Григорьев Олег Николаевич

НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ИХ ОПЕРАТОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

01.01.03 – Математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва, 2005

Работа выполнена в Московском Государственном Институте Электроники и Математики (техническом университете) на кафедре «Прикладная математика»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор Карасев Михаил Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Смолянов Олег Георгиевич

кандидат физико-математических наук доцент Перескоков Александр Вадимович

Ведущая организация: Физический Институт Академии Наук имени Лебедева (ФИАН)

Защита диссертации состоится «21» июня 2005 г. в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.133.01 в Московском Государственном Институте Электроники и Математики (техническом университете) по адресу: 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГИЭМ (ТУ).

Автореферат разослан «20» мая 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета К 212.133.01,
к.ф.-м.н., доцент Хакимуллин Е. Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Квантование симплектических многообразий является одной из важных задач современной математики и математической физики.

Квантовые произведения, возникающие при квантовании, активно применяются при редукции гамильтоновых систем с симметриями на пуассоновых многообразиях, для построения точных решений квантово-механических задач, а также в классическом и квантовом методе усреднения. Они тесно связаны с квантовыми группами, универсальными обертывающими алгебрами Ли и деформациями структур Ли-Пуассона.

Сложность построения квантовых произведений определяется необходимостью включения в квантовые алгебры осциллирующих символов, а также требованием согласования квантового произведения с внутренней геометрией многообразия.

Указанные обстоятельства предопределяют актуальность темы настоящей диссертационной работы, ориентированной на исследование нового метода построения квантовых произведений над симплектическими многообразиями.

Целью диссертационной работы является исследование нового метода построения квантовых произведений над симплектическими многообразиями, основанного на использовании для построения квантовых объектов динамических уравнений в частных производных.

Общяя методика исследования. Результаты диссертационной работы получены на основе комплексного использования методов теории уравнений в частных производных, методов некоммутативного анализа, методов дифференциальной и симплектической геометрии.

Научная новизна и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты позволяют осуществлять квантование пространств, не допускающих квантование другими методами, а также связать полученные формулы с внутренней геометрией исходных пространств. Научная новизна определяется следующими основными результатами:

- Изучен новый метод построения квантовых произведений на симплектических многообразиях, основанный на использовании динамических уравнений.
- С помощью этого метода построены точные (не асимптотические) квантовые произведения для плоскости с нестандартной связностью, плоскости с симплектической структурой, зависящей от одной переменной.
- Установлено соответствие полученных результатов методам асимптотического и точного деформационного квантования.
- Установлена связь полученных формул с внутренней геометрией исходного многообразия.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и существенно расширяют арсенал математических методов, используемых для решения задач квантования гладких многообразий.

Личное участие автора. Вывод основного уравнения для интегрального ядра квантового произведения, а также постороение специальных координат, отвечающих квантовому произведению Вейля проведены автором совместно с профессором Карасевым М.В.. Вклад автора заключается в точном доказательстве всех теоретических результатов работы, а также в детальной разработке примеров применения полученных результатов и методов.

Результаты, выносимые на защиту:

- система дифференциальных уравнений в частных производных для интегрального ядра ассоциативного квантового произведения;
- конструкция квантового произведения для симплектических симметрических пространств;

- два различных точных квантовых произведения (циклическое и нециклическое) для плоскости с нестандартной связностью как симметрического пространства;
- квантовое произведение для пространств со специальными (ω-аффинными) координатами, отвечающими вейлевскому квантовому произведению, алгоритм построения таких координат;
- квантовое произведение для области двумерной плоскости с ω-аффинными координатами, симплектическая структура на которой зависит только от одной переменной, геометрия и особенности интегрального ядра квантового произведения.

Апробация результатов. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях МГИЭМ (Москва, 2000-2004 гг.):

1. *Квантование симплектических многообразий в аффинных координатах*, Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ., 2004.
2. *Квантование и внутренняя динамика*, Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ., 2003.
3. *Геометрия и квантование симметрических пространств*, Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ., 2002.
4. *Исследование геометрических свойств формул квантования*, Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ., 2001.
5. *Расширение вейлевских псевдо-дифференциальных операторов на гладкое многообразие*, Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ., 2000.

Объем работы и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав основного текста, заключения и списка использованной литературы. Диссертация содержит 137 страниц машинописного текста. Список литературы содержит 156 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении приводится краткая характеристика диссертационной работы. Обосновывается актуальность выбранной темы, формулируется цель и основные задачи исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту. Излагается краткое содержание глав диссертации.

В самом широком смысле под квантованием обычно понимается переход от классической системы к соответствующей квантовой. При этом требуется сформулировать квантовую теорию, для которой исходная классическая система будет пределом в некотором смысле.

Исходная концепция квантования (которая теперь обычно называется *каноническим квантованием*) принадлежит Вейлю, фон Нейману и Дираку [13, 20, 26]. Она заключается в попытке сопоставить наблюдаемым классической механики, которые являются действительными функциям $f(p,q)$ переменных $(p,q) = (p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots q_n) \in R^n \times R^n$ (фазовое пространство), самосопряженные операторы Q_f на гильбертовом пространстве $L^2(R^n)$ так, чтобы были выполнены соотношения:

(q1) соответствие $f \mapsto Q_f$ линейно;

(q2) $Q_1 = I$, где 1 является единичной функцией, а I – единичным оператором;

(q3) для любой функции $\phi : R^n \to R^n$, для которой определены $Q_{\phi\circ f}$ и $\phi(Q_f)$ выполнено $Q_{\phi\circ f} = \phi(Q_f)$;

(q4) операторы Q_{q_j} и Q_{p_j} являются соответственно операторами умножения и дифференцирования по переменным q_j.

(q5) для всех квантуемых функций f и g выполнено: $[Q_f, Q_g] = i\hbar Q_{\{f,g\}}$.

Область определения отображения $Q: f \mapsto Q_f$ называется *пространством квантовых наблюдаемых.* В идеале хотелось бы, чтобы это пространство было достаточно большим (по крайней мере, содержало бы бесконечно дифференцируемые функции).

К сожалению, оказывается, что аксиомы (q1) – (q5), взятые в совокупности, не являются согласованными [7].

Традиционно существует два подхода для решения этой проблемы. Первый подход состоит в том, чтобы оставить аксиомы (q1), (q2), (q4) и (q5), но ограничить пространство квантуемых функций.

Во втором подходе предлагается оставить аксиомы (q1), (q2) и (q4), но потребовать, чтобы аксиомы (q3) и (q5) были выполнены только асимптотически по параметру $\hbar$ при $\hbar \to 0$. Тогда оператор Q_f можно записать как некоторый осциллирующий интеграл. Если при этом функции f и g лежат в подходящем пространстве, то композицию операторов Q_f и Q_g можно записать как $Q_f Q_g = Q_{f*g}$ для некоторой функции $f * g$, которая называется *квантовым произведением Вейля* функций f и g.

Основная проблема квантования состоит в том, чтобы расширить два описанных выше подхода с пространства R^{2n} на произвольное симплектическое многообразие. Первый подход приводит к геометрическому квантованию, а второй – к деформационному квантованию.

Отправной точкой метода *геометрического квантования* является действительное симплектическое многообразие Ω (фазовое пространство) размерности $2n$ с симплектической формой ω. Целью геометрического квантования является сопоставление каждому такому многообразию (Ω,ω) сепарабельного гильбертова пространства $\Im$ и отображения $Q: f \mapsto Q_f$ из пространства $M(\Omega)$ (настолько большого, насколько возможно) квантуемых действительных функций на Ω, которое является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона, в пространство самосопряженных линейных операторов на $\Im$

1. При всех наборах точек (a_1,b_1,c_1) система имеет решение (существует описанный выше треугольник) и рефлексии s_a не имеют особенностей.

2. При некоторых (a_1,b_1,c_1) система может не иметь решений (треугольник может не существовать) и рефлексии S_a имеют особенности. В этом случае для построения квантового произведения необходимо сужать класс допустимых символов.

Последний случай разбирается более подробно на примере симплектической плоскости с особенностями: плоскости R^2 с ω-аффинными координатами (x_1,x_2) и симплектической формой $\omega=(1+x_1^2)^{-3/2}dx_2\wedge dx_1$. Данное пространство оказывается симметрическим относительно ω-аффинной связности. Отображения симметрии s_y здесь имеют особенности, поэтому в этом примере реализуется случай 2.

С помощью решения уравнения Шредингера получено интегральное ядро K^h квантового произведения, фаза $\Phi_{x,y}(u)$ и амплитуда $\varphi_{x,y}(u)$ которого определены при $1+x_1y_1+y_1u_1-u_1x_1>0$.

Далее с помощью ω-аффинных координат строится квантайзер S_a, действующий в пространстве $L^2(-\pi/2,\pi/2)$. Для того, чтобы теперь построить ядро K'^h соответствующего квантайзеру квантового произведения, необходимо сузить класс допустимых символов. А именно, допускаются только символы вида

$$f(a)=P_{a_1}(a_2)\exp\left\{\frac{2i}{\hbar}a_2 f_0(a_1)\right\},$$

где $P_{a_1}(a_2)=\sum\limits_{k>1}f_k(a_1)a_2^{k-1}$, функции f_k – кусочно-гладкие и выполнены соотношения: $|f_0(a_1)|<(1+a_1^2)^{-1/2}$ и $f_0(a_1)\neq\pm(1+a_1^2)^{-1}$. Операторы, построенные из символов данного класса с помощью квантайзера S_a, являются ограниченными операторами в пространстве $H(-\pi/2,\pi/2)$. Затем строится ядро $K^{/\hbar}$, которое сохраняет класс допустимых функций, описанный выше.

Ядро $K^{/\hbar}$ квантового произведения в этом примере имеет особенности (порожденные особенностями отображений симметрий s_x). Они представляют собой поверхность в пространстве $R^3 = \{(x_1, y_1, u_1)\}$, образованную тремя двуполостными гиперболоидами, симметрично расположенными относительно начала координат и пересекающимися строго попарно. При этом вне поверхности особенностей, в окрестности диагонали $x_1 = y_1 = u_1$, интегральные ядра двух квантовых произведений, полученные выше, совпадают: $K^{/\hbar} = K^{\hbar}$. При этом фаза $\Phi^{/}_{x,y}(u) = \Phi_{x,y}(u)$ равна площади треугольника, для которого точки x, y и u являются серединами сторон, а сами стороны инвариантны относительно отображений симметрии s_x, s_y и s_u соответственно. После пересечения поверхности особенностей эти равенства нарушаются.

Список публикаций. Отдельные главы диссертации отражены в 2 печатных работах:

1. О.Н. Григорьев, М.В. Карасев, *Динамическое уравнение для квантового произведения в аффинных координатах на симплектическом пространстве*, Мат. Заметки, 77 (1), 2005, 42 – 52.
2. O.N. Grigoryev, M.V. Karasev, *Intrinsic quantum dynamics over a plane with a nonstandard connection*, Russ. J. Math. Phys., 10 (2003), no.4, 422 – 435.

Список литературы

[1] Ф.А. Березин, *Квантование*, Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 38 (1974), no.5; 1109 – 1165.

[2] М.В. Карасев, В.П. Маслов, *Асимптотическое и геометрическое квантование*, Успехи Мат. Наук 39 (1984), no.6, 115 – 173.

[3] М.В. Карасев, В.П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Москва, Наука, 1991.

[4] М.В. Карасев, *Аналоги объектов теории групп Ли для нелинейных скобок Пуассона*, Изв. АН СССР, Сер. мат., 50 (1986), no.6, 508 – 538.

[5] А.А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, М.: Наука, 1972.

[6] Г.Л. Литвинов, *О двойных топологических алгебрах и алгебрах Хопфа,* Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, М.: Изд. МГУ, т.18 (1978), 372 – 375.

[7] R. Arens, D. Babbitt, *Algebraic difficulties of preserving dynamical relations when forming quantum-mechanical operators*, J. Math. Phys., vol.6, 1965, 1071 – 1075.

[8] I.A. Batalin, I.V. Tyutin, *Quantum geometry of symbols and operators*, Nucl. Phys., B 345 (1990), 645 – 658.

[9] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization*, Lett. Math. Phys., vol. 1 , 1977 , 521 – 530 , Ann. Phys., vol. 111, 1978, 61– 110 (part I), 111– 151 (part II).

[10] P. Bieliavsky, *Strict quantization of solvable symmetric spaces*, arXiv: math-qa/0010004.

[11] M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnslew, *Symplectic symmetric spaces with Ricci tyhe curvature*, Math. Phys. Studes, vol.22 (2), 81 -- 93, 2000.

[12] M. Dewilde, P.B.A. Lecomte, *Existence of star products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys., vol.7, 1983, 487– 496.

[13] P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 3rd edition, Oxford, London, 1947.

[14] B.V. Fedosov, *A simple geometric construction of deformation quantization*, J. Diff. Geo., vol.40, 1994, 213 – 238.

[15] M.V. Karasev, *Quantization by means of two dimensional surfaces (membranes): geometrical formulas for wave-functions*, Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993), 81 – 113.

[16] M.V. Karasev, *Quantum surfaces, special functions and tunneling effect*, Lett. Math. Phys., 56 (2001), 229 – 269.

[17] M. V. Karasev, T. Osborn, *Symplectic areas, quantization, and dynamics in electromagnetic fields*, J. Math. Phys. **43** (2002), no.2, 756 – 788; arXiv: quant-ph/0002041.

[18] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, arXiv: q-alg/9709040, 1997.

[19] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lecture Notes in Math., vol.170, Springer, Berlin, 1970.

[20] J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.

[21] M.A. Rieffel, *Deformation quantization and operator algebras*, Operator theory: operator algebras and applications (Durham, NH, 1988), 411 – 423, Proc. Symp. Pure Math., vol.51, 1990.

[22] J.-M. Souriau, *Structure of dynamical systems*, Progr. Math., vol.149, Birkhauser, Boston, 1997.

[23] R. Stratonovich, *On distributions in representation space*, Soviet Phys. JETP **4** (1957), no.6, 891 – 898.

[24] J. Underhill, *Quantization on manifolds with connection*, J. Math. Phys., 1978, vol.19, 1932 – 1935.

[25] A. Weinstein, *Symplectic grupoids, geometric quantization, and irrational rotation algebras*, Symplectic geometry, grupoids, and integrable systems (Berkeley, 1989), 281 – 290, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol.20, Springer, New York, 1991.

[26] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, New York, 1931.