

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"

УДК 512.542

ГРИБОВСКАЯ Марал Атаевна

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНДЕКСАМИ ОТДЕЛЬНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Работа выполнена в Учреждении образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор
МОНАХОВ Виктор Степанович,

Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины", кафедра алгебры и геометрии

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Махнёв Александр Алексеевич, институт математики и механики УрО РАН, заведующий отделом алгебры и топологии;

кандидат физико-математических наук, доцент

Новиков Сергей Петрович, Белорусский государственный университет транспорта, кафедра высшей математики.

Защита состоится " 4 " октября 2003 года в 14⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Учреждении образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины" по адресу: 246019, г.Гомель, ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: (10-375232) 57-37-91.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

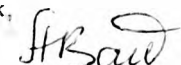
Автореферат разослан " 24 " окт 2003 года

Ученый секретарь

совета по защите диссертаций

кандидат физико-математических наук,

доцент

 А.Ф.ВАСИЛЬЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации.

В 1954 году Хупперт доказал [14], что конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп являются простыми числами. В этой же работе он установил нильпотентность четвертого коммутанта разрешимой группы, в которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. Кроме того, если порядок группы нечетен, то нильпотентен уже второй коммутант.

В простой группе $PSL(2, 7)$ максимальные подгруппы имеют индексы, равные 7 и 8. Поэтому группа, у которой индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, квадратами или кубами простых чисел, может быть неразрешимой. Для разрешимой группы G с индексами максимальных подгрупп, являющимися простыми числами, квадратами или кубами простых чисел, Хупперт [14] доказал нильпотентность шестого коммутанта, а если группа имеет нечетный порядок, то нильпотентен четвертый коммутант. Дальнейшие исследования таких групп проведены в работах С.Ф.Каморникова, В.С.Монахова, М.В.Селькина и Е.Е.Грибовской [3], [4], [5].

В 1958 году Ф.Холл [7] получил разрешимость конечной группы с индексами максимальных подгрупп, являющимися простыми числами или квадратами простых чисел. В этой ситуации мы будем говорить, что индексы примарны и свободны от кубов простых чисел. Этот результат Ф.Холла в 1966 году Л.Я.Поляков [6] распространил на нормальные подгруппы. Он установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G при условии, что индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , являются примарными и свободными от кубов. В случае $K = G$ получается отмеченная выше теорема Ф.Холла.

В 1968 году Л.А.Шеметков [8] установил π -сверхразрешимость (π, π') -разрешимой нормальной подгруппы K группы G , у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих K , являются простыми числами из π , либо не делятся ни на одно простое число из π . Отсюда следует сверхразрешимость нормальной подгруппы K группы G с простыми индексами максимальных подгрупп, не содержащих K , а при $K = G$ получается теорема Хупперта.

К данной тематике относится и предлагаемая диссертация. Здесь исследуется строение конечной группы G в следующих случаях:

индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят четвертые степени простых чисел и группа имеет нечетный порядок;

индексы максимальных подгрупп либо делятся на наибольший простой делитель порядка группы, либо являются простыми числами или квадратами простых чисел.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена в рамках госбюджетной темы "Структурная теория классов групп и других алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г. (номер госрегистрации в БелИСА — 20011225), выполнение темы запланировано на 2001–2005 гг.

Цель и задачи исследования. Цель диссертации — строение конечной группы с ограниченными индексами отдельных максимальных подгрупп. Для достижения этой цели в диссертации решены следующие задачи:

- найдены инварианты группы нечетного порядка с индексами максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, свободными от пятых степеней простых чисел;
- установлено строение группы, у которой индексы максимальных подгрупп либо делятся на наибольший простой делитель порядка группы, либо являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются конечные группы с ограниченными индексами отдельных максимальных подгрупп. Предмет исследования – структурные свойства таких групп.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, а также методы теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты в диссертации являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях. Работа имеет теоретический характер. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов на математических специальностях высших учебных заведений.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Строение группы нечетного порядка с индексами максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, свободными от пятых степеней простых чисел (теоремы 3.2.2, 3.3.1, 3.3.5 и их следствия).
2. Строение нормальной подгруппы K группы G , у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу K , либо делятся на наибольший простой делитель порядка подгруппы K , либо являются простым числом или квадратом простого числа (теоремы 4.2.6, 4.2.10 и их следствия).

Личный вклад соискателя. В двух совместных работах (препринт и тезисы доклада) основные идеи принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины; на V Республиканской научной конференции студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании производстве и научных исследованиях" (Гомель, 18-20 марта 2002 года); на международной математической конференции, посвященной столетию начала работы Д.А.Граве (1863-1939) в Киевском университете (Киев, 17-22 июня 2002 года); на всеукраинской конференции "Алгебраические методы дискретной математики (теория и методология)" (Луганск, 23-27 сентября 2002 года); на V международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, 2003 года); на VI республиканской научной конференции студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Гомель, 17-19 марта 2003 года).

Опубликованность результатов. Результаты диссертации опубликованы в 5 статьях, одном препринте и 5 тезисах докладов. Общее количество страниц опубликованных материалов – 44.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, заключения и списка использованных источников в алфавитном порядке (31 наименование). Объем диссертации – 71 страница.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам.

Диссертация состоит из перечня обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка цитированной литературы.

В главе 1 приводится обзор полученных результатов.

Глава 2 посвящена известным результатам, используемым в основном тексте.

Главы 3 и 4 охватывают содержание диссертации. Перейдем к изложению основного материала работы.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [9], [15].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Васильева Т.И.* Структура подгруппы конечной группы, тривиально пересекающейся с каждой максимальной // В сб.: Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. — Мн.: Наука и техника. — 1984. — С. 33–38.
2. *Казарин Л.С.* О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14, № 6. — P. 1001–1066.
3. *Каморников С.Ф.* К теореме Ф.Холла. // Вопросы алгебры. — 1990. — Выпуск 5. — С.45–52.
4. *Монахов В.С., Грибовская Е.Е.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Математические заметки. — 2001. — Т.70, Выпуск 4. — С. 603–612.
5. *Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е.* О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн. — 2002. — Т.54, №7. — С.940–950.
6. *Поляков Л.Я.* О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы: Сб. — Минск. — 1966. С.89–97.
7. *Холл М.* Теория групп. — М.: ИЛ. — 1962. — 468 с.
8. *Шеметков Л.А.* О конечных разрешимых группах // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1968. Т.32, №3. — С.533–559.
9. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. — М.: Наука. — 1978. — 272 с.
10. *Bauman S.* Subgroups with trivial maximal intersection // Ill. J. Math. — 1977. — V. 21, №3. — P. 568–574.
11. *Bauman S.* The intersection map subgroups // Arch. Math. — 1974. — V. 25, №4. — P. 338–340.
12. *Bender H.* On groups with abelian Sylow 2-subgroups // Math. Z. — 1970. — Bd. 117. №1–4. — P.164–176.
13. *Guralnick R.M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. — 1983. — V. 81, №2. — P. 304–311.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

14. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // *Math. Zeitschr.* - 1954. - Bd.60. - S.409-434.
15. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. - Berlin, Heidelberg, New York, 1967. - 792 s.
16. *Kohler J.* Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index // *Canad.J.Math.* - 1964. - V.16, №3. - P.435-442

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

17. *Грибовская М.А.* Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп // *Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Вопросы алгебры.* - 2002. - Выпуск 18, №5(14) - С. 80-84.
18. *Грибовская М.А.* О нильпотентности субнормальной подгруппы конечной группы // *Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины.* - 2002. - №6(15). - С. 158-160.
19. *Грибовская М.А.* Нормальные подгруппы конечной группы и индексы не содержащих её максимальных подгрупп // *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта.* - 2002. - № 4(26). - С. 82-86.
20. *Грибовская М.А.* О группах нечетного порядка с небольшими индексами максимальных подгрупп // *Алгебра и линейная оптимизация: Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова.* Екатеринбург: УрО РАН. - 2002. - С. 92-98.
21. *Грибовская М.А.* Подгруппа Фиттинга и сверхразрешимость конечной разрешимой группы // *Творчество молодых, сборник научных работ студентов и аспирантов УО "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины".* Гомель. - 2002. - С. 82-84.
22. *Грибовская М.А., Монахов В.С.* Наибольший простой делитель порядка группы и индексы максимальных подгрупп - Гомель. - 2000. - 16 с. - (Препринт / Гомельский госуниверситет им. Ф.Скорины; № 38.)
23. *Грибовская М.А.* Субнормальные и максимальные подгруппы конечных групп // *Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы V Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, 18-20 марта 2002г.* / Гомель: ГГУ. - 1998. - С. 192.

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

24. *Грибовская М.А.* Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп // Міжнародна конференція, присвячена сторіччю від початку роботи Д. О. Гравс(1863-1939) в Київському університеті. Київ. 2002. — С.81
25. *Грибовская М.А.* Подгруппы Фиттинга и индексы максимальных подгрупп конечных разрешимых групп // Всеукраїнська конференція, Алгебраїчні методи дискретної математики. Луганськ. — 2002. — С. 22
26. *Грибовская М.А.* К теореме Ф.Холла о разрешимости конечной группы с ограниченными индексами максимальных подгрупп // Материалы VI Республиканской научной конференции студентов и аспирантов 17-19 марта "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях". Гомель. — 2003. — С.156.
27. *Монахов В.С., Грибовская М.А.* Наибольший простой делитель порядка конечной группы и индексы её максимальных подгрупп // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула. 2003. — С.83.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуется строение конечной группы с ограниченными индексами отдельных максимальных подгрупп. Получены следующие результаты:

— установлена нильпотентность второго коммутанта группы G нечетного порядка, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят четвертые степени простых чисел. В частности, p -длина такой группы не выше 2 для любого простого p , а нильпотентная длина не выше 3 [17];

— получено строение нормальной подгруппы K группы G при условии, что индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу K , либо делится на наибольший простой делитель порядка K , либо равен простому числу. В частности, подгруппа K дисперсивна по Оре и её нильпотентная длина не выше 3, а p' -холлова подгруппа из K сверхразрешима [19];

— установлено строение нормальной подгруппы K группы G при условии, что индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу K , либо делится на наибольший простой делитель порядка K , либо равен простому числу или квадрату простого числа. В частности, подгруппа K разрешима и её $\{2, 3\}$ -холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре. Кроме того, нильпотентная длина подгруппы K не выше 5, а p -длина не выше 2 для всех p [19].

Р Э З Ю М Е

Грыбоўская Марал Атаеўна

**Канечныя групы з абмежаванымі індэксамі
асобных максімальных падгруп**

Ключавыя словы: канечная група, індэкс максімальнай падгрупы, вы-
рашальная група, падгрупа Фіцінга, вытворная даўжыня, нільпатэнтная
даўжыня, p -даўжыня.

У дысэртацыі даследуюцца канечныя групы з абмежаванымі індэксамі
некастрычаных максімальных падгруп. Знайдзены інварыянты групы няцотнага
парадку, у якой усе максімальныя падгрупы, якія не ўтрымліваюць падгрупу
Фіцінга, дзеляць чацвертыя ступені простых лікаў. Атрымана будова групы,
у якой індэкс максімальных падгруп або дзеляцца на найбольшы просты
дзельнік парадку групы, або з'яўляюцца простымі лікамі ці квадратамі про-
стых лікаў.

Атрыманая вынікі дысэртацыі з'яўляюцца новымі,носяць тэарэтычны
характар і могуць выкарыстоўвацца ў навуковых даследаваннях, а таксама
пры чытанні спецкурсаў па тэорыі канечных груп.

Р Е З Ю М Е

Грибовская Марал Атаевна

**Конечные группы с ограниченными индексами
отдельных максимальных подгрупп**

Ключевые слова: Конечная группа, максимальная подгруппа, индекс подгруппы, разрешимая группа, подгруппа Фиттинга, производная длина, нильпотентная длина, p длина.

В диссертации исследуются конечные группы с ограниченными индексами некоторых максимальных подгрупп. Найдены инварианты группы нечетного порядка, у которой все максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга, делят четвертые степени простых чисел. Получено строение группы, индексы максимальных подгрупп которой либо делятся на наибольший простой делитель порядка группы, либо являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Основные результаты диссертации являются новыми, носят теоретический характер и могут использоваться в научных исследованиях, а также при чтении спецкурсов по теории конечных групп.

S U M M A R Y

Gribowskaya Maral Ataevna

Finite groups with limited
indexes of some maximal subgroups

Key words: finite group, maximal subgroup, index of subgroup, soluble group, Fitting subgroup, derivative length, nilpotent length, p -length.

In the dissertation finite groups with the limited indexes of some maximal subgroups are investigated. Invariants of group of the odd order whose all maximal subgroups which are not containing Fitting subgroup divide the forth degrees of simple numbers are found. The structure of group whose indexes of maximal subgroups or are divided on the greatest common divisor of order of group, or are prime numbers, or squares of prime numbers, is received.

The basic results of the dissertation are new, have theoretical character and can be used in scientific researches, and also at reading special courses on the theory of finite groups.

Грибовская