquad (3)$$

Отметим, что условие (3) проверять легче, чем неравенство (2), однако рассматриваемая проблема является проблемой общей теории экстремальных задач и в данной статье для построения экстремальных полиномов в областях комплексной плоскости нами применяются классические критерии оптимальности, известные в теории экстремальных задач.

Материал и методы. Напомним, прежде всего, определение субдифференциала нормы. Пусть $(E,\|\cdot\|)$ – произвольное банахово пространство (действительное или комплексное), $(E^*,\|\cdot\|_*)$ – пространство, сопряженное пространству E. Функционал $x^*\in E^*$ называется субградиентом нормы в точке $x\in E$, если

$$\forall h\in E \quad \|x+h\|-\|x\| \ge \operatorname{Re}\langle x^*,h\rangle, \qquad (4)$$

где Re z – действительная часть комплексного числа z; $\langle x^*,h\rangle$ – значение функционала x^* на векторе h.

Множество всех субградиентов нормы в точке x называется субдифференциалом нормы в точке x и обозначается $\partial\|x\|$, т.е.

$$\partial\|x\| = \{x^*\in E^* : \forall h\in E \ \|x+h\| - \\ -\|x\| \ge \operatorname{Re}\langle x^*,h\rangle\}.$$

Пусть G – конечномерное подпространство банахова пространства E. Сформулируем фактически предложения 2 из [2], но в удобной для дальнейшего изложения форме.

Теорема 3. *Элемент* $y\in G$ *тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки* $x\notin G$, *когда*

$$\exists \mu \in \partial\|y-x\| \vee \in \partial\|x-y\|$$
$$\forall h\in G \ \operatorname{Re}\langle \mu,h\rangle = 0. \qquad (5)$$

Таким образом, на основе критерия (5) можно сформулировать следующую схему построения экстремального полинома:

1) исходя из некоторого расположения корней полинома P_n, *определенного на прямоугольнике комплексной плоскости, найти систему е-точек разности* $f(z)-P_n(z)$;

2) решить систему уравнений

$$\operatorname{Re}\langle \mu,\varphi_k\rangle = 0 \quad (k=0,1,...,n), \qquad (6)$$
$$\operatorname{Re}\langle \mu, f-P_n\rangle = \|f-P_n\|,$$
$$\mu\in\partial\|f-P_n\|. \qquad (7)$$

Если в результате решения системы уравнений (6)–(7) будет найден соответствующий функционал μ, то этот факт в силу критерия (5) гарантирует экстремальность P_n. *Если анализ системы (6)–(7) приведет к факту отсутствия такого функционала, то, изменяя расположение корней полинома* P_n, *данную схему можно применить еще раз и т.д.*

Данная схема становится эффективной, если в зависимости от изменения параметров области задания приближаемой функции f(z) следить за движением корней экстремального полинома.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим следующую задачу: пусть $f(z)\equiv 1$, $\varphi_0(z)=z$, $\varphi_1(z)=z^2$, и областью D является прямоугольник с вершинами в точках:

$$a+\delta+hi,\ a-\delta+hi,\ a-\delta-hi,\ a+\delta-hi.$$

На этом прямоугольнике D ($0 < \delta < a$, $0 \le h$) требуется найти полином второй степени вида

$$P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 \qquad (8)$$

с минимальной равномерной (чебышевской) нормой.

При h=0 прямоугольник превращается в отрезок $[a - \delta,\ a + \delta]$ и такой полином [3] имеет вид:

$$P(t) = 1 - \frac{4at}{2a^2 - \delta^2} + \frac{2t^2}{2a^2 - \delta^2}. \qquad (9)$$

Корнями полинома (9) являются числа

$$t_1 = a - \frac{\delta}{\sqrt{2}},\ t_2 = a + \frac{\delta}{\sqrt{2}}. \qquad (10)$$

Проследим движение корней при фиксированных a и δ в зависимости от h ($0 \le h < \infty$). Для этого обозначим

$$\frac{\delta}{a} = s^{\frac{1}{2}},\ \frac{h}{a} = \tau^{\frac{1}{2}} \qquad (0 < \delta < a). \qquad (11)$$

Основным результатом данной статьи является

Теорема 4. *При выполнении неравенства*

$$0 < \tau \le \frac{1}{8}[-(4 + 3s) + \sqrt{16 + 40s - 7s^2}] \qquad (12)$$

экстремальный полином $P_*(z)$ имеет вид

$$P_*(z) = \left(1 - \frac{z}{a - \Delta}\right)\left(1 - \frac{z}{a + \Delta}\right), \qquad (13)$$

где

$$\Delta = \sqrt{\frac{\delta^2}{2} + h^2} = a\sqrt{\frac{s}{2} + \tau}, \qquad (14)$$

т.е. имеет действительные корни, которые при возрастании h на интервале (12) удаляются от точки a. Норма $\|P_*\|$ в этом случае находится по формуле

$$\|P_*\| = \frac{4h^2 + \delta^2}{2a^2 - \delta^2 - 2h^2} = \frac{4\tau + s}{2 - s - 2\tau}. \qquad (15)$$

При выполнении неравенств

$$\frac{1}{8}\left[-(4 + 3s) + \sqrt{16 + 40s - 7s^2}\right] < \tau \le \frac{1}{2}\left[-(1 + 2s) + \sqrt{1 + 8s}\right] \qquad (16)$$

экстремальный полином имеет вид (13), при этом

$$\Delta^2 = \frac{a^2(\delta^2 - h^2) - (\delta^2 + h^2)^2}{a^2 + h^2 - \delta^2} = \frac{a^2\left[s - \tau - (s + \tau)^2\right]}{1 + \tau - s}, \qquad (17)$$

$$\|P_*\| = \frac{2\delta h}{\sqrt{(a^2 + h^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 h^2}} = \frac{2\sqrt{s\tau}}{\sqrt{(1 + \tau - s)^2 + 4s\tau}}. \qquad (18)$$

Корни такого полинома являются действительными числами, которые при возрастании h на полуинтервале (16) приближаются к точке a. При

$$\tau = \frac{1}{2}\left[-(1 + 2s) + \sqrt{1 + 8s}\right] \qquad (19)$$

выполняется равенство $\Delta = 0$, т.е. корни z_1 и z_2 полинома (13) совпадают и равны $z_1 = z_2 = a$.

При τ, удовлетворяющему равенству (19), происходит перестройка поведения корней: корни начинают двигаться в вертикальном направлении.

При выполнении неравенства

$$\frac{1}{2}\left[-(1 + 2s) + \sqrt{1 + 8s}\right] < \tau \le \frac{1}{2}\left[-(3s + 1) + \sqrt{1 + 22s - 7s^2}\right] \qquad (20)$$

корни расположены вертикально (являются комплексно сопряженными), полином $P_*(z)$ имеет вид

$$P_*(z) = \left(1 - \frac{z}{a - \Delta i}\right)\left(1 - \frac{z}{a + \Delta i}\right) = 1 - \frac{2az}{a^2 + \Delta^2} + \frac{z^2}{a^2 + \Delta^2}, \qquad (21)$$

где

$$\Delta^2 = \frac{(\delta^2 + h^2)^2 - a^2(\delta^2 - h^2)}{a^2 - \delta^2 + h^2} = \frac{a^2\left[(s + \tau)^2 - s + \tau\right]}{1 + \tau - s}, \qquad (22)$$

при этом

$$\|P_*\| = \frac{2\delta h}{\sqrt{(a^2+h^2-\delta^2)^2+4\delta^2h^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{s\tau}}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}.$$

Далее, если выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\left[-(3s+1)+\sqrt{1+22s-7s^2}\right] < \tau \le 4s^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

то корни расположены вертикально, полином имеет вид (21), где

$$\Delta^2 = \delta^2 + \frac{h^2}{2} = s + \frac{\tau}{2},$$

а его норма выражается следующим образом:

$$\|P_*\| = \frac{4\delta^2+h^2}{2a^2+2\delta^2+h^2} = \frac{4s+\tau}{2+2s+\tau}.$$

И, наконец, если $4s^{\frac{1}{2}} < \tau$*, то полином* $P_*(z)$ *имеет вид:*

$$P_*(z) = 1 - \frac{a-\delta+\sqrt{(a-\delta)^2+h^2}}{(a-\delta)^2+h^2}z +$$

$$+\frac{1}{(a-\delta)^2+h^2}z^2, \quad (24)$$

его норма

$$\|P_*\| = 1 - \frac{a-\delta}{\sqrt{(a-\delta)^2+h^2}} = 1 - \frac{1-s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1-s^{\frac{1}{2}}\right)^2+\tau}}. \quad (25)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай выполнения неравенства (12). Так как

$$P(x+iy) = \left(1-\frac{x+iy}{a-\Delta}\right)\left(1-\frac{x+iy}{a+\Delta}\right) =$$

$$= \frac{t^2-\Delta^2-y^2}{a^2-\Delta^2} + \frac{2yt}{a^2-\Delta^2}i, \qquad t = x-a,$$

то

$$\operatorname{Re}P = \frac{t^2-\Delta^2-y^2}{a^2-\Delta^2}, \operatorname{Im}P = \frac{2yt}{a^2-\Delta^2} \quad (26)$$

и при фиксированном $y = h$ зависимость квадрата модуля от переменной $t \in [-\delta, \delta]$ имеет вид

$$|P(x+iy)|^2 = \frac{1}{(a^2-\Delta^2)^2} \times$$

$$\times \left[(t^2-\Delta^2-h^2)^2+4h^2t^2\right], \quad (27)$$

где $t = x - a$.

Из выражения (27) следует, что функция

$$g(t) := (t^2-\Delta^2-h^2)^2+4h^2t^2 =$$

$$= t^4+2(h^2-\Delta^2)t^2+(\Delta^2+h^2)^2$$

при $h^2 - \Delta^2 < 0$ может принимать на отрезке $[-\delta, \delta]$ максимальное значение при $t = 0$, $t = -\delta$, $t = \delta$. Выберем параметр Δ из условия равенства модулей полинома $P(x + iy)$ при $t = 0$ и при $t = \pm\,\delta$, т.е. равенства

$$(\Delta^2+h^2)^2 = \delta^4+2(h^2-\Delta^2)\delta^2+(\Delta^2+h^2)^2. \quad (28)$$

Из уравнения (28) относительно параметра Δ получаем

$$\Delta^2 = \frac{\delta^2}{2}+h^2 = a^2\left(\frac{s}{2}+\tau\right). \quad (29)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *e*-точками полинома (13) (а это и есть разность между *f(z)* ≡ 1 и приближающим объектом) являются точки $a+\delta+hi$, $a+hi$, $a-\delta+hi$, $a-\delta-hi$, $a-hi$, $a+\delta-hi$.

При этом, если

$$P(a-\delta+hi) = re^{i\varphi_1}, P(a+hi) = re^{i\varphi_2},$$

$$P(a+\delta+hi) = re^{i\varphi_3}, \text{ то}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{r}\operatorname{Re}P(a-\delta+hi) =$$

$$= \frac{\delta^2-4h^2}{\delta^2+4h^2} = \frac{s-4\tau}{s+4\tau};$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{1}{r}\operatorname{Im}P(a-\delta+hi) =$$

$$= -\frac{4\delta h}{\delta^2+4h^2} = -\frac{4(s\tau)^{\frac{1}{2}}}{s+4\tau};$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{r}\left(-\frac{\delta^2+4h^2}{2a^2-\delta^2-2h^2}\right) = -1;$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{1}{r}\operatorname{Im}P(a+hi) = 0;$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{1}{r}\operatorname{Re}P(a+\delta+hi) =$$

$$= \frac{\delta^2-4h^2}{\delta^2+4h^2} = \frac{s-4\tau}{s+4\tau};$$

$$\sin\varphi_3 = \frac{1}{r}\operatorname{Im}P(a+\delta+hi) =$$

$$=\frac{4\delta h}{\delta^2+4h^2}=\frac{4\ \ s\tau^{\frac{1}{2}}}{s+4\tau}.$$

Требуемый функционал μ, удовлетворяющий равенствам (6), будем искать в виде выпуклой комбинации дельта-функций (и это соответствует критерию Иванова–Ремеза). В развернутом виде уравнения (6) запишутся следующим образом:

$$\mathrm{Re}[\rho_1\ \ \cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\ \ \ a-\delta+hi\ \ +$$
$$+\rho_2\ \ \cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\ \ \ a+hi\ \ +$$
$$+\rho_3\ \ \cos\varphi_3-i\sin\varphi_3\ \ \ a+\delta+hi\ \ ]=$$
$$=\rho_1\Big[\ \ a-\delta\ \ \cos\varphi_1+h\sin\varphi_1\Big]+$$
$$+\rho_2\ \ a\cos\varphi_2+h\sin\varphi_2\ \ +$$
$$+\rho_3\Big[\ \ a+\delta\ \ \cos\varphi_3+h\sin\varphi_3\Big]=$$
$$=\rho_1\left[\ \ a-\delta\ \ \frac{\delta^2-4h^2}{\delta^2+4h^2}+h\left(-\frac{4\delta h}{\delta^2+4h^2}\right)\right]+$$
$$+\rho_2\ \ -a\ \ +\rho_3[\ \ a+\delta\ \ \frac{\delta^2-4h^2}{\delta^2+4h^2}+$$
$$+h\frac{4\delta h}{\delta^2+h^2}]=\frac{a\delta^2-\delta^3-4ah^2}{\delta^2+4h^2}\rho_1-$$
$$-a\rho_2+\frac{a\delta^2+\delta^3-4ah^2}{\delta^2+4h^2}\rho^3=0.$$

Умножив обе части полученного уравнения на δ^2+4h^2, получаем уравнение

$$a\delta^2-\delta^3-4ah^2\ \ \rho_1-a\ \ \delta^2+4h^2\ \ \rho_2+$$
$$+\ \ a\delta^2+\delta^3-4ah^2\ \ \rho_3=0. \qquad (30)$$

Построим второе уравнение:

$$\mathrm{Re}[\rho_1\ \ \cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\ \ \ a-\delta+hi\ \ ^2+$$
$$+\rho_2\ \ \cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\ \ \ a+hi\ \ ^2+$$
$$+\rho_3\ \ \cos\varphi_3-i\sin\varphi_3\ \ \ a+\delta+hi\ \ ^2]=$$
$$=\mathrm{Re}\{\rho_1\ \ \cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\ \ [\ \ a-\delta\ \ ^2-h^2+$$
$$+2\ \ a-\delta\ \ hi]+\rho_2\ \ \cos\varphi_2-i\sin\varphi_2\ \ \times$$
$$\times\ \ a^2-h^2+2ahi\ \ +\rho_3\ \ \cos\varphi_3-i\sin\varphi_3\ \ \times$$
$$\times[\ \ a+\delta\ \ ^2-h^2+2\ \ a+\delta\ \ hi]\}=$$
$$=\rho_1\{[\ \ a-\delta\ \ ^2-h^2]\cos\varphi_1+$$
$$+2\ \ a-\delta\ \ h\sin\varphi_1\}+\rho_2\ \ a^2-h^2\ \ \cos\varphi_2+$$
$$+\rho_3\{\Big[\ \ a+\delta\ \ ^2-h^2\Big]\cos\varphi_3+$$
$$+2\ \ a+\delta\ \ h\sin\varphi_3\}=\frac{1}{\delta^2+4h^2}\times$$
$$\times\ \ 2h^2+2ah-\delta h-a\delta+\delta^2\ \ \times$$
$$\times\ \ 2h^2-2ah+\delta h-a\delta+\delta^2\ \ \rho_1+$$
$$+\ \ h^2-a^2\ \ \rho_2+\frac{1}{\delta^2+4h^2}(2h^2+2ah+\delta h+$$
$$+a\delta+\delta^2)(2h^2-2ah-\delta h+a\delta+\delta^2)\rho_3=0.$$

После умножения полученного уравнения на δ^2+4h^2 получаем уравнение

$$\Big[\ \ 2h^2-a\delta+\delta^2\ \ ^2-\ \ 2ah-\delta h\ \ ^2\Big]\rho_1+$$
$$+\ \ \delta^2+4h^2\ \ \ h^2-a^2\ \ \rho_2+$$
$$+[\ \ 2h^2+a\delta+\delta^2\ \ ^2-\ \ 2ah+\delta h\ \ ^2]\rho_3=0. \qquad (31)$$

Уравнение

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=1 \qquad (32)$$

вместе с уравнениями (30)–(31) образуют систему линейных уравнений относительно неизвестных ρ_1, ρ_2, ρ_3. Обозначив матрицу коэффициентов через G, решим полученную систему по правилу Крамера. Для этого найдем соответствующие определители:

$$\det G=-2\delta^5\ \ 2a^2-\delta^2-2h^2\ \ =$$
$$=-2a^7s^{\frac{5}{2}}\ \ 2-s-2\tau\ \ ;$$
$$\det G_1=-\delta^2\ \ \delta^2+4h^2\ \ \times$$
$$\times\ \ 4ah^2+\delta h^2+a\delta^2+a^2\delta\ \ =$$
$$=-a^7s\ \ s+4\tau\ \ \left(4\tau+s^{\frac{1}{2}}\tau+s+s^{\frac{1}{2}}\right);$$
$$\det G_2=2\delta^3(\delta^4+3\delta^2h^2+4a^2h^2+$$
$$+4h^4-\delta^2a^2)=2a^7s^{\frac{3}{2}}(s^2+3s\tau+$$
$$+4\tau+4\tau^2-s);$$
$$\det G_3=-\delta^2\ \ \delta^2+4h^2\ \ (\delta h^2-4ah^2-$$
$$-a\delta^2+a^2\delta)=-a^7s\ \ s+4\tau\ \ \times$$
$$\times\left(s^{\frac{1}{2}}\tau-4\tau-s+s^{\frac{1}{2}}\right).$$

Заметим теперь, что из условия (12) следуют неравенства: $\det G<0$, $\det G_1<0$, $\det G_2\le 0$, $\det G_3<0$. Действительно, неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$s^2+3s\tau+4\tau+4\tau^2\le s, \qquad (33)$$

и так как $0<s<1$, то из (33) следует, что $\tau<\frac{1}{4}$, но тогда

$$s+2\tau<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2.$$

Отрицательность $\det G_1$ очевидна. Отрицательность $\det G_2$ следует из условия (33).

Отрицательность $\det G_3$ вытекает из следующих рассуждений. Неравенство

$$4\tau+s<s^{\frac{1}{2}}\tau+s^{\frac{1}{2}}$$

эквивалентно неравенству

$$\tau<\frac{s^{\frac{1}{2}}-s}{4-s^{\frac{1}{2}}}.$$

Покажем, что из условия (12) следует неравенство

$$\tau<\frac{s-s^2}{3s+4}, \qquad (34)$$

а при любом $0<s<1$ выполняется неравенство

$$\frac{s-s^2}{3s+4}<\frac{s^{\frac{1}{2}}-s}{4-s^{\frac{1}{2}}}. \qquad (35)$$

Неравенство (35) эквивалентно неравенству

$$4s-4s^2-s^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{5}{2}}<3s^{\frac{3}{2}}-3s^2+4s^{\frac{1}{2}}-4s$$

или, что то же самое, неравенству

$$8s^{\frac{1}{2}}+s^2<s^{\frac{3}{2}}+4s+4. \qquad (36)$$

Неравенство (36) очевидным образом выполняется, так как

$$s^2<s^{\frac{3}{2}}+4\left(s-2s^{\frac{1}{2}}+1\right)=s^{\frac{3}{2}}+4\left(s^{\frac{1}{2}}-1\right)^2.$$

В свою очередь, неравенство (34) имеет место, так как при $\tau>0$

$$s^2+3s\tau+4\tau<s^2+3s\tau+4\tau+4\tau^2<s,$$

т.е.

$$\tau<\frac{s-s^2}{3s+4}.$$

Таким образом,

1) построен набор чисел $\rho_1>0$, $\rho_2\geq 0$, $\rho_3>0$, удовлетворяющих критерию Иванова–Ремеза;
2) или найден функционал μ, удовлетворяющий системе уравнений (6)–(7).

И тот и другой факт гарантируют экстремальность полинома (13).

При значениях τ, удовлетворяющих неравенству (12), корни полинома (13) $a-\Delta$, $a+\Delta$ удаляются от точки a, причем их максимальное удаление составляет в силу (14)

$$\Delta_1=a\sqrt{\frac{s}{2}+\frac{1}{8}\left[-(4+3s)+\sqrt{16+40s-7s^2}\right]}. \qquad (37)$$

Далее приступим к исследованию случая, определяемого неравенством (16). Покажем, что при выполнении неравенства (16) справедливо неравенство

$$|P(a+hi)|<|P(a-\delta+hi)|=|P(a+\delta+hi)|. \qquad (38)$$

Действительно, неравенство (38) эквивалентно неравенству

$$\frac{(\Delta^2+h^2)^2}{(a^2-\Delta^2)^2}<$$

$$<\frac{(\delta^2-h^2-\Delta^2)^2+4\delta^2h^2}{(a^2-\Delta^2)^2}, \qquad (39)$$

или, что то же самое, неравенству

$$2\Delta^2<\delta^2+2h^2. \qquad (40)$$

Осуществив подстановку в левую часть неравенства (40) вместо Δ^2 его значения из равенства (17), получаем

$$2\left[a^2(\delta^2-h^2)-(\delta^2+h^2)^2\right]<$$

$$<(\delta^2+2h^2)(a^2+h^2-\delta^2),$$

т.е. в переменных s, τ

$$2\left[s-\tau-(s+\tau)^2\right]<(s+2\tau)(1+\tau-s). \qquad (41)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем неравенство

$$s<4\tau+4\tau^2+3s\tau+s^2,$$

эквивалентное левому из неравенств (16), и его выполнение предполагается.

Далее в равенство (26) подставим значение $t_1=-\delta$, $t_2=\delta$ и значение Δ^2, определяемое равенством (17), тогда

$$\operatorname{Re}P(a-\delta+hi)=\operatorname{Re}P(a+\delta+hi)=$$

$$=\frac{4s\tau}{(1+\tau-s)^2+4s\tau},$$

$$\operatorname{Im}P(a-\delta+hi)=-\frac{2\sqrt{s\tau}(1+\tau-s)}{(1+\tau-s)^2+4s\tau}.$$

Эти равенства позволяют найти $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1$:

$$\cos\varphi_1=\frac{4s\tau}{(1+\tau-s)^2+4s\tau}\cdot\frac{1}{\|P_*\|}=$$

$$=\frac{4s\tau}{(1+\tau-s)^2+4s\tau}\cdot\frac{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}{2\sqrt{s\tau}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{s\tau}}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}};$$

$$\sin\varphi_1=-\frac{2\sqrt{s\tau}\,(1+\tau-s)}{(1+\tau-s)^2+4s\tau}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}{2\sqrt{s\tau}}=$$

$$=-\frac{1+\tau-s}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}},$$

при этом $\cos\varphi_2=\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_2=-\sin\varphi_1$.

Запишем далее систему уравнений для нахождения функционала μ:

$$\rho_1\big[(a-\delta)\cos\varphi_1+h\sin\varphi_1\big]+$$

$$+\rho_2\big[(a+\delta)\cos\varphi_2+h\sin\varphi_2\big]=0\,; \qquad (42)$$

$$\rho_1\{\big[(a-\delta)^2-h^2\big]\cos\varphi_1+$$

$$+2(a-\delta)h\sin\varphi_1\}+\rho_2\{[(a+\delta)^2-h^2]\times$$

$$\times\cos\varphi_1-2(a+\delta)h\sin\varphi_1\}=0. \qquad (43)$$

Так как

$$(a-\delta)\cos\varphi_1+h\sin\varphi_1=$$

$$=\frac{2\left(a-as^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{s\tau}}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}+\frac{a\tau^{\frac{1}{2}}(-1-\tau+s)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}=$$

$$=\frac{a\tau^{\frac{1}{2}}\left(2s^{\frac{1}{2}}-s-1-\tau\right)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}};$$

$$(a+\delta)\cos\varphi_1-h\sin\varphi_1=$$

$$=\frac{2\left(a+as^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{s\tau}}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}-\frac{a\tau^{\frac{1}{2}}(-1-\tau+s)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}=$$

$$=\frac{a\tau^{\frac{1}{2}}\left(2s^{\frac{1}{2}}+s+1+\tau\right)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}};$$

$$\left[(a-\delta)^2-h^2\right]\cos\varphi_1+2(a-\delta)h\times$$

$$\times\sin\varphi_1=\frac{2\sqrt{s\tau}\left[\left(a-as^{\frac{1}{2}}\right)^2-a^2\tau\right]}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}+$$

$$+\frac{2\left(a-as^{\frac{1}{2}}\right)a\tau^{\frac{1}{2}}(-1-\tau+s)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}=$$

$$=\frac{2a^2\tau^{\frac{1}{2}}\left(2s^{\frac{1}{2}}-s-1-\tau\right)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}};$$

$$\left[(a+\delta)^2-h^2\right]\cos\varphi_1-2(a+\delta)h\times$$

$$\times\sin\varphi_1=\frac{2\sqrt{s\tau}\left[\left(a+as^{\frac{1}{2}}\right)^2-a^2\tau\right]}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}-$$

$$-\frac{2\left(a+as^{\frac{1}{2}}\right)a\tau^{\frac{1}{2}}(-1-\tau+s)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}=$$

$$=\frac{2a^2\tau^{\frac{1}{2}}\left(2s^{\frac{1}{2}}+s+1+\tau\right)}{\sqrt{(1+\tau-s)^2+4s\tau}}.$$

Таким образом, уравнения (42) и (43) совпадают, и каждое из них приводится к виду

$$\left(2s^{\frac{1}{2}}-1-\tau-s\right)\rho_1+$$

$$+\left(2s^{\frac{1}{2}}+s+1+\tau\right)\rho_2=0\,. \qquad (44)$$

Вторым уравнением является уравнение

$$\rho_1+\rho_2=1\,. \qquad (45)$$

Решение системы (44)–(45) имеет вид

$$\rho_1=\frac{\left(1+s^{\frac{1}{2}}\right)^2+\tau}{2(1+s+\tau)}>0\,;$$

$$\rho_2=\frac{\left(1-s^{\frac{1}{2}}\right)^2+\tau}{2(1+s+\tau)}>0\,. \qquad (46)$$

Заметим, что неравенства (16) эквивалентны неравенствам

$$\tau+(s+\tau)^2 \le s < 4\tau+s^2+3s\tau+4\tau^2. \qquad (47)$$

Для значений τ, удовлетворяющих неравенствам (16), расстояние Δ от корня до точки a убывает, так как

$$\frac{d(\Delta^2)}{d\tau}=\frac{a^2(3s^2+2s\tau-1-2s-2\tau-\tau^2)}{(1+\tau-s)^2}<0.$$

Очевидно, что числитель последней дроби отрицателен.

При выполнении условия

$$\tau+(\tau+s)^2=s,$$

т.е.

$$\tau=\frac{1}{2}\left[-(1+2s)+\sqrt{1+8s}\right]$$

выполняется равенство $\Delta = 0$, т.е. корни совпадают. Этот факт сразу же следует из равенства (22).

При дальнейшем возрастании τ корни начинают двигаться по вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = a$, при этом полином принимает вид (21). Найдем его действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} P(x+iy)=1+\frac{x^2-2ax-y^2}{a^2+\Delta^2},$$

$$\operatorname{Im} P(x+iy)=\frac{2y(x-a)}{a^2+\Delta^2}.$$

Таким образом,

$$|P(x+iy)|^2=\left(1+\frac{x^2-2ax-y^2}{a^2+\Delta^2}\right)^2+$$

$$+\frac{4y^2(x-a)^2}{(a^2+\Delta^2)^2}$$

и, следовательно,

$$|P(a+\delta)|^2=\frac{(\delta^2+\Delta^2)^2}{(a^2+\Delta^2)^2}<$$

$$<\frac{(\delta^2-h^2+\Delta^2)^2+4\delta^2h^2}{(a^2+\Delta^2)^2}=$$

$$=|P(a+\delta+ih)|^2.$$

Заметим, что неравенство

$$(\delta^2+\Delta^2)^2<(\delta^2+\Delta^2)^2-$$

$$-2(\delta^2+\Delta^2)h^2+h^4+4\delta^2h^2$$

эквивалентно неравенству

$$2\Delta^2<2\delta^2+h^2. \qquad (48)$$

Последнее неравенство имеет место при Δ^2, определяемом равенством (22). Подставив в неравенство (48)

$$\Delta^2=\frac{(\delta^2+h^2)^2-a^2(\delta^2-h^2)}{a^2-\delta^2+h^2},$$

получаем неравенство

$$2(\delta^2+h^2)^2-2a^2(\delta^2-h^2)<$$

$$<2\delta^2(a^2-\delta^2+h^2)+h^2(a^2-\delta^2+h^2),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$4\delta^4+3\delta^2h^2+h^4+a^2h^2<4a^2\delta^2. \qquad (49)$$

Неравенство (49) эквивалентно левому из неравенств (20). Далее, пусть

$$\cos\varphi_1=\frac{\operatorname{Re} P_*(a-\delta+hi)}{\|P_*\|}=\frac{1}{\|P_*\|}\times$$

$$\times\frac{4\delta^2h^2}{(a^2+h^2-2a\delta+\delta^2)(a^2+h^2+2a\delta+\delta^2)};$$

$$\sin\varphi_1=\frac{\operatorname{Im} P_*(a-\delta+ih)}{\|P_*\|}=\frac{1}{\|P_*\|}\times$$

$$\times\frac{-2\delta h(a^2-\delta^2+h^2)}{(a^2+h^2-2a\delta+\delta^2)(a^2+h^2+2a\delta+\delta^2)}.$$

Из последних равенств видно, что

$$\cos\varphi_2=\frac{\operatorname{Re} P_*(a+\delta+hi)}{\|P_*\|}=\cos\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_2=\frac{\operatorname{Im} P_*(a+\delta+ih)}{\|P_*\|}=-\sin\varphi_1.$$

Система уравнений для нахождения функционала μ будет иметь следующий вид:

$$\rho_1\left[(a-\delta)\cos\varphi_1+h\sin\varphi_1\right]+$$

$$+\rho_2\left[(a+\delta)\cos\varphi_2+h\sin\varphi_2\right]=0; \qquad (50)$$

$$\rho_1\{[(a-\delta)^2-h^2]\cos\varphi_1+$$

$$+2(a-\delta)h\sin\varphi_1\}+\rho_2\{[(a+\delta)^2-h^2]\times$$

$$\times\cos\varphi_1-2(a+\delta)h\sin\varphi_2\}=0. \qquad (51)$$

После умножения обеих частей каждого из уравнений (50)–(51) на

$$\|P_*\|(a^2+h^2-2a\delta+\delta^2)(a^2+h^2+2a\delta+\delta^2)$$

эти уравнения примут следующий вид:

$$\rho_1\Big[\ a-\delta\ \ 4\delta^2h^2-2\delta h^2\ \ a^2-\delta^2+h^2\ \ \Big]+$$
$$+\rho_2\Big[\ a+\delta\ \ 4\delta^2h^2-2\delta h^2\ \ a^2-\delta^2+h^2\ \ \Big]=$$
$$=2\delta h^2\ \ 2a\delta-\delta^2-a^2-h^2\ \ \rho_1+$$
$$+2\delta h^2\ \ 2a\delta+\delta^2+a^2+h^2\ \ \rho_2=0;$$

$$\rho_1\{[(a-\delta)^2-h^2]4\delta^2h^2+2(a-\delta)h\times$$
$$\times(-2\delta h)(a^2-\delta^2+h^2)\}+\rho_2\{[(a+\delta)^2-$$
$$-h^2]4\delta^2h^2+2(a+\delta)h\cdot 2\delta h(a^2-\delta^2+h^2)\}=$$
$$=4\delta h^2[a(2a\delta-\delta^2-a^2-h^2)]\rho_1+$$
$$+4\delta h^2[a(2a\delta+\delta^2+a^2+h^2)]\rho_2=0.$$

Таким образом, уравнения (50) и (51) совпадают, а требуемая система примет вид:

$$\begin{cases}\rho_1+\rho_2=1,\\ -[(a-\delta)^2+h^2]\rho_1+[(a+\delta)^2+h^2]\rho_2=0.\end{cases}\qquad(52)$$

Решением системы (52) являются значения

$$\rho_1=\frac{a+\delta\ ^2+h^2}{a+\delta\ ^2+\ a-\delta\ ^2+2h^2}>0,$$

$$\rho_2=\frac{a-\delta\ ^2+h^2}{a+\delta\ ^2+\ a-\delta\ ^2+2h^2}>0.$$

Заметим, что для значений τ, удовлетворяющих неравенствам (20), корни удаляются от точки a. Этот факт является следствием положительности производной $\frac{d\ \ \Delta^2}{d\tau}$.

Случай выполнения неравенства (23) рассмотрен в [4]. Для значений τ, удовлетворяющих неравенствам (23), продолжается удаление корней от точки a, при этом корни остаются на прямой Re z = 0.

Начиная со значения $\tau = 4s^{1/2}$, поведение корней существенно меняется. Найдем корни полинома (24). Умножив обе части уравнения (24) на $(a-\delta)^2+h^2$ и выразив коэффициенты через s и τ, получим уравнение

$$z^2-a\left[1-s^{\frac12}+\sqrt{\left(1-s^{\frac12}\right)^2+\tau}\right]z+$$
$$+a^2\left[\left(1-s^{\frac12}\right)^2+\tau\right]=0.\qquad(53)$$

Пусть $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\beta > 0$) – корни уравнения (53), тогда

$$\alpha=\frac{a}{2}\left[1-s^{\frac12}+\sqrt{\left(1-s^{\frac12}\right)^2+\tau}\right],\qquad(54)$$

т.е. $\alpha > a$ и

$$z_2-z_1\ ^2=\ 2i\beta\ ^2=-4\beta^2=\ z_2+z_1\ ^2-$$
$$-4z_1z_2=a^2\left[1-s^{\frac12}+\sqrt{\left(1-s^{\frac12}\right)^2+\tau}\right]^2-$$
$$-4a^2\left[\left(1-s^{\frac12}\right)^2+\tau\right]=$$
$$=a^2\{(1-s^{\frac12})^2+2(1-s^{\frac12})\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}-$$
$$-3[(1-s^{\frac12})^2+\tau]\}=a^2[1-s^{\frac12}-$$
$$-\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}][1-s^{\frac12}+3\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}],$$

т.е.

$$\beta=\operatorname{Im}z=\frac{a}{2}\{[\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}-(1-s^{\frac12})]\times$$
$$\times[3\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}+1-s^{\frac12}]\}^{\frac12}.\qquad(55)$$

Найдем зависимость Im z от Re z. Из равенства (54) получаем

$$\frac{2\operatorname{Re}z}{a}=1-s^{\frac12}+\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau},$$
$$\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}=\frac{2\operatorname{Re}z}{a}-(1-s^{\frac12}).\qquad(56)$$

Подставляя вместо

$$\sqrt{(1-s^{\frac12})^2+\tau}$$

правую часть равенства (56) в правую часть равенства (55), получаем

$$\beta=\operatorname{Im}z=\frac{a}{2}\{[\frac{2\operatorname{Re}z}{a}-2(1-s^{\frac12})]\times$$
$$\times[3\cdot\frac{2\operatorname{Re}z}{a}-2(1-s^{\frac12})]\}^{\frac12}=a\times$$
$$\times\{[\frac{\operatorname{Re}z}{a}-(1-s^{\frac12})][\frac{3\operatorname{Re}z}{a}-(1-s^{\frac12})]\}^{\frac12}.\qquad(57)$$

Таким образом, корни перемещаются по двум сопряженным кривым, уравнения которых

$$\operatorname{Im}z=\pm a\{[[\frac{\operatorname{Re}z}{a}-(1-s^{\frac12})]\times$$
$$\times[\frac{3\operatorname{Re}z}{a}-(1-s^{\frac12})]\}^{\frac12}.\qquad(58)$$

Отметим, что полином первой степени

$$P_1(z) = 1 - \gamma_0 z, \tag{59}$$

определенный на прямоугольнике D с вершинами в точках $a + \delta + hi$, $a - \delta + hi$, $a - \delta - hi$, $a + \delta - hi$ ($0 < \delta < a$, $0 \leq h$) и имеющий минимальную чебышевскую норму, построен в [5].

Подробное построение полинома (59) и анализ движения его корней проведены в работе [6].

Заключение. Результатом данной работы является сформулированная и доказанная теорема об анализе движения корней экстремальных полиномов второй степени, в зависимости от изменения параметров прямоугольников комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Иоффе, А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
4. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.
5. Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
6. Chebyshev Polynomial Iterations and Approximate Solutions of Linear Operator Equations / A.P. Zabrejko, P.P. Zabrejko // Journal for Analysis and its Applications. – 1994. – Vol. 13, № 4. – P. 667–681.

Поступила в редакцию 22.03.2012. Принята в печать 14.06.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: Yurii_Trubnikov@mail.ru – Трубников Ю.В.