МАТЭМАТЫКА

УДК 510.522

ОБ ОДНОЙ ТЕХНИКЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЬЮРИНГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.Е. Будько
Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Настоящая работа посвящена изучению сложности вычислений на машинах Тьюринга и, в частности, получению нижних оценок.

Цель статьи – установить зависимость временной характеристики тьюринговых вычислений от емкостной в случае, когда емкостной характеристикой является линейная функция.

Материал и методы. *Исследуется машина Тьюринга с одной лентой и одной головкой. Предлагается метод, основанный на специальном графическом представлении траектории движения головки.*

Результаты и их обсуждение. *Доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является линейная функция, то нижней оценкой временной характеристики работы машины служит квадратичная функция.*

Заключение. *Предложена новая техника исследования тьюринговых вычислений, позволяющая получать нижние оценки.*

Ключевые слова: *машина Тьюринга, временная и емкостная характеристики работы машины, стандартная траектория, левый и правый отрезки.*

ON ONE TECHNIQUE IN STUDYING TURING CALCULATIONS

A.E. Budko
Education Establishment “Brest State A.S. Pushkin University”

This work is concerned with the study of the complexity of calculations on Turing machines and, in particular, with obtaining lower estimates.

The purpose of the work is to establish the dependence of the time characteristic of Turing calculations on the capacitive characteristic in the case when the capacitive characteristic is a linear function.

Material and methods. *A Turing machine with one belt and one head is studied. A method based on a special graphical representation of the trajectory of the head is proposed.*

Findings and their discussion. *It is proved that if the capacitive characteristic of the machine operation is a linear function, then the lower estimate of the time characteristic of the machine operation is a quadratic function.*

Conclusion. *A new technique in researching Turing calculations is proposed, which allows obtaining lower estimates.*

Key words: *Turing machine, time and capacitive characteristics of the machine, standard trajectory, left and right sections.*

Настоящая работа посвящена изучению сложности вычислений на машинах Тьюринга. Наибольший интерес в исследовании данных вычислений представляет получение нижних оценок временной и емкостной характеристик вычислений. Одним из ключевых методов получения нетривиальных нижних оценок сложности вычислений на машинах Тьюринга служит метод следов [1–4]. Он основан на анализе последовательностей состояний машины, в которых головка пересекает точку, являющуюся границей двух ячеек. Метод следов позволяет находить нижние оценки не более чем квадратичной сложности.

В [5–6] рассматривалась существенная сложность вычислений, под единицей измерения которой понималось либо изменение символа на ленте, либо изменение внутреннего состояния машины. Для данного вида вычислений были предложены отдельные нижние оценки. В [7] изложен обобщенный метод нитей, с помощью которого получены некоторые оценки временной и существенной сложностей online вычислений умножения.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующего утверждения: если емкостная характеристика работы машины выражается линейной функцией, то нижняя оценка временной характеристики работы машины представляет собой квадратичную функцию.

Материал и методы. Исследуется машина Тьюринга с одной лентой и одной головкой. Предлагается метод, опирающийся на специальное графическое представление траектории движения головки.

П р е д в а р и т е л ь н ы е с в е д е н и я. Рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой и одной головкой. За один такт головка такой машины: 1) распознает помещенный в обозреваемой ячейке символ; 2) записывает туда новый (может записать тот же); 3) сдвигается влево или вправо к соседней ячейке или остается на месте; 4) переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

В дальнейшем, если это специально не оговорено, речь идет о произвольных тьюринговых вычислениях, то есть не обязательно с линейной емкостью.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим работу машины M над начальной конфигурацией P с длиной начальной записи n. Ячейки начальной записи занумеруем слева направо: $R_1, R_2, \dots, R_n$. Будем считать, что слева от R_1 головка не просматривает ни одной ячейки, а ячейки справа от R_n обозначим через $R_{n+1}, R_{n+2}, R_{n+3}, \dots$.

Введем следующие обозначения для отдельных конфигураций, получаемых в ходе работы машины. Конфигурацию, имеющуюся в момент, когда головка впервые попала в ячейку R_{n+1}, обозначим через P_{1_1}. Конфигурацию, непосредственно предшествующую P_{1_1}, представим через P_{1_0}. Очевидно, в конфигурации P_{1_0} головка обозревает ячейку R_n. Конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые после P_{1_0}, попала в ячейку R_{n-1}, обозначим через P_{1_3}. Число различных ячеек неначальной записи, просматриваемых в промежутке между P_{1_0} и P_{1_3}, выразим через D_1. По нашей нумерации эти ячейки имеют номера $R_{n+1}, R_{n+2}, \dots R_{n+D_1}$. Конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые после P_{1_0} попала в ячейку R_{n+D_1}, обозначим через P_{1_2}. В частности, P_{1_2} может совпадать с P_{1_1}(если D_1=1).

Пусть конфигурации $P_{i_0}, P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}$, а также значение D_i $(i \geq 1)$ заданы. Определим $P_{(i+1)_0}, P_{(i+1)_1}, P_{(i+1)_2}, P_{(i+1)_3}$ и D_{i+1}.

Конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые попала в ячейку $R_{n+\sum_{j=1}^{i} D_j+1}$ (или в ячейку с номером $n + \sum_{j=1}^{i} D_j$+1), обозначим через $P_{(i+1)_1}$. Конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые попала в самую левую ячейку, обозреваемую в промежутке между P_{i_2} и $P_{(i+1)_1}$, обозначим через $P_{(i+1)_0}$ (в частности, P_{i_3} может совпадать с $P_{(i+1)_0}$). Конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые после $P_{(i+1)_1}$ попала в ячейку с номером $n + \sum_{j=1}^{i} D_j - 1$, обозначим через $P_{(i+1)_3}$. Число различных ячеек, расположенных правее ячейки с номером $R_n + \sum_{j=1}^{i} D_j$ и просматриваемых в промежутке $P_{(i+1)_0} - P_{(i+1)_3}$, обозначим через D_{i+1}. Через $P_{(i+1)_2}$ обозначим конфигурацию, полученную в момент, когда головка впервые попала в ячейку $R_n + \sum_{j=1}^{i+1} D_j$.

Конфигурацию, непосредственно предшествующую P_j, обозначим через $'P_j$, а конфигурацию, непосредственно следующую за P_j, – через P'_j.

Работу машины, начиная с конфигурации P_{1_0}, разобьем на этапы: началом i-го ($i \geq 1$) этапа является конфигурация P_{i_0}, а концом $'P_{(i+1)_0}$ – конфигурация, непосредственно предшествующая конфигурации $P_{(i+1)_0}$.

Каждому этапу будут соответствовать два противоположно направленных отрезка. Так, на i-ом ($i \geq 1$) этапе работы машины в промежутке $P_{i_0} - P_{i_2}$ будет соответствовать отрезок, проходящий под изображением ячеек, просматриваемых в этом промежутке, и направленный слева направо. На строку ниже будет расположен второй отрезок, соответствующий работе машины в промежутке $P'_{i_2} - 'P_{(i+1)_0}$. Он проходит под изображением ячеек, просматриваемых в этот период, и направлен справа налево. Отрезки $(i+1)$-го ($i \geq 1$) этапа располагаются под отрезками i-го этапа.

Первый и второй отрезки i-го ($i \geq 1$) этапа назовем соответственно i-ым правым и i-ым левым отрезками и обозначим их через r_i и l_i. Часть правого отрезка r_i ($i \geq 2$), проходящую под предшествующим левым отрезком l_{i-1}, обозначим через $\gamma(r_i)$. $\gamma(r_1)$ определим как часть отрезка r_1, проходящую под ячейками начальной записи. Часть отрезка r_i ($i \geq 1$), расположенную правее части $\gamma(r_i)$, назовем свободной частью отрезка r_i и обозначим ее через $\beta(r_i)$.

Определение 1. *Длиной отрезка (или его части) будем называть количество ячеек, под изображением которых этот отрезок (или его часть) проходит.*

Длину отрезка (или его части) $\alpha \in \{l_i, r_i, \ \gamma(r_i)\, \beta(r_1)\}$ обозначаем через $|\ \alpha\ |$. Очевидно, $|\gamma(r_i)| + |\beta(r_1)| = |r_i|$ и $|\ \beta(r_i)\ | = D_i$, где $i \geq 1$.

Пусть $g(n)$ – емкостная характеристика работы машины M. Будем считать, что $g(n)$ – возрастающая функция и $g(n) \neq n + C$, где C – константа, не зависящие от n. Через δ обозначим количество всех отрезков r_i ($i \geq 1$).

Лемма 1. *Для каждой суммы* $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ *имеется единственное целое* k, *удовлетворяющее условию*:

$$g\,(k-1) - (k-1) < \sum_{i=m}^{m+\omega} D_i \leq g\,(k) - k. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, наибольшей из всех сумм $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ является сумма $\sum_{i=1}^{\delta} D_i$. А поскольку $n + \sum_{i=1}^{\delta} D_i = g(n)$, то есть $\sum_{i=1}^{\delta} D_i = g(n) - n$, то для любой суммы $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ выполняется условие

$$\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i \leq g(n) - n.$$

Рассмотрим последовательность $g(0) - 0, g(1) - 1, \ldots, g(n) - n.$

Так как $g(n)$ – возрастающая функция и $g(n) \neq n + C$, то для каждого i $(0 \leq i \leq n-1)$ выполняется условие $g(i) - i < g(i+1) - (i+1)$. Поэтому в указанной последовательности одинаковых членов не будет. Тогда последовательность полуинтервалов

$$(g(0) - 0; g(1) - 1], (g(1) - 1, g(2) - 2], \ldots, (g(n-1) - (n-1); g(n) - n]$$

будет такова, что:

1) включает в себя все числа из $(0; g(n) - n]$;
2) никакие два полуинтервала не имеют общих элементов;
3) для любой суммы $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ выполняется условие

$$g(0) - 0 < \sum_{i=m}^{m+\omega} D_i \leq g(n) - n.$$

Следовательно, каждая сумма $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ попадает ровно в один полуинтервал. Пусть, например, сумма $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ попадает в полуинтервал $(g(j-1) - (j-1); g(j) - j]$. Обозначив j через k, мы и получим единственное k, удовлетворяющее условию (1). Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Если* $g(n) = C_1 n + C_2$, *где* $C_1 > 1$ *и* C_2 *– константы, не зависящие от* n, *то для каждой суммы* $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ *имеется единственное целое* k, *удовлетворяющее условию*:

$$(C_1 - 1)\ (k-1) + C_2 < \sum_{i=m}^{m+\omega} D_i \leq (C_1 - 1)k + C_2. \tag{2}$$

Определение 2. *Будем говорить, что сумме* $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ *удовлетворяет отрезок* r_{m+j} $(0 \leq j \leq \omega)$, *если у отрезка* r_{m+j} *часть, расположенная левее* $\beta(r_m)$, *имеет длину не меньшую, чем* k, *где* k *удовлетворяет условию* (1).

Лемма 2. *Для каждой суммы* $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$ *имеется хотя бы один отрезок* r_{m+j} $(0 \leq j \leq \omega)$, *удовлетворяющий этой сумме*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана сумма $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ $(m \geq 1, \omega \geq 0)$. Рассмотрим работу машины, начиная с конфигурации P_r, соответствующей началу отрезка r_m, и заканчивая конфигурацией P_τ, соответствующей концу отрезка $r_{m+\omega}$. Работе машины в промежутке $P_r - P_\tau$ соответствуют отрезки r_m, $l_m, r_{m+1}, l_{m+1}, \dots r_{m+\omega}$.

Предположим, что лемма не выполняется. Тогда у каждого из отрезков $r_m, r_{m+1}, \dots\ r_{m+\omega}$ часть, расположенная левее $\beta(r_m)$, имеет длину меньшую, чем k, где k удовлетворяет условию (1). Это значит, что в промежутке $P_r - P_\tau$ слева от ячеек, соответствующих части $\beta(r_m)$, головка машины просматривает меньше k ячеек. Обозначим это количество ячеек через υ $(\upsilon < k)$. Кроме того, в конфигурации P_r все ячейки, соответствующие части $\beta(r_m)$ и расположенные правее их, пустые. Поэтому, рассматривая работу машины в промежутке $P_r - P_\tau$, можно считать, что для $P_r - P_\tau$ начальная запись имеет длину υ. За время работы, соответствующее $P_r - P_\tau$, справа от указанной начальной записи головка просматривает очевидно $\sum_{i=m}^{m+\omega} D_i$ ячеек. В то же время, поскольку $g(n)$ – емкостная характеристика работы машины, то справа от указанной начальной записи длины υ головка не может просматривать число ячеек большее, чем $g(\upsilon) - \upsilon$, то есть $\sum_{i-m}^{m+\omega} D_i \le g(\upsilon) - \upsilon$. Поскольку для каждого i $(0 \le i \le n-1)$ выполняется условие

$$g(i) - i < g(i+1) - (i+1)$$

и так как $\upsilon \le k-1$, то $\sum_{i-m}^{m+\omega} D_i \le g(\upsilon) - \upsilon \le g(k-1) - (k-1)$, что противоречит условию (1). Следовательно, наше предположение неверно. Лемма 2 доказана.

Через k_j $(j \ge 1)$ обозначим целое значение, удовлетворяющее условию

$$g(k_j - 1) - (k_j - 1) < \sum_{i=j}^{\delta} D_i \le g(k_j) - k_j. \tag{3}$$

Отметим, что в силу леммы 1 такое k_j имеется.

Замечание 1. *Если $g(n) = C_1 n + C_2$, где $C_1 > 1$ и C_2 – константы, не зависящие от n, то* (3) *примет вид*

$$(C_1 - 1)(k_j - 1) + C_2 < \sum_{i=j}^{\delta} D_i \le (C_1 - 1)k_j + C_2. \tag{4}$$

Лемма 3. *Последовательность $k_1, k_2, \dots, k_\delta$ обладает свойством $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3) получаем:

$$g(k_{j+1} - 1) - (k_{j+1} - 1) < \sum_{i=j+1}^{\delta} D_i \le g(k_{j+1}) - k_{j+1}. \tag{5}$$

Предположим, что $k_j < k_{j+1}$. Пусть, например, $k_{j+1} = k_j + C$, где $C \ge 1$. Тогда из (5) получаем:

$$g(k_j + C - 1) - (k_j + C - 1) < \sum_{i=j+1}^{\delta} D_i \le g(k_j + C) - (k_j + C) \tag{6}$$

Так как $k_j < k_j + C$ и $C \ge 1$, то $k_j \le k_j + C - 1$. Кроме того, для каждого i $(0 \le i \le n-1)$ выполняется условие $g(i) - i < g(i+1) - (i+1)$. Поэтому $g(k_j) - k_j \le g(k_j + C - 1) - (k_j + C - 1)$.

Тогда, учитывая (4) и (6), получаем

$$\sum_{i=j}^{\delta} D_i \le g(k_j) - k_j \le g(k_j + C - 1) - (k_j + C - 1) < \sum_{i=j+1}^{\delta} D_i,$$

то есть $\sum_{i=j}^{\delta} D_i < \sum_{i=j+1}^{\delta} D_i$ – противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. Лемма 3 доказана.

Покажем, что $k_1 \le n$. Предположим, что $k_1 > n$. Тогда $k_1 - 1 \ge n$ и так как функция $g(n) - n$ является возрастающей, то

$$g(n) - n \le g(k_1 - 1) - (k_1 - 1).$$

Кроме того, при $j=1$ из (3) получаем $g(k_1 - 1) - (k_1 - 1) < \sum_{i=1}^{\delta} D_i$. Следовательно, $g(n) - n < \sum_{i=1}^{\delta} D_i$ или $g(n) < \sum_{i=1}^{\delta} D_i + n$, что противоречит тому условию, что функция $g(n)$ является емкостной характеристикой работы машины. Таким образом, $k_1 \le n$.

Количество значений k_j, удовлетворяющих условию $k_j = i$, обозначим через t_i. Очевидно, $\sum_{i=1}^{n} t_i = \delta$.

Лемма 4. *Пусть в последовательности $k_1, k_2, \dots, k_\delta$ имеются члены $i + B_1, i, i - B_2$, где $B_1 \ge 1$, $B_2 \ge 1$ и нет членов j, где $i - B_2 < j < i + B_1$, $j \ne i$.*

Тогда

$$t_i \ge \frac{1}{D_{max}} (g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1), \tag{7}$$

где $D_{max} = max\{D_j | 1 \le j \le \delta\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $k_1 \le n$ и $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_\delta$, то значениями k_j, для которых выполняется условие $k_j = n$, будут являться $k_1, k_2, \dots, k_{t_n}$, значениями $k_j = n-1$ будут $- k_{t_n+1}, k_{t_n+2,} \dots k_{t_n+t_{n-1}}$ и т.д. Тогда, поскольку $k_{t_n+t_{n-1}+\cdots+t_{i+B_i}} = i + B_1$, а $k_{t_n+t_{n-1}+\cdots+t_{i-B_2}} = i - B_2$, то из (3) получаем:

$$g(i + B_1 - 1) - (i + B_1 - 1) < \sum_{j=t_n+t_{n-1}+\cdots+t_{i+B_i}}^{\delta} D_j \le g(i + B_1) - (i + B_1),$$

$$g(i - B_2 - 1) - (i - B_2 - 1) < \sum_{j=t_n+t_{n-1}+\cdots+t_{i-B_2}}^{\delta} D_j \le g(i - B_2) - (i - B_2).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=t_n+\cdots+t_{i+B_1}}^{\delta} D_j - \sum_{j=t_n+\cdots+t_{i-(B_2)}}^{\delta} D_j > (g(i + B_1 - 1) - (i + B_1 - 1)) - - (g(i - B_2) - (i - B_2)),$$

то есть

$$\sum_{j=t_n+\cdots+t_{i+B_1}}^{t_n+\cdots+t_i} D_j > (g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1.$$

Из условия леммы имеем, что $t_j = 0$, где $i + B_1 > j > i - B_2$, $j \ne i$. Кроме того, $D_{max} \ge D_j$, где $1 \le j \le \delta$. Поэтому

$$(1+t_i)\, D_{max} \ge \sum_{j=t_n+\cdots+t_{i+B_1}}^{t_n+\cdots+t_i} D_j.$$

Таким образом,

$$(1+t_i)\, D_{max} > g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1,$$

откуда $t_i \ge \frac{1}{D_{max}} (g(i + B_1 - 1) - g(i - B_2) - B_1 - B_2 + 1)$. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *Если $g(n) = C_1 n + C_2$, где $C_1 > 1$* и *C_2 — константы, не зависящие от n, то* (7) *принимает вид*

$$t_i \ge \frac{1}{D_{max}} (C_1 - 1)(B_1 + B_2 - 1) - 1. \tag{8}$$

Определение 3. *Траекторию движения головки, у которой левый конец каждого отрезка $r_{i+1} (i \ge 1)$ находится правее или совпадает с левым концом предшествующего отрезка r_i, назовем стандартной траекторией*.

Лемма 5. *У стандартной траектории для каждого $j \ge 1$ выполняется условие $\left|\gamma\left(r_j\right)\right| \ge k_j$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дана стандартная траектория движения головки. Предположим, что имеется такой номер $t \ge 1$, что $|\gamma(r_t)| < k_t$, то есть у отрезка r_t левее $\gamma(r_t)$ находится менее k_t ячеек и поэтому сумме $\sum_{i=t}^{\delta} D_i$ отрезок r_t не удовлетворяет. Тогда сумме $\sum_{i=t}^{\delta} D_i$ должен удовлетворять один из отрезков $r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_\delta$. Пусть это будет отрезок k_s ($t+1 \le s \le \delta$). Тогда у отрезка k_s левее $\beta(r_t)$ должно находиться не менее k_t ячеек и поэтому левый конец отрезка r_s будет располагаться левее левого конца отрезка r_t (t<s), что противоречит определению стандартной траектории. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если $g(n) = C_1 n + C_2$, где $C_1 > 1$ и C_2 — константы, не зависящие от n, то имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{\delta} k_j \ge B_1 n^2 + B_2 n + B_3, \tag{9}$$

где B_1, B_2, B_3 — константы, не зависящие от n:

$$B_1 = \frac{C_1 - 1}{2{D_{max}}^2};\ B_2 = \frac{2C_2 + (1 - 2C_2)\, D_{max}}{2{D_{max}}^2};\ B_3 = \frac{C_2(C_2 + (1 - 2C_2) D_{max})}{2{D_{max}}^2 (C_1 - 1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4) получаем $\sum_{i=j}^{\delta} D_i \le (C_1 - 1) k_j + C_2$, отсюда $k_j \ge \frac{1}{C_1 - 1}\left(\sum_{i=j}^{\delta} D_i - C_2\right)$.

Тогда $\sum_{j=1}^{\delta} k_j \ge \sum_{j=1}^{\delta}\left(\frac{1}{C_1-1}\left(\sum_{i=j}^{\delta} D_i - C_2\right)\right) = \frac{1}{C_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{\delta} D_i + \sum_{i=2}^{\delta} D_i + \cdots + \sum_{i=\delta}^{\delta} D_i\right) - \frac{C_2}{C_1 - 1}\delta$.

Так как $D_i \ge 1$ при $1 \le i \le \delta$, то

$$\frac{1}{C_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{\delta} D_i + \sum_{i=2}^{\delta} D_i + \cdots + \sum_{i=\delta}^{\delta} D_i\right) - \frac{C_2}{C_1 - 1}\delta \ge$$

$$\ge \frac{1}{C_1 - 1}(\delta + (\delta - 1) + \cdots + 1) - \frac{C_2}{C_1 - 1}\delta = \frac{1}{C_1 - 1}\frac{\delta + 1}{2}\,\delta - \frac{C_2}{C_1 - 1}\delta =$$

$$= \frac{1}{2(C_1 - 1)}\delta^2 + \frac{1}{2(C_1 - 1)}\delta - \frac{C_2}{C_1 - 1}\delta = \frac{1}{2(C_1 - 1)}\delta^2 + \frac{1 - 2C_2}{2(C_1 - 1)}\delta.$$

Кроме того, $\frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}} \le \delta \le (C_1-1)n+C_2$. Действительно, $n+\delta D_{max} \ge g(n)$, то есть $n+\delta D_{max} \ge C_1 n+C_2$, откуда $\delta \ge \frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}}$. А поскольку $n+1\delta \le g(n)$, то есть $n+1\delta \le C_1 n+C_2$, то $\delta \le (C_1-1)n+C_2$.

$$\text{Тогда } \sum_{j=1}^{\delta} k_j \ge \frac{1}{2(C_1-1)}\left(\frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}}\right)^2+\frac{1-2C_2}{2(C_1-1)}\left(\frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2(C_1-1)}\left(\left(\frac{C_1-1}{D_{max}}n\right)^2+2\frac{C_1-1}{D_{max}}\frac{C_2}{D_{max}}n+\frac{C_2{}^2}{D_{max}{}^2}\right)+\frac{1-2C_2}{2(C_1-1)}\frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{1-2C_2}{2(C_1-1)}\frac{C_2}{D_{max}}=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}n^2+\frac{C_2}{D_{max}{}^2}n+\frac{1}{2(C_1-1)}\frac{C_2{}^2}{D_{max}{}^2}+\frac{1-2C_2}{2\,D_{max}}n+\frac{1-2C_2}{2(C_1-1)}\frac{C_2}{D_{max}}=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}n^2+\left(\frac{C_2}{D_{max}{}^2}+\frac{1-2C_2}{2\,D_{max}}\right)n+\frac{1}{2(C_1-1)}\frac{C_2{}^2}{D_{max}{}^2}+\frac{1-2C_2}{2(C_1-1)}\frac{C_2}{D_{max}}=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}n^2+\frac{2C_2+(1-2C_2)\,D_{max}}{2D_{max}{}^2}n+\frac{C_2(C_2+(1-2C_2)D_{max})}{2D_{max}{}^2(C_1-1)}.$$

Обозначив коэффициенты при n^2, n и последний член соответственно через B_1, B_2, B_3, мы и получим оценку (9). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если емкостной характеристикой работы машины является функция $g(n)=C_1 n+C_2$ и траекторией движения головки машины служит стандартная траектория, то временная характеристика работы машины $T(n)$ удовлетворяет условию*

$$T(n) \ge C_3 n^2 + C_4 n + C_5, \tag{10}$$

где $C_3=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}$, $C_4=\frac{4C_1-2C_2-3}{2D_{max}}+\frac{C_2}{D_{max}{}^2}+2\,C_1$,

$C_5=\frac{C_2{}^2}{2D_{max}{}^2(C_1-1)}+\frac{C_2(4C_1-2C_2-3)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого правого отрезка r_i ($i \ge 1$) имеется условие $|r_i|=|\gamma(r_i)|+D_i$. Кроме того, для каждого $i \ge 1$ выполняется требование $|l_i| \ge D_i+2$. За время работы машины, соответствующее правому (левому) отрезку r_i, (l_i), головка совершает количество тактов не меньшее, чем длина этого отрезка. Поэтому, учитывая лемму 5, получаем

$$T(n) \ge \sum_{i=1}^{\delta}(|r_i|+|l_i|) \ge \sum_{i=1}^{\delta}(|\gamma(r_i)|+D_i+D_i+2)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\delta}|\gamma(r_i)|+2\sum_{i=1}^{\delta}D_i+2\,\delta \ge \sum_{i=1}^{\delta}k_i+2\sum_{i=1}^{\delta}D_i+2\,\delta.$$

Так как $n+\sum_{i=1}^{\delta}D_i=g(n)=C_1 n+C_2$, то $\sum_{i=1}^{\delta}D_i=C_1(n-1)+C_2$. Кроме того, $\delta \ge \frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}}$. Наконец, применяя (9), имеем

$$T(n) \ge \sum_{i=1}^{\delta}k_i+2\sum_{i=1}^{\delta}D_i+2\,\delta \ge (B_1 n^2+B_2 n+B_3)+2\,(C_1(n-1)+C_2)+$$

$$+2\left(\frac{C_1-1}{D_{max}}n+\frac{C_2}{D_{max}}\right)=B_1 n^2+\left(B_2+2\,C_1+2\frac{C_1-1}{D_{max}}\right)n+\left(B_3-2\,C_1+2C_2+\frac{2C_2}{D_{max}}\right)=$$

$$=\frac{C_1-1}{2*D_{max}{}^2}n^2+\left(\frac{2C_2+(1-2C_2)\,D_{max}}{2D_{max}{}^2}+2\,C_1+2\frac{C_1-1}{D_{max}}\right)n+$$

$$+\left(\frac{C_2{}^2}{2D_{max}{}^2(C_1-1)}+\frac{C_2(1-2C_2)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)+\frac{2C_2}{D_{max}}\right)=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}n^2+\frac{2C_2+(1-2C_2)\,D_{max}+2D_{max}{}^2 2\,C_1+4D_{max}\,(C_1-1)}{2D_{max}{}^2}n+$$

$$+\left(\frac{C_2{}^2}{2D_{max}{}^2(C_1-1)}+\frac{C_2(1-2C_2)+4C_2(C_1-1)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)\right)=\frac{C_1-1}{2D_{max}{}^2}n^2+$$

$$+\frac{2C_2+(1-2C_2+4C_1-4)\,D_{max}+4D_{max}{}^2\,C_1}{2D_{max}{}^2}n+$$

$$+\left(\frac{C_2^{\,2}}{2D_{max}^{\,2}(C_1-1)}+\frac{C_2(4C_1-2C_2-3)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)\right)=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}^{\,2}}\,n^2+\frac{2C_2+(4C_1-2C_2-3)\,D_{max}+4D_{max}^{\,2}\,C_1}{2D_{max}^{\,2}}\,n+$$

$$+\left(\frac{C_2^{\,2}}{2D_{max}^{\,2}(C_1-1)}+\frac{C_2(4C_1-2C_2-3)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)\right)=$$

$$=\frac{C_1-1}{2D_{max}^{\,2}}\,n^2+\left(\frac{4C_1-2C_2-3}{2D_{max}}+\frac{C_2}{D_{max}^{\,2}}+2\,C_1\right)n+$$

$$+\left(\frac{C_2^{\,2}}{2D_{max}^{\,2}(C_1-1)}+\frac{C_2(4C_1-2C_2-3)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1)\right)=C_3n^2+C_4n+C_5,$$

где $C_3=\frac{C_1-1}{2D_{max}^{\,2}}$, $C_4=\frac{4C_1-2C_2-3}{2D_{max}}+\frac{C_2}{D_{max}^{\,2}}+2\,C_1$,

$$C_5=\frac{C_2^{\,2}}{2D_{max}^{\,2}(C_1-1)}+\frac{C_2(4C_1-2C_2-3)}{2D_{max}(C_1-1)}+2(C_2-C_1).$$ Лемма 7 доказана.

Следствие 3. *Если емкостной характеристикой работы машины является функция* $g(n)=C_1n+C_2$ *и траекторией движения головки машины – произвольная траектория, то временная характеристика работы машины* $T(n)$ *удовлетворяет условию* (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, наибольшая длина правых и левые отрезков стандартной траектории достигается в том случае, когда $|r_1|=n+D_1$ и левый конец каждого отрезка $r_{i+1}(i\geq 1)$ будет совпадать с левым концом предшествующего отрезка r_i. У произвольной траектории правые и левые отрезки будут иметь длину, не большую, чем соответствующие отрезки стандартной траектории в указанном выше случае. Поэтому сумма длин правых и левых отрезков произвольной траектории будет не больше, чем соответствующая сумма стандартной траектории. Кроме того, за время работы машины, соответствующее каждому правому (левому) отрезку r_i, (l_i), головка совершает количество тактов не меньшее, чем длина этого отрезка. Следовательно, время работы машины в случае произвольной траектории будет не больше, чем в случае стандартной траектории. Поэтому временная характеристика работы машины $T(n)$ при произвольной траектории удовлетворяет условию (10). Следствие 3 доказано.

Заключение. Таким образом, рассмотрено новое графическое представление тьюринговых вычислений. На основе его исследования доказано, что если емкостной характеристикой работы машины является линейная функция, то нижняя оценка временной характеристики работы машины – квадратичная функция.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Барздинь, Я.М. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга / Я.М. Барздинь // Проблемы кибернетики. – 1965. – Вып. 15. – С. 245–248.
2. Фрейвалд, Р.В. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга со входом / Р.В. Фрейвалд // Алгебра и логика. Семинар. – 1965. – № 1. – С. 47–58.
3. Трахтенброт, Б.А. Сложность алгоритмов и вычислений / Б.А. Трахтенброт. – Новосибирск: НГУ, 1967. – 198 с.
4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – № 2. – P. 325–339.
5. Мощенский, В.А. К вопросу о сложности тьюринговых вычислений / В.А. Мощенский // Докл. АН БССР. – 1969. – № 10. – С. 871–878.
6. Мощенский, В.А. Об оценке некоторых функций, характеризующих работу машин Тьюринга / В.А. Мощенский // Кибернетика. – 1971. – № 1. – С. 34–40.
7. Мощенский, В.А. Обобщенный метод нитей и некоторые его применения / В.А. Мощенский. – Минск: БГУ, 2000. – 69 с.

R E F E R E N C E S

1. Barsdin Ya.M. *Problemy kibernetiki* [Issues of Cybernetics], 1965, 15, pp. 245–248.
2. Freivald R.V. *Algebra i logika. Seminar* [Algebra and Logics. Seminar], 1965, 1, pp. 47–58.
3. Trahtenbrot B.A. *Slozhnost algoritmov i vychisleni* [Complexity of Algorithms and Calculations], Novosibirsk: NGU, 1967, 198 p.
4. Hartmanis, J. Computational complexity of one tape Turing machine computations / J. Hartmanis // Assoc. Comput. Mach. – 1968. – № 2. – P. 325–339.
5. Moshchenski V.A. *Dokl. AN BSSR* [Reports of the BSSR AS], 1969, 10, pp. 871–878.
6. Moshchenski V.A. *Kibernetika* [Cybernetics], 1971, 1, pp. 34–40.
7. Moshchenski V.A. *Obobshchenny metod nitei i nekotoriye yego primeneniya* [The Generalized Thread Method and Some of its Applications], Minsk: BGU, 2000, 69 s.

Поступила в редакцию 13.03.2023

Адрес для корреспонденции: e-mail: budzko@brsu.by – Будько А.Е.