УДК 519.876.5:519.233.5:532.135

ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ

Е.В. Коробко*, Л.В. Маркова*, Е.А. Корчевская, Н.Д. Адаменко****
**Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Технология создания новых «интеллектуальных» материалов, механические и теплофизические свойства которых могут адаптироваться к изменяющимся условиям эксплуатации, приобрела особую значимость. Возможность контролировать характеристики реологических материалов с помощью внешних полей делает реальными перспективы целенаправленного управления материалами технических устройств в различных отраслях промышленности. Это подтверждает актуальность и необходимость развития исследований, направленных на создание алгоритмов управления изменением свойств реологически сложных материалов.

Цель работы – создание двухфакторной математической модели изменения прочности на сдвиг электрореологической жидкости под воздействием внешних электрических и температурных полей. Основой для построения такой модели является регрессионный анализ.

Материал и методы. *Материалы – это данные экспериментов, проводимых в лаборатории реофизики и макрокинетики Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси. Для проведения исследования использованы методы статистического анализа.*

Результаты и их обсуждение. *Проанализированы экспериментальные данные поведения электрореологической жидкости при изменении температуры и напряжения внешнего электрического поля. При этом скорость сдвига была постоянной. Показана возможность создания адекватной математической модели изучаемого процесса с учетом изменения одного и более факторов. Построена двухфакторная линейная математическая модель.*

Заключение. *Анализ и осмысление построенной двухфакторной модели изменения напряженности сдвига электрореологической жидкости под воздействием внешних электрических и температурных полей позволят повысить эффективность использования технических устройств, функционирование которых связано с применением структурно сложных жидкостей.*

Ключевые слова: *математическая модель, двухфакторный анализ, регрессионный анализ, реологические жидкости.*

THE TWO-FACTOR MODEL OF RHEOLOGICALLY COMPLEX FLUID

E.V. Korobko*, L.V. Markova*, E.A. Korchevskaya, N.D. Adamenko****
**A.V. Lykov Institute of Heat and Mass Transfer of the Academy of Sciences of the Republic of Belarus*
***Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*

The technology of creating new "intelligent" materials, the mechanical and thermophysical properties of which can adapt to changing operating conditions has acquired special significance. The possibility to control the characteristics of rheological materials with the help of external fields makes the prospects of purposeful material management of technological devices in various industries real. This confirms the relevance and necessity of developing research aimed at creating algorithms for controlling changes in the properties of rheologically complex materials.

The aim of the study is to create a two-factor mathematical model of the change in the shear strength of an electrorheological fluid under the influence of external electric and temperature fields. The basis for building this model is regression analysis.

Material and methods. *The materials are data from experiments conducted in the Laboratory of Rheophysics and Macrokinetics of A.V. Lykov Institute of Heat and Mass Transfer of the Academy of Sciences of the Republic of Belarus. Methods of statistical analysis were used to conduct the study.*

Finding and their discussion. *Experimental data on the behavior of an electrorheological fluid with changes in temperature and voltage of an external electric field at a constant shear rate are analyzed. The possibility of creating an adequate mathematical model of the process under study, taking into account changes in one or more factors, is shown. A two-factor linear mathematical model is constructed.*

Conclusion. *Analysis and comprehension of the constructed two-factor model of changes in the shear strength of an electrorheological fluid under the influence of external electrical and temperature fields will increase the efficiency of using technological devices whose functioning is associated with the use of structurally complex fluids.*

Key words: *mathematical model, two-factor analysis, regression analysis, rheological fluids.*

В настоящее время особую значимость приобрела технология создания новых «интеллектуальных» материалов, механические и теплофизические свойства которых могут подстраиваться под изменяющиеся условия эксплуатации. Возможность целенаправленного преобразования характеристик реологических материалов с помощью внешних физических полей свидетельствует о реальных перспективах управления материалами различных технических устройств и оборудования в современных отраслях приборостроения и промышленности в целом [1; 2]. Следовательно, задача развития исследований, направленных на создание алгоритмов управления характеристиками электрореологических жидкостей (ЭРЖ), представляющих собой суспензию твердых частиц разного размера в вязкой среде, является необходимой.

Цель работы – создание двухфакторной математической модели изменения напряженности сдвига электрореологической жидкости под воздействием внешних электрических и температурных полей. Основу построения такой модели составляет регрессионный анализ.

Материал и методы. В качестве материала использовались данные экспериментов, проводимых в лаборатории реофизики и макрокинетики Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси. Применялись методы математического моделирования, в основу которых положена концепция регрессионного анализа.

Результаты и их обсуждение. Эксперимент является одним из важнейших направлений научных исследований, анализ и обработка его результатов существенным образом влияют на перспективы развития научных направлений. Для анализа экспериментальных данных используются методы математической статистики, которые позволяют выявить закономерности, сделать обоснованные выводы и прогнозы. Вопросы адекватности интерпретации результатов научного эксперимента рассматриваются в математической статистике на достаточно мощной базе. При этом как одно из главных направлений современной методологии исследования большинства технических процессов и объектов выступает математическое моделирование.

Математическую модель в общем виде принято записывать в виде одного или нескольких уравнений, которые характеризуют связь параметра y с несколькими независимыми параметрами $x_0, x_1, \ldots, x_k$:

$$y = y(x_0, x_1, \ldots, x_k)\,. \tag{1}$$

Модель, записанная как уравнение (1), называется параметрической. Она содержит только перечень всех параметров, участвующих в исследовании. Никакой другой информационно-физической нагрузки такая модель не имеет. В зависимости от сложностей связей между параметрами в (1) математическая модель может быть представлена уравнениями разного типа: алгебраическими, дифференциальными, интегральными и их сочетанием. Наиболее простыми являются алгебраические уравнения вида

$$\begin{aligned} y = {} & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k + \\ & + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \ldots + a_{k,k-1} x_k x_{k-1} + \\ & + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{kk} x_{kk}^2 . \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение (2) называется также регрессией, а переменные, входящие в это уравнение, – факторами. В такой записи факторы имеют степени не выше второй. Уравнение линейно относительно коэффициентов регрессии. Во второй строке записаны парные произведения факторов в первой степени. Они отражают эффекты совместного влияния факторов на моделируемую величину *y*.

Математическая модель, которую можно записать алгебраическим уравнением, служит наиболее удобным вариантом в случае создания систем автоматического управления. Даже если физический смысл экспериментального исследования требует для моделирования процесса использования более сложных уравнений, тем не менее целесообразно прибегнуть к различным допущениям и упрощениям, чтобы представить модель в алгебраической форме. Для этого сложные процессы можно рассматривать как совокупность нескольких более простых. Каждый упрощенный вариант процесса при этом моделируется уравнением (2). Более сложные модели в регрессионном анализе не рассматриваются [3].

На начальном этапе интерпретации результатов научного эксперимента в уравнении (2) желательно оставить как можно меньше слагаемых, но при этом количество факторов должно оставаться таковым, чтобы модель адекватно описывала изучаемый процесс. Если в модельное уравнение (2) входят только первые две строки, то данная модель называется линейной. Она содержит свободный член, факторы в первой степени и парные взаимодействия этих факторов.

Рассмотрим двухфакторный эксперимент, который проводился в лаборатории реофизики и макрокинетики Института тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси с образцами электрореологических жидкостей, содержащих сложные оксиды. ЭРЖ представляет собой двухкомпонентную жидкотекучую дисперсию синтетического масла с 20 вес. % дисперсного наполнителя. В качестве наполнителей использовались следующие материалы: $Sr_2Ga_{0,5}Al_{0,4}Ni_{0,1}O_{4-\delta}$; $Sr_3GaAl_{0,8}Ni_{0,2}O_{7-\delta}$; $Sr_3Ga_{0,5}Al_{0,5}NiO_{7-\delta}$; $Sr_9Ni_{4,2}Al_{2,8}O_{21}$; $Sr_3Al_{1,8}Ni_{0,2}O_6$ [2]. Измерялась электрореологическая активность ЭРЖ (напряжение сдвига) при постоянной скорости сдвига 17,2 $с^{-1}$, но в зависимости от напряженности постоянного электрического поля в диапазоне 0 кВ/мм – 4.5 кВ/мм и значений температуры в диапазоне 20–60 °С. Полученные результаты для ЭРЖ с наполнителем $Sr_2Ga_{0,5}Al_{0,4}Ni_{0,1}O_{4-\delta}$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

	τ, Па									
E кВ/мм T °C	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
20	2,79	2,883	3,813	4,65	9,207	16,74	31,341	46,5	62,31	81,84
30	2,79	2,79	2,79	3,255	5,58	14,88	29,295	43,4775	60,45	79,05
40	2,79	3,255	3,255	3,255	6,51	13,485	27,435	39,06	47,895	64,17
50	2,325	2,325	2,325	2,325	3,255	6,51	11,625	20,925	29,295	33,48
60	1,86	1,86	1,86	1,86	2,325	3,72	4,65	4,65	5,58	6,51

Для создания математической модели, адекватной результатам проведенного эксперимента, прежде всего нужно построить семейство точечных графиков, отражающих табличную информацию.

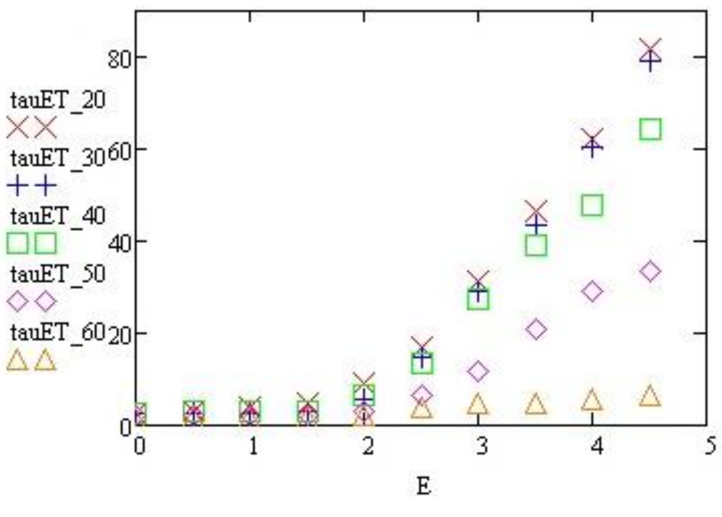

Рис. 1. **Зависимости напряжения сдвига τ образца ЭРЖ с частицами сложных оксидов $Sr_2Ga_{0,5}Al_{0,4}Ni_{0,1}O_{4-\delta}$ от напряженности постоянного электрического поля E при различных значениях температуры. На графике tauET_20- значения τ из табл. 1 при температуре 20 °С, tauET_30 – при 30 °С, tauET_40 при температуре 40 °С, tauET_50 при значениях температуры 50 °С, tauET_60 – значение напряжения сдвига τ при температуре 60 °С. Скорость сдвига γ = 17,2 с-1**

Очевидно, что кривые зависимостей в представленном диапазоне напряженности электрического поля отличаются от прямой линии. Однако, как указано выше, всегда целесообразно начинать построение математической модели с наиболее простого варианта. Поэтому по экспериментальным узловым точкам будем строить двухфакторную модель в виде алгебраического уравнения (2), адекватного табличным данным. Согласно принципам регрессионного анализа в качестве меры неадекватности возьмем сумму квадратов отклонений:

$$\delta = \sum_{i=0}^{n} (r_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2 . \quad (3)$$

Здесь $\tilde{y}_i$, – это экспериментальные значения, y_i *i=0,1, …, n* – значения, вычисленные в результате моделирования функции. В общем случае значения, полученные в узловых точках эксперимента, отличаются от расчетных на величину, которую называют отклонением.

Предположим, что первым фактором (переменной x_1) является температура, вторым – (x_2) напряженность электрического поля. Для простоты будем строить двухфакторную линейную модель.

Введем фиктивную переменную x_0, которая всегда равна 1. Тогда регрессию (2) запишем следующим образом:

$$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 . \quad (4)$$

Будем строить уравнение (4) таким образом, чтобы минимизировать меру неадекватности (3). В этом случае коэффициенты линейного разложения (4) вычислим по методу наименьших квадратов. Минимизация меры неадекватности (3) приводит к построению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов регрессии (4) a_0, a_1, a_2, a_3. Количество уравнений системы совпадает с количеством неизвестных. Эта система называется системой нормальных уравнений. Решать ее можно любым известным в вычислительной математике методом. Однако в регрессионном анализе решать систему нормальных уравнений принято путем обращения нормальной матрицы, т.е. строится матрица той же размерности, что и нормальная, но обратная к ней. Обозначим ее $\{c_{i,j}\}$ *i,j=0,1,…,3*. Коэффициенты a_i *i=0,1,…,3* вычисляются как сумма произведений элементов *j*- столбца матрицы $\{c_{i,j}\}$ на элементы столбца свободных членов построенной системы нормальных уравнений.

Коэффициенты регрессии (4) a_i *i=0,1,…,3* являются случайными величинами. Точные значения указанных коэффициентов находятся в некотором доверительном интервале, который определяется дисперсией коэффициента. Оценить дисперсию каждого коэффициента регрессии можно с помощью диагональных членов обращенной матрицы. На точность значений коэффициентов регрессии существенным образом влияет выбранный метод решения системы нормальных уравнений, а также накопление вычислительных погрешностей. В зависимости от порядка, в котором вычисляются коэффициенты регрессии, погрешности одного коэффициента могут переноситься на значение другого. В статистике такое влияние погрешностей коэффициентов регрессии друг на друга называется ковариацией. Количественная мера ковариации – коэффициент ковариации $\rho(a_i, a_j)$, значение которого принадлежит интервалу от 0 до 1. Если значение коэффициента ковариации $\rho(a_i, a_j)$ равно нулю, то это означает, что погрешности коэффициента a_i никак не влияют на значение коэффициента a_j, то есть данные коэффициенты независимы в смысле накопления ошибок. Оценку коэффициентов ковариации проводят на основании значений недиагональных элементов матрицы $\{c_{i,j}\}$ *i,j=0,1,…,3*, поэтому ее называют матрицей ковариации.

Очевидно, что в научных исследованиях, направленных на построение регрессионной модели, нужно заранее планировать эксперимент так, чтобы минимизировать значение коэффициентов ковариации по всем коэффициентам регрессии. Наиболее эффективны при планировании эксперимента ортогональные планы первого порядка [3]. Эти планы строятся таким образом, чтобы в матрице ковариации только элементы главной диагонали были ненулевыми.

Анализ табл. 1 позволяет считать, что проведенный эксперимент соответствует требованиям, которые предъявляются к построению ортогонального плана первого порядка. Эксперимент является полным факторным, т.к. по каждому фактору во всех узловых точках имеются значения, при этом уровни изменения каждого из факторов равноотстоящие.

Еще одна особенность ортогонального плана состоит в переносе осей координат факторов в центр эксперимента по формуле:

$$x_i' = \frac{x_i - 0.5(x_{i\max} + x_{i\min})}{0.5\Delta x_i} , \quad (5)$$

где x_i' и x_i – новые и старые координаты, $x_{i\max}, x_{i\min}$ – максимальный и минимальный уровни фактора x_i. Такой перенос проведем на этапе построения нормальной системы уравнений.

Чтобы построить уравнение регрессии (4) по экспериментальным данным табл. 1, необходимо преобразовать эту исходную таблицу следующим образом. В новую таблицу добавим переменное x_0, которое всегда равно +1, а также произведение двух факторов, которое обозначим как $x_3 = x_1 x_2$. Получаем табл. 2.

Таблица 2

N опыта	Уровни факторов				Y
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	1	20	0	0	2.79
2	1	20	0.5	10	2.883
3	1	20	1.0	20	3.813
…..	….	…..	….	…..	……
50	1	60	4.5	270	6.51

Анализ экспериментальных данных табл. 1 и графика на рис. 1 показал, что построение уравнения регрессии в виде линейной модели следует проводить в два этапа. Сначала в диапазоне напряженности электрического поля E: 0 кВ/мм – 2.0 кВ/мм, затем нужно взять диапазон 2.0 кВ/мм – 4.5 кВ/мм. В соответствии с выбранными диапазонами изменения напряженности электрического поля преобразуем табл. 2 в две таблицы с разными диапазонами напряженности электрического поля.

Новая таблица экспериментальных данных в диапазоне напряженности электрического поля E 0 кВ/мм – 2.0 кВ/мм будет такой:

Таблица 3

N опыта	Уровни факторов				Y
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	1	20	0	0	2.79
2	1	20	0.5	10	2.883
3	1	20	1.0	20	3.813
…..	….	…..	….	…..	……
20	1	60	4.5	270	6.51

Чтобы уменьшить ковариации, т.е. влияние коэффициентов регрессии друг на друга, введем новые переменные по формулам (5). Получим для табл. 3, т.е. для диапазона напряженности электрического поля E=0 кВ/мм – 2.0 кВ/мм:

$$x_1' = \frac{x_1 - 40}{5} \text{ и } x_2' = \frac{x_2 - 0.75}{0.25}.$$

В новых переменных имеем следующие значения уровней факторов: для первого фактора x_1: -4 -2 0 2 4 и для x_2: -3 -1 1 3. Сама же таблица принимает такой вид:

Таблица 4

N опыта	Уровни факторов				Y
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	1	-4	-30	12	2.79
2	1	-4	-1	40	2.883
3	1	-4	1	-4	3.813
…..	….	…..	….	…..	……
20	1	4	3	12	6.51

Применяя метод наименьших квадратов к значениям табл. 4, построим систему из 4 уравнений относительно неизвестных коэффициентов регрессии a_i $i=0,1,\ldots,3$. Система имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55.051 \\ -31.444 \\ 9.315 \\ -28.8 \end{bmatrix}.$$

Проведем оценку погрешности коэффициентов регрессии. Для этого вычислим обратную матрицу построенной системы и коэффициенты ковариации. Обозначим обратную матрицу, то есть матрицу ковариации, $MK = \{mk_{i,j}\}$, тогда коэффициенты ковариации вычисляются по формуле $kf_{i,j} = \dfrac{mk_{i,j}}{\sqrt{mk_{i,i} \times mk_{j,j}}}$. Имеем

$$MK^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0012 \end{bmatrix} \qquad kf = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Все коэффициенты ковариации равны 0. Значения коэффициентов регрессии a_i $i=0,1,\ldots,3$ следующие: a_0=2.453, a_1=-0.197, a_2=0.093, a_3=-0.036.

Проведем в уравнении регрессии (4) замену: $y = \tau 1, x_1 = T, x_2 = E$. После возврата к исходным координатам получаем регрессию:

$$\tau 1(T,E) = 2.753 - 0.197\,\frac{T-40}{5} + 0.093\,\frac{E-0.75}{0.25} - \frac{T-40}{5} \cdot \frac{E-0.75}{0.25}.$$

Преобразуем это выражение и получаем:

$$\tau 1(T,E) = 3.186 - 0.0178 \cdot T + 1.524 \cdot E - 0.0288 \cdot E \cdot T. \qquad (6)$$

Построим график регрессии (6), совместив его с экспериментальными данными.

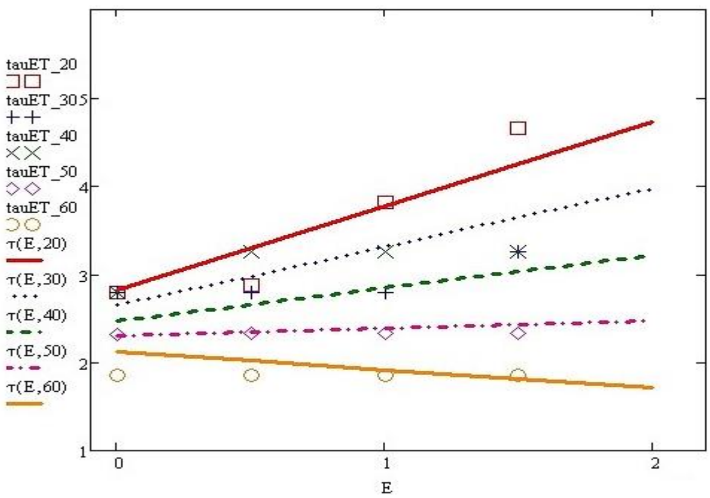

Рис. 2. **Зависимости напряжения сдвига τ образца ЭРЖ от напряженности постоянного электрического поля E при различных значениях температуры. Экспериментальные данные на графике обозначены аналогично рис. 1, линии уравнения регрессии (6) в соответствующем порядке**

Аналогичные преобразования и вычисления для диапазона напряженности электрического поля E=2.0 кВ/мм – 4.5 кВ/мм дают модельное уравнение в виде следующей линейной регрессии:

$$\tau(T,E) = -91.951 + 1.404 \cdot T + 48.283 \cdot E - 0.724 \cdot E \cdot T. \qquad (7)$$

График регрессии (7), совмещенный с экспериментальными данными, изображен на рис. 3.

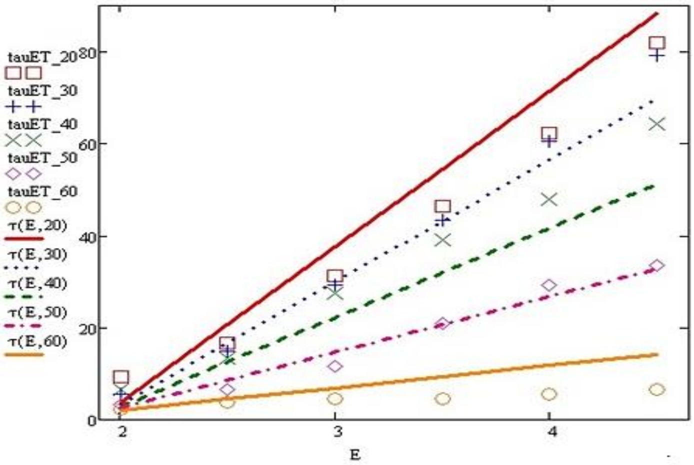

Рис. 3. **Зависимости напряжения сдвига τ образца ЭРЖ от напряженности постоянного электрического поля Е при различных значениях температуры. Экспериментальные данные на графике обозначены аналогично рис. 1, линии уравнения регрессии (7) в соответствующем порядке**

Таким образом, для всех исследуемых диапазонов температуры и напряженности постоянного электрического поля образца электрореологической жидкости с наполнителем $Sr_2Ga_{0,5}Al_{0,4}Ni_{0,1}O_{4-\delta}$ двухфакторная модель будет выглядеть следующим образом:

$$\tau(T,E)=\begin{cases}3.186-0.0178T+1.524E-0.0288E\cdot T, 0\le E<2\\ -91.951+1.404T+48.283E-0.724E\cdot T, E\ge 2\end{cases}. \tag{8}$$

Эта модель является линейной. Известно, что модели такого типа обладают малой точностью и информативностью. Однако они позволяют проводить анализ исследуемого процесса с возможностью прогнозирования результатов в первом приближении, определять весомость каждого из факторов эксперимента, что способствует построению более точных моделей.

Заключение. В результате проведенных исследований рассмотрен процесс моделирования зависимости напряжения сдвига τ образца электрореологической жидкости с наполнителем $Sr_2Ga_{0,5}Al_{0,4}Ni_{0,1}O_{4-\delta}$ от напряженности постоянного электрического поля Е при различных значениях температуры. Применялись методы регрессионного анализа и метод наименьших квадратов. В результате моделирования создана двухфакторная линейная модель изменения напряжения сдвига электрореологической жидкости под воздействием внешних электрических и температурных полей. Модель позволит строить алгоритмы управления технологическими процессами устройств и механизмов, функционирование которых зависит от характеристик электрореологических жидкостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hao T. Electrorheological Suspensions // Advances in Colloid and Interface Science. – 2002. – Vol. 97. – P. 1–35.
2. Коробко, Е.В. Воздействие электрического поля и температуры на механизмы токов утечки электрореологического материала, содержащего алюмоникелат стронция перовскитоподобной структуры / Е.В. Коробко, И.М. Харламова, Л.В. Махнач // Материалы и структуры современной электроники: сб. науч. тр. X Междунар. науч. конф., Минск, 12–14 окт. 2022 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: В.Б. Оджаев (отв. ред.) [и др.]. – Минск: БГУ, 2022. – С. 118–122.
3. Лунев В.А. Математическое моделирование и планирование эксперимента: учеб. пособие / В.А. Лунев. – СПб.: С.-Петерб. гос. политехн. ун-т, 2012. – 154 с.

REFERENCES

1. Hao T. Electrorheological Suspensions // Advances in Colloid and Interface Science. – 2002. – Vol. 97. – P. 1–35.
2. Korobko E.V., Kharlamova I.M., Makhnach L.V. *Materialy i struktura sovremennoi elektroniki: sb. nauch. tr. X Mezhdunar. nauch. konf., Minsk, 12–14 okt. 2022 g.* [Materials and Structure of Contemporary Electronics: A Collection of Papers of the 10th International Scientific Conference, Minsk. October 12–14 2022], Minsk: BGU, 2022, pp. 118–122.
3. Lunev V.A. *Matematicheskoye modelirovaniye i planirovaniye eksperimenta: ucheb. posobiye* [Mathematical Modeling and Experiment Planning: Manual], SPb.: S.-Peterb. gos. politekhn. un-t, 2012, 154 p.

Поступила в редакцию 21.06.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: evkorobko@gmail.com – Коробко Е.В.