УДК 512.542

О порядках силовских 2-подгрупп конечных групп A, B и $X = A\text{æ}B$ с классической простой группой X

Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун, А.В. Капусто
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

К настоящему времени известны [1] факторизации конечных простых групп их максимальными подгруппами A и B. В приложениях часто возникает необходимость знать для произвольной факторизации $X = A_0 \cdot B_0$, содержатся ли подгруппы A_0 и B_0 в максимальных подгруппах A или B группы $X = A \cdot B$. Такая факторизация называется максимальной факторизацией группы X. В этой статье рассматриваются классические простые группы $X \in \{ PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$; $PSU_n(q)$, $n \geq 3$; $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$, $m \geq 4$; q – всюду нечетное число} и порядки их подгрупп X_2, A_2, B_2 и некоторые смежные вопросы по факторизации.

Ключевые слова: *конечная простая группа, максимальная подгруппа, факторизация группы, силовская подгруппа.*

On the orders of Seel 2-sybgroups of finite A, B groups and $X = A\text{æ}B$ with classical simple X group

E.M. Palchik, S.Y. Bashun, A.V. Kapusto
Educational establishment «Polotsk State University»

By the present time [1] Factorizations of finite simple groups by their maximal subgroups A and B have been known. In appendices there is often the necessity to know for optional factorization $X = A_0 \cdot B_0$ if there are subgroups of A_0 and B_0 in maximal subgroups of A or B group. Such factorization is called maximal factorization of X group. The article considers classical simple groups of $X \in \{ PSp_{2m}(q)$, $m \geq 2$; $PSU_n(q)$, $n \geq 3$; $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$, $m \geq 4$; q – everywhere odd} as well as orders of their subgroups of X_2, A_2, B_2 and some akin issues on factorization.

Key words: *finite simple group, maximal subgroup, factorization of the group, Seel subgroup.*

Основная цель настоящей работы – изучение свойств некоторых классических конечных простых групп и вопросов существования их факторизаций.

В работе используются стандартные обозначения и терминология современной теории конечных групп, которые можно найти в [1–3]. Некоторые из обозначений приводим здесь для удобства чтения.

1. Некоторые обозначения и терминология

– $|G|$ – число различных элементов конечного множества *G* (порядок множества *G*);

– π – некоторое подмножество множества простых чисел;

– π' – множество простых чисел такое, что $\pi' \cap \pi = \varnothing$;

– $\pi(n)$ – множество всех различных простых делителей целого числа *n*;

– $\pi(G) = \pi(|G|)$;

– n_π – π-часть натурального числа *n*, т.е. наибольший делитель числа *n* такой, что $\pi(n) \subseteq \pi$;

– (a, b) – наибольший общий делитель целых чисел *a* и *b*;

– G_π – холлова π-подгруппа группы *G*;

– $[n]$ – целая часть числа *n*;

– S_p (S_π) – силовская (холловская) *p*-подгруппа (π-подгруппа);

– P_i – максимальная параболическая подгруппа группы лиева типа, полученная отбрасыванием *i*-ой вершины в стандартной диаграмме Дынкина;

$A < \cdot G$ – A есть максимальная подгруппа группы *G*;

– $a \mid b$ – *a* делит *b*;

– $AwrB$ – сплетение подгрупп *A* и *B*;

– $A.B$ – группа с $A \lhd A.B$ и $A.B/A \cong B$;

– Z_n – циклическая группа порядка *n*;

– $f_p(m)$ – показатель, с которым *p* входит в число $m!$.

2. Используемые и предварительные результаты

2.1. Лемма [4, леммы 4.3.2, 4.4.2, 4.5.2]. *Пусть q – нечетное число, $GF(q)$ – конечное поле, G – простая классическая группа с полем определения $GF(q)$. Пусть S – силовская 2-подгруппа в G.*

2.1.1. Пусть $G = PSL_n(q)$. Тогда

$$|S| = \frac{1}{(q-1)(n,q-1)}\cdot(q-1)_2^{n-1}\cdot\ q+1\ _2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)_2$$

.

2.1.2. Пусть $G = PSp_{2m}(q)$, $m > 2$. Тогда

$$|S| = \frac{1}{2}\cdot\ (q^2-1)^m\cdot m!\ _2.$$

2.1.3. Пусть $G = PSU_n(q)$. Тогда
если $q \equiv 1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{n-(n,2)}\cdot\left((q-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]!\right)_2;$$

если $q \equiv -1(\bmod 4)$, то

$$|S| = \left((q+1)^{n-1}\cdot\frac{n!}{(n,q+1)}\right)_2.$$

2.1.4. Пусть $G = PSO_{2m+1}(q) = P\Omega_{2m+1}(q)$. Тогда если $q \equiv 1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{m-1}\cdot\ (q-1)^m\cdot m!\ _2;$$

если $q \equiv -1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{m-1}\cdot\ (q+1)^m\cdot m!\ _2.$$

2.1.5. Пусть $G = P\Omega_{2m}^{+}(q)$, $m \geq 4$. Тогда
если $q \equiv 1(\bmod 4)$, то $|S| = 2^{m-3}\cdot\ (q-1)^m\cdot m!\ _2$;
если $q \equiv -1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{m-3}\cdot\ (q+1)^m\cdot m!\ _2.$$

2.1.6. Пусть $G = P\Omega_{2m}^{-}(q)$, $m \geq 4$. Тогда
если $q \equiv 1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{m-1}\cdot\ (q-1)^{m-1}\cdot(m-1)!\ _2;$$

если $q \equiv -1(\bmod 4)$, то

$$|S| = 2^{m-1}\cdot\ (q+1)^{m-1}\cdot(m-1)!\ _2.$$

2.2. Лемма. *Пусть q – целое нечетное число, n – любое натуральное число. Тогда*

(1) $(q^n+1)_2 = (q+1)_2$ если n – нечетное число и $(q^n+1)_2 \leq (q+1)_2$ если n – четное число;

(2) $$(q^n-1)_2 = \begin{cases} (q-1)_2\cdot(n)_2, & \text{если } q \equiv 1\,(\bmod 4); \\ (q^2-1)_2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)_2, & \text{если } q \equiv -1\,(\bmod 4) \text{ и } 2 \mid n; \\ 2, & \text{если } q \equiv -1\,(\bmod 4) \text{ и } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Если n – нечетное число, то

$$q^n+1 = \ q+1\ \cdot\ q^{n-1}-q^{n-2}+\ldots-q+1\ .$$

Во вторых скобках имеем нечетное число и все доказано. Если $n = 2m$, то это есть лемма 5.2.8 в [5]. Этим (1) доказано.

(2) Есть следствие леммы 2.2 в [6]. Лемма доказана.

Всюду ниже q – нечетное число.

2.3. Лемма ([7], леммы 1.1.2 и 1.1.3*). Пусть m – натуральное число, p – простое число. Тогда $\frac{m}{p}-1 \leq f_p(m) < \frac{m}{p-1}$. Если $m \geq p^2$, то $f_p(m) \geq \frac{1}{p}(m+1)$.*

2.4. Лемма. *Пусть n, b, q – натуральные числа. Пусть $1 \neq b \mid n$ и $\frac{n}{b} > 2$, b – простое число. Тогда $\left(\frac{n!}{(n,q-1)}\right)_2 > \left(\frac{n}{b}!\right)_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.3

$$\frac{n}{2b}-1 \leq \left(\frac{n}{b}!\right)_2 < \frac{n}{b}! \tag{2.1}$$

и

$$\frac{n!}{2\cdot(n,q-1)}-1 \leq \left(\frac{n!}{(n,q-1)}\right)_2 < \frac{n!}{(n,q-1)}. \tag{2.2}$$

Заметим, что $\frac{n}{b}! < \frac{(n-1)!}{2}-1$. (2.3)

(2.3) проверяется непосредственно. В самом деле, по условию $n \geq 6$. При $b \geq 2$ (2.3) выполняется.

Из $\frac{n!}{2\cdot(n,q-1)}-1 \geq \frac{(n-1)!}{2}-1$ теперь следует $\frac{n!}{(n,q-1)} \geq (n-1)! \geq \frac{(n-1)!}{2}-1 > \frac{n}{b}!$ и

$$\left(\frac{n!}{(n,q-1)}\right)_2 \geq \frac{n!}{2\cdot(n,q-1)}-1 > \frac{(n-1)!}{2}-1 > \frac{n}{b}! > \left(\frac{n}{b}!\right)_2$$

ввиду (2.3) и (2.2). Лемма доказана.

2.5. Лемма. $\left|PSp_{2m}(q)\right|_2 < \left|PSU_{2m}(q)\right|_2$, $m > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $S \in Syl_2\, PSp_{2m}(q)$, $S_1 \in Syl_2\, PSU_{2m}(q)$. По лемме 2.1.3

$$|S_1| = 2^{2m-2} \cdot \ (q-1)^m \cdot m! \ _2 . \qquad (2.4)$$

По лемме 2.1.2

$$|S| = \frac{1}{2} \cdot \ (q^2-1)^m \cdot m! \ _2 = \frac{1}{2} \cdot \ (q-1)^m \cdot (q+1)^m \cdot m! \ _2 . \qquad (2.5)$$

Так как $4 | (q-1)$, то $(q+1)_2 = 2$. Поэтому

$$|S| = \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot \ (q-1)^m \cdot m! \ _2 . \qquad (2.6)$$

Из (2.6) и (2.4) видно, что $|S| < |S_1|$.

Пусть $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда $(q-1)_2 = 2$. По лемме 2.1.3

$$|S_1| = \left((q+1)^{2m-1} \cdot \frac{2m!}{(2m, q+1)} \right)_2 . \qquad (2.7)$$

По лемме 2.1.2

$$|S| = \frac{1}{2} \cdot \ (q-1)^m \cdot (q+1)^m \cdot m! \ _2 = 2^{m-1} \cdot \ (q+1)^m \cdot m! \ _2 . \qquad (2.8)$$

Из (2.8), (2.7) и леммы 2.3 ввиду $4 | (q+1)$ следует, что $|S| < |S_1|$. Лемма доказана.

2.6. Лемма. *Если* $G = P\Omega_{2m}^-(q)$, m – *нечетное число,* $m \ge 4$, $X = GU_m(q)$, *то* $|X_2| < |G_2|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда по лемме 2.1.6

$$|G_2| = 2^{m-1} \cdot \ (q-1)^{m-1} \cdot (m-1)! \ _2 . \qquad (2.9)$$

По лемме 2.1.3 и [3, табл. 2, с. xii]

$$|X_2| = 2^{m-1} \cdot \left((q-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \cdot \left[\frac{m}{2}\right]! \cdot (q+1) \right)_2 \cdot \ m, q+1 \ _2 . \qquad (2.10)$$

Так как $4 | (q-1)$, то $(q+1)_2 = 2$. Так как $m = 2k+1$, то $(m, q+1)_2 = 1$. Из (2.10) и (2.9) видно, что $|X_2| < |G_2|$.

Пусть $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Так как $(m, q+1)_2 = 1 = (m, q^m + 1)$, то непосредственное вычисление показывает [2, с. 145], что $|X_2| < |G_2|$. Лемма доказана.

2.7. Лемма. *Если* $G = P\Omega_{2m}^+(q)$, m – *четное число,* $m \ge 5$, $X = GU_m(q).2$, *то* $|X_2| < |G_2|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. По лемме 2.1.5

$$|G_2| = 2^{m-3} \cdot \ (q-1)^m \cdot m! \ _2 . \qquad (2.11)$$

По лемме 2.1.3, [3, табл. 2, с. xii] и ввиду (2.10) имеем

$$|X_2| = 2^{m-1} \cdot \left((q-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \cdot \left[\frac{m}{2}\right]! \cdot (q+1) \right)_2 \times$$

$$\times \ m, q+1 \ _2 \cdot 2 = 2^{m+2} \cdot \left((q-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \cdot \left[\frac{m}{2}\right]! \right)_2 , \qquad (2.12)$$

так как $(q+1)_2 = 2$ и $(m, q+1)_2 = 2$.

Пусть $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Тогда по лемме 2.1.5

$$|G_2| = 2^{m-3} \cdot \ (q+1)^m \cdot m! \ _2 , \qquad (2.13)$$

а по лемме 2.1.3 ввиду (2.10)

$$|X_2| = \left((q+1)^{m-1} \cdot \frac{m!}{(m, q+1)} \cdot (q+1) \cdot (m, q+1) \cdot 2 \right)_2 =$$

$$= \ (q+1)^m \cdot m! \ _2 \cdot 2 . \qquad (2.14)$$

Сравнение (2.13) и (2.14) ввиду $m \ge 5$ показывает, что $|X_2| < |G_2|$. Лемма доказана.

3. Основной результат

3.1. Теорема. *Если* $G = P\Omega_8^+(q)$, q – *нечетное, то G не имеет факторизации* $G = M \cdot N$, *где подгруппы M или N содержат* S_2*-подгруппу из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Максимальные факторизации G содержат фактор $A < \cdot\, G$: $\Omega_7(q)$, P_1, P_3, P_4; $(q-1)/d \times \Omega_6^+(q) \ \cdot 2^d / Z$, где $d = (2, q-1)$, $Z = Z(G)$, $|Z| = (4, q^4 - 1)$; $(q+1)/d \times \Omega_6^-(q) \cdot 2^d / Z$, $L_2(q) \times PSp_4(q) \ \cdot 2$, $\Omega_8^-(q^{\frac{1}{2}})$ [1, табл. 4, с. 14]. $2 \| |G : \Omega_7(q)|$ [1, с. 105]. Поэтому случаи с $\Omega_7(q)$, P_i отпадают [5, теорема 4(г)], $i = 1, 3, 4$.

По лемме 2.1.5

$$|G_2| = \begin{cases} 2 \cdot (q-1)_2^4 \cdot 2^3, & \text{если } q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ 2 \cdot (q+1)^4 \cdot 2^3, & \text{если } q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases} \qquad (3.1)$$

Если $A = (q-1)/2 \times \Omega_6^+(q) \cdot 2^2 / Z$, то из $|\Omega_6^+(q)|_2 = \frac{1}{2}(q^3-1)(q^2-1)(q^4-1)_2$ ([3], с. xii) при $q \equiv 1 \pmod 4$ по лемме 2.2 (2) имеем $|A_2| = \frac{1}{4}(q-1)_2^4$. При $q \equiv -1 \pmod 4$ по лемме 2.2 (2) и ввиду $(q-1)_2 = 2$ имеем $|A_2| = 2^3 \cdot (q+1)_2^2$. Сравнение с (3.1) показывает, что в любом случае $|A_2| < |G_2|$.

Если $A = \frac{q-1}{d} \times \Omega_6^-(q) \cdot 2^d / Z$, то из $|\Omega_6^-(q)|_2 = \frac{1}{2}(q^3+1)\cdot(q^2-1)(q^4-1)_2$ ([3], с. xii) при $q \equiv 1 \pmod 4$ по лемме 2.2 имеем $|A_2| = \frac{1}{2}(q-1)^3 \cdot 2$, а при $q \equiv -1 \pmod 4$ по лемме 2.2 ввиду $(q-1)_2 = 2$ имеем $|\Omega_6^-(q)|_2 = 4\cdot(q+1)_2^3$ и

$$|A_2| = |\Omega_6^-(q)|_2 = 4\cdot(q+1)_2^3.$$

Сравнив $|A_2|$ с (3.1) видим, что в любом случае $|A_2| < |G_2|$.

Пусть $A = L_2(q) \times PSp_4(q) \cdot 2$. Тогда из лемм 2.1.1 и 2.1.2 получаем, что

$$|A_2| = (q-1)_2 \cdot \frac{2!}{2} \cdot \frac{1}{2}(q-1)_2^2 \cdot (q+1)_2^2 \cdot 2! = 2\cdot(q-1)_2^2,$$

при $q \equiv 1 \pmod 4$ (3.2)

и

$$|A_2| = 2\cdot(q+1)_2 \cdot \frac{1}{2}(q-1)_2^2 \cdot (q+1)_2^2 \cdot 2 = (q+1)_2^3 \cdot 2^2,$$

при $q \equiv -1 \pmod 4$. (3.3)

Сравнив (3.2) и (3.3) с (3.1) видим, что $|A_2| < |G_2|$.

Наконец, пусть $A = \Omega_8^-(q^{\frac{1}{2}})$.

$$|\Omega_8^-(q^{\frac{1}{2}})|_2 = \frac{1}{2}(q^2+1)_2 \cdot (q-1)_2 \cdot (q^2-1)_2 \cdot (q^3-1)_2$$

([3], с. xii).

Если $q \equiv 1 \pmod 4$, то по лемме 2.2 имеем $|A_2| = \frac{1}{2}(q^2+1)_2 \cdot (q-1)_2^3 \cdot 2$.

Если $q \equiv -1 \pmod 4$, то по лемме 2.2 имеем $|A_2| = \frac{1}{2}(q^2+1)_2 \cdot 2 \cdot (q+1)_2 \cdot 2 \cdot 2$. Сравнение $|A_2|$ с $|G_2|$ в (3.1) показывает, что $|A_2| < |G_2|$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Liebeck, M.W. The maximal factorization of the finite simple groups and their automorphism group / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxl // Memoirs of AMS. – 1990. – Vol. 86, № 432. – P. 1–151.
2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
3. Conway, J.H. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson // London: Clarendon Press, 1985. –. 252 p.
4. Kleidman, P. A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups / P. Kleidman // Ann. Math. – 1991. – Vol. 133. – P. 369–428.
5. Тютянов, В.Н. Конечные группы, порожденные парами подгрупп: дис. … д-ра физ.-матем. наук: 01.01.06 / В.Н. Тютянов. – Гомель, 2002. – 156 с.
6. Gross, F. Hall subgroups of order not divisible by 3 / F. Gross // Rocky mountain J. Math. – 1993. – Vol. 23, № 2. – P. 569–591.
7. Монахов, В.С. Бипримарные подгруппы конечных групп: дис. … д-ра физ.-матем. наук: 01.01.06 / В.С. Монахов. – Гомель, 1997. – 176 с.

Поступила в редакцию 12.10.2012. Принята в печать 14.12.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: bashunsviat@mail.ru – Башун С.Ю.