МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф.СКОРИНЫ"

УДК 512.542

ГРИБОВСКАЯ Евгения Евгеньевна

ИНДЕКСЫ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ТЕОРИИ КЛАССОВ СОСТАВНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Гомель — 2002

Работа выполнена в Учреждении образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор
МОНАХОВ Виктор Степанович,
Учреждение образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины", кафедра алгебры и геометрии

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, проф
МЕЛЬНИКОВ Олег Владимирович,
Учреждение образования "Белорусский государственный университет", кафедра высшей алгебры

кандидат физико-математических наук, доцент
ТЮТЯНОВ Валентин Николаевич,
Гомельский филиал Учреждения образования Федерации профсоюзов Белорусской "Международный институт трудовых и социальных отношений", кафедра общенаучных дисциплин

Оппонирующая организация – Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится "25" марта 2002 года в 11⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Учреждении образования "Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины" по адресу: 246019, г.Гомель, ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: (10-375232) 57-37-91.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Автореферат разослан "12" февраля 2002 года

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Ф.ВАСИЛЬЕВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. В 1954 году Хупперт исследовал строение конечной группы, у которой индексы максимальных цепей подгрупп равны простым числам или квадратам простых чисел. Он показал, что такая группа разрешима и её $\{2,3\}'$ холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре [14, теоремы 1, 14, 15]. Если рассматривать вместо индексов максимальных цепей подгрупп только индексы максимальных подгрупп, то, как доказал Хупперт, у разрешимой конечной группы G с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, либо квадратам простых чисел, четвертый коммутант нильпотентен, т.е. группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$, а если группа G имеет нечетный порядок, то уже второй коммутант нильпотентен, т.е. $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ [14, теорема 16]. Ф.Холл позднее показал, что конечная группа, у которой индекс каждой максимальной подгруппы есть простое число, либо квадрат простого числа, всегда разрешима [10, теорема 10.5.7].

Развивая эти результаты, С.Ф.Каморников в 1990 году установил [2] следующие свойства конечной группы G, у которой индексы максимальных подгрупп простые числа, либо квадраты простых чисел:

– $r(G/\Phi(G)) \leqslant 2$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G;

– $l_p(G) \leqslant 2$ для любого простого p;

– сверхразрешимый корадикал группы G дисперсивен по Оре;

– подгруппа Фиттинга группы G содержит $2'$ холлову подгруппу сверхразрешимого корадикала.

Здесь $r(G/\Phi(G))$ — главный ранг группы $G/\Phi(G)$, а $l_p(G)$ — p-длина группы G. Сверхразрешимым корадикалом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа группы G, факторгруппа по которой сверхразрешима.

В 1966 году Л.А.Шеметков [11] установил π-сверхразрешимость (π, π')-разрешимой нормальной подгруппы K группы G, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих K, простые числа из π, либо не делятся ни на одно простое число из π (см. также [12]). Отсюда следует сверхразрешимость нормальной подгруппы K группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащих K, равными простым числам.

В 1966 году Л.Я.Поляков [7] показал разрешимость нормальной подгруппы K конечной группы G при условии, что индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих K, являются простыми числами или квадратами простых чисел. В случае $K = G$ отсюда получается отмеченная выше теорема Ф.Холла.

Систематическое изучение строения нормальной подгруппы K конечной группы G с примарными индексами максимальных подгрупп, не содержащих

K, предприняты в работах С.Ф.Каморникова, В.С.Монахова и М.В.Селькина [3, 4, 5, 6] 1992–1995 гг., см. также главу 3 монографии М.В.Селькина [8]. Там же было замечено, что полученная информация о строении нормальной подгруппы K распространяется на пересечение отдельных максимальных подгрупп.

К этому направлению теории конечных групп относится и предлагаемая диссертация. Здесь исследуется строение разрешимой нормальной подгруппы K конечной группы G при условии, что все максимальные подгруппы, не содержащие K, имеют ограниченные примарные индексы. В частности, при $K = G$ полученные здесь результаты также являются новыми.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертация выполнена в рамках следующих госбюджетных тем:

"Структурная теория формаций и других классов алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995г. (номер госрегистрации в БелИСА — 19963987), тема выполнялась в 1996–2000 гг.;

"Структурная теория классов групп и других алгебр" Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Тема входит в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утверждённый решением Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г. (номер госрегистрации в БелИСА — 20011225), выполнение темы запланировано на 2001–2005 гг.

Цель и задачи исследования. Цель диссертации — строение нормальной разрешимой подгруппы K конечной группы G с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие задачи:

– установлена принадлежность подгруппы K произведению классов групп;

– найдены оценки нильпотентной длины и p-длины подгруппы K;

– доказана нормальность π'-холловой подгруппы группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп для $\pi = \{2, 3\}$ и $\pi = \{2, 3, 7\}$.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются конечные группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. Предмет исследования — структурные свойства разрешимых нормальных подгрупп в таких конечных группах.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертации используются методы доказательства абстрактной теории конечных групп, а также методы теории классов групп, в частности, методы теории формаций.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все полученные результаты в диссертации являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях. В диссертации изучены разрешимые нормальные подгруппы конечных групп с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. Получены новые признаки принадлежности нормальных разрешимых подгрупп произведениям классов групп в зависимости от индексов максимальных подгрупп самой группы.

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении строения конечных групп. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов на математических специальностях высших учебных заведений.

Основные положения, выносимые на защиту. 1. Строение разрешимых конечных групп с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп (теоремы 3.2.9, 3.3.5 и их следствия).

2. Строение нормальной разрешимой подгруппы K конечной группы G при условии, что её максимальные подгруппы, не содержащие K, имеют индексами простые числа, квадраты простых чисел или кубы простых чисел (теоремы 4.1.8, 4.2.4 и их следствия).

Личный вклад соискателя. В 4 совместных работах (одна статья, один препринт и двое тезисов) основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины; на республиканской научно-технической конференции студентов и аспирантов "Новые компьютерные технологии в науке, технике, производстве и индустрии развлечений" (Гомель, 9–13 марта 1998 г.); на VIII Белорусской математической конференции (Минск, 19–24 июня 2000 г.); на IV Международной алгебраической конференции, посвященной 60-летию профессора Ю.И.Мерзлякова (Новосибирск, 7–11 августа 2000 г.); на Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца "Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем" (Гомель, 16–21 октября 2000 г.); на

IV республиканской научной конференции студентов и аспирантов: "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях" (Гомель, 19–22 марта 2001 г.); на третьей Международной алгебраической конференции в Украине (Сумы, 2–8 июля 2001 г.); на Международной алгебраической конференции, проводимой в рамках Украинского математического конгресса, посвященного 200-летию М.В.Остроградского (Ужгород, 27–29 августа 2001 г.); на Международной научно-технической конференции "Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса" (Гомель: БелГУТ, 25–26 октября 2001 г.).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях, одном препринте и 8 тезисах докладов. Общее количество страниц опубликованных материалов — 44.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, четырех глав, заключения и списка цитированной литературы в алфавитном порядке (35 наименований). Объем диссертации — 65 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Ниже охарактеризовано содержание диссертации по главам.

Диссертация состоит из перечня обозначений, введения, четырёх глав, заключения и списка цитированной литературы.

В главе 1 приводится обзор полученных результатов.

Глава 2 посвящена известным результатам, используемым в основном тексте.

Главы 3 и 4 охватывают основное содержание диссертации. Перейдем к изложению основного материала работы.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [13, 15].

Хорошо известно, что конечная группа разрешима, если индекс каждой её максимальной подгруппы простое число, либо квадрат простого числа. Эта теорема Ф.Холла [10, теорема 10.5.7] развивалась в различных направлениях. В частности, С.Ф.Каморниковым были установлены некоторые свойства такой группы (более подробно об этом отмечалось в разделе "Актуальность темы диссертации").

Если рассматривать группы с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 8, то такие группы могут быть неразрешимыми. Примером служит простая группа $PSL(2,7)$, у которой индексы максимальных подгрупп равны 7 и 8. Для описания неразрешимых групп с примарными индексами максимальных подгрупп можно воспользоваться теоремой Гуральника: если в группе G все максимальные подгруппы имеют примарные индексы, то либо G — разрешима, либо $G/S(G) \simeq PSL(2,7)$. Этот результат можно также вывести из теоремы Л.С.Казарина [1].

Итак, если в группе G индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел, либо 8 и группа неразрешима, то $G/S(G) \simeq PSL(2,7)$. Разрешимые группы с такими индексами максимальных подгрупп исследуются в разделе 3.2. Для них доказана

3.2.9. Теорема. [18] *Пусть G — разрешимая группа, индекс каждой максимальной подгруппы которой есть простое число, либо квадрат простого числа, либо равен 8. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. В частности, $n(G) \leqslant 4$, а $l_2(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех нечетных p;

(2) группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7\}'$-холлову подгруппу.

Здесь $\mathfrak{N}_{2'}$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{U}$ — классы всех нильпотентных групп нечетного порядка, 2-групп и сверхразрешимых групп соответственно, а $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ — их произведение. Напомним, что произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ состоит из всех групп G, обладающих нормальной подгруппой $N \in \mathfrak{X}$ с факторгруппой $G/N \in \mathfrak{Y}$. Через $n(G)$ обозначается нильпотентная длина группы G.

Отметим, что включение $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ равносильно следующим двум условиям:

(1) сверхразрешимый корадикал группы G дисперсивен по Оре,

(2) подгруппа Фиттинга группы G содержит $2'$-холлову подгруппу сверхразрешимого корадикала группы G.

3.2.10. Следствие. *Пусть G — группа, индекс каждой максимальной подгруппы которой есть простое число, либо квадрат простого числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. В частности, $n(G) \leqslant 4$, а $l_2(G) \leqslant 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех нечетных p;

(2) группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу;

(3) если, кроме того, порядок группы G нечетен или не делится на 3, то группа G дисперсивна по Оре.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Казарин Л.С. О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14, № 6. — P. 1001–1066.
2. Каморников С.Ф. К теореме Ф.Холла. // Вопросы алгебры. — 1990. — Выпуск 5. — С.45–52.
3. Каморников С.Ф., Селькин М.В. О разрешимых подгруппах конечных групп // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. — 1994. — №2. — С. 53–57.
4. Каморников С.Ф., Селькин М.В. О влиянии максимальных подгрупп примарного индекса на строение конечной группы // Изв. высш. учеб. завед. Математика. — 1995. — №6. — С. 24–28.
5. Монахов В.С., Селькин М.В. О разрешимости нормальных подгрупп конечных групп // Матем. заметки. — 1992. — Т.51, №3. — С. 85–90.
6. Монахов В.С., Селькин М.В. О строении нормальных подгрупп конечных групп. // Вопросы алгебры. — 1993. — Выпуск 6. — С.96–100.
7. Поляков Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы: Сб. — Минск, 1966. — С.89–97.
8. Селькин М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. — Минск: Беларуская навука, 1997. — 144 с.
9. Супруненко Д.А. Группы матриц. — М.: Наука, 1972. — 351 с.
10. Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962. — 468 с.
11. Шеметков Л.А. О нормальном строении конечных групп // Докл. АН СССР. — 1966. — 167, №3. — С. 534–537.
12. Шеметков Л.А. О конечных разрешимых группах // Известия АН СССР, сер. матем. — 1968. — Т.32, №3. — С.533–559.
13. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 272 с.
14. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschr. — 1954. — Bd.60. — S.409–434.

15. Huppert B. Endliche Gruppen I. — Berlin, Heidelberg, New York, 1967. — 792 s.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

16. Монахов В.С., Грибовская Е.Е. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Математические заметки, — 2001. — Т.70. Выпуск 4. — С. 603-612.

17. Грибовская Е.Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. — 2001. — № 3(21). — С. 98-103.

18. Грибовская Е.Е. Конечные разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп, равными p, p^2 или 8 // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2001. — № 4. — С. 11-14.

19. Грибовская Е.Е., Монахов В.С. Конечные группы с индексами максимальных подгрупп, не делящимися на p^4 — Гомель, 2000. — 13 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет им. Ф.Скорины; № 91.)

20. Кричевцова (Грибовская) Е.Е. О субнормальных подгруппах с вполне факторизуемыми пересечениями // Новые компьютерные технологии в науке, технике, производстве и индустрии развлечений: Материалы республиканской научно-технической конференции студентов и аспирантов, 9-13 марта 1998г. / Гомель: ГГУ, 1998. — С. 18.

21. Грибовская Е.Е. Разрешимые группы с индексами максимальных подгрупп p, p^2 или 8 // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Часть 2, Минск. 19-24 июня 2000г. / Минск, 2000. — С. 31.

22. Грибовская Е.Е., Монахов В.С. Разрешимые группы с ограниченными индексами максимальных подгрупп // IV Международная алгебраическая конференция, посвящённая 60-летию профессора Ю.И.Мерзлякова (Тезисы докладов). Новосибирск, 7-11 августа 2000г. / Новосибирск: институт математики, 2000г. — С. 62-63.

23. Грибовская Е.Е. О ранге факторгруппы конечной разрешимой группы // Гашюцова теория классов групп и других алгебраических систем: Тезисы докладов Международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Вольфганга Гашюца, Гомель, 16-21 октября 2000г. / Гомель: ГГУ, 2000. — С. 31-32.

24. Грибовская Е.Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп с ограниченными индексами максимальных подгрупп // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Тезисы докладов IV республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 19 22 марта 2001г. / Гомель: ГГУ, 2001. — С. 94.

25. Грибовская Е.Е. Дисперсивность конечной группы с индексами максимальных подгрупп, свободными от кубов // Тезисы докладов третьей Международной алгебраической конференции в Украине, Сумы, 2 8 июля 2001 г. / Сумы: СумГПУ им. А.С.Макаренко, 2001. – С. 158.

26. Грибовская Е.Е., Монахов В.С. О нормальных подгруппах конечных разрешимых групп // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, проводимой в рамках Украинского математического конгресса, посвященного 200-летию М.В.Остроградского, Ужгород, 27 29 августа 2001 г. / Ужгород: 2001. — С. 32.

27. Грибовская Е.Е. О ранге факторгруппы по подгруппе Фраттини разрешимой группы с примарными индексами максимальных подгрупп // Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса: Тезисы докладов Международной научно технической конференции / Гомель: БелГУТ, 2001. — С. 295 296.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуются разрешимые группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. Получены следующие результаты:

— нормальная разрешимая подгруппа K группы G, у которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих K, простые числа, квадраты простых чисел или равны 8, принадлежит $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Кроме того, нильпотентная длина подгруппы K не выше 4, а $l_2(K) \leqslant 2$ и $l_p(K) \leqslant 1$ для всех нечетных простых p [17, 18, 21, 23, 27];

— нормальная разрешимая подгруппа K группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащих K, равными простым числам, квадратам простых чисел, либо кубам простых чисел, принадлежит произведению $\mathfrak{N}^2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Кроме того, нильпотентная длина подгруппы K не выше 5, а $l_p(K) \leqslant 2$ для всех простых p [16, 19, 22, 26];

— получена новая информация о подгруппах $\Phi_2(G)$ и $\Phi_3(G)$, введенных М.В.Селькиным. В частности, установлена их принадлежность произведению классических формаций, найдены оценки нильпотентной длины и p-длины этих подгрупп [17, 24].

РЭЗЮМЭ

Грыбоўская Яўгенія Яўгеньеўна

Індэксы максімальных падгруп у тэорыі класаў састаўных канечных груп

Ключавыя словы: канечная група, максімальная падгрупа, індэкс падгрупы, вырашальная група, дысперсіўная група, нильпатэнтная даўжыня, p-даўжыня.

У дысертацыі даследуюцца канечныя вырашальныя групы з абмежаванымі прымарнымі індэксамі максімальных падгруп. Вызначына будова нармальнай вырашальнай групы K канечнай групы пры ўмове, што максімальныя падгрупы, якія не ўтрымліваюць K, маюць індэксамі простыя лікі, квадраты простых лікаў або кубы простых лікаў. У прыватнасці, паказана прыналежнасць групы K здабытку класічных фармацый і атрыманы адзнакі яе нільпатэнтнай даўжыні і p-даўжыні.

Усе атрыманыя вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва універсітэтах і педагагічных ВНУ.

РЕЗЮМЕ

Грибовская Евгения Евгеньевна

Индексы максимальных подгрупп в теории классов составных конечных групп

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, индекс подгруппы, разрешимая группа, дисперсивная группа, нильпотентная длина, p-длина.

В диссертации исследуются конечные разрешимые группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. Установлено строение нормальной разрешимой подгруппы K конечной группы при условии, что максимальные подгруппы, не содержащие K, имеют индексами простые числа, квадраты простых чисел или кубы простых чисел. В частности, показана принадлежность подгруппы K произведению классических формаций, получены оценки её нильпотентной длины и p-длины.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп, а также при чтении спецкурсов в университетах и педвузах.

SUMMARY

Hrybouskaya Yauheniya Yauhenieuna

Indeces of maximal Subgroups
in the Theory Classes of the component finite Groups

Key words: finite group, maximal subgroup, index of subgroup, solvable group, group with Sylow tower, nilpotent length, p-length.

The finite groups with limited primary indeces of maximal subgroups are investigated in this dissertation. The structure of the normal solvable subgroup K of the finite group with indeces of maximal subgroups are either a prime or a prime's square or a cub of prime is established. In particular belonging the subgroup K to the product of the classical formations is shown. The bound of its nilpotent length and p-length was obtained.

All results of this dissertation are new. They have a theoretical significance and may be used in the investigations in theories of finite groups, and also while teaching special courses in universities and pedagogical institutions.