Матэматыка

УДК 512.544

Бесконечные локально конечные группы с локально нильпотентной недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп

Ф.Н. Лиман, Т.Д. Лукашова
Сумский государственный педагогический университет имени А.С. Макаренко

Σ -нормой группы G называют пересечение нормализаторов всех подгрупп G, входящих в некоторую непустую систему Σ и содержащую все подгруппы с некоторым теоретико-групповым свойством. Если Σ -норма совпадает с группой, то в последней нормальными будут все Σ -подгруппы. Исследованием групп, отличных от своих Σ -норм, впервые занялся Р. Бэр еще в 30-х годах прошлого века для системы Σ всех подгрупп группы. В настоящее время многими алгебраистами изучаются группы с различными свойствами Σ -норм для произвольных систем подгрупп Σ .

Авторы изучают группы с недедекиндовой Σ -нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп. В статье рассматриваются бесконечные локально конечные группы, в которых норма N_G^A является собственной недедекиндовой локально нильпотентной подгруппой. Установлено, что все такие группы черниковские и являются конечными расширениями квазициклической подгруппы. Детализация строения исследуемых групп указана для бесконечных локально нильпотентных групп (теорема 1), для локально конечных групп с бесконечной локально нильпотентной нормой N_G^A (теорема 2), для бесконечных локально конечных групп с конечной нильпотентной нормой N_G^A (теорема 3).

Ключевые слова: *локально конечная группа, локально нильпотентная группа, недедекиндова норма группы, абелева нециклическая подгруппа, норма абелевых нециклических подгрупп, p-подгруппа, p' -подгруппа.*

Infinite locally finite groups with locally nilpotent non-Dedekind norm of abelian non-cyclic subgroups

F.N. Lyman, T.D. Lukashova
Educational establishment «Sumy State Pedagogical Makarenkop University»

We shall call Σ -norm of group G the intersection of normalizers of all subgroups G, which are included into some non-empty system Σ , which contains all the subgroups with some group-theoretical property. If the Σ-norm coincides with the group G, then all the subgroups of Σ are invariant in G. R. Baer was the first, who began to study the groups which are distinct from the Σ-norms for system Σ of all subgroups of group in the 30-ies of the XX century. Nowadays many algebraists study groups with various properties of Σ-norms for any systems of subgroups.

Authors have been studying groups with non-Dedekind Σ-norm N_G^A of abelian non-cyclic subgroups. In this article infinite locally finite groups, in which the norm N_G^A is non-Dedekind locally nilpotent proper subgroup, are considered. It is proved, that such groups are finite extensions of quasicyclic subgroups. The specification of a structure of the investigated groups is given for infinite locally nilpotent groups (the Theorem 1), for locally finite groups with infinite locally nilpotent norm N_G^A (the Theorem 2), for infinite locally finite groups with finite nilpotent norm N_G^A (the Theorem 3).

Key words: *locally finite group, locally nilpotent group, non-Dedekind norm of group, abelian non-cyclic subgroup, norm of abelian non-cyclic subgroups, p-subgroup, p' -subgroup.*

В теории групп важное место занимают результаты, касающиеся изучения свойств характеристических подгрупп группы и их влияния на строение группы. В настоящее время список таких подгрупп может быть значительно расширен за счет различных Σ -норм группы.

Напомним, что Σ -нормой группы G называется пересечение $N(\Sigma)$ нормализаторов всех подгрупп группы, входящих в некоторую непустую систему Σ, содержащую все подгруппы группы с некоторым теоретико-групповым свойством. При этом любая Σ -норма группы G является ее характеристической подгруппой и содержит центр группы.

При изучении Σ -норм возникает ряд проблем, связанных с изучением свойств групп в зависимости от выбора системы Σ и ограничений, которые накладываются на эти нормы. Зная строение Σ -нормы и природу ее вложения в группу, во многих случаях удается охарактеризовать и свойства самой группы. В подавляющем большинстве исследований эта задача решалась при условии, что Σ -норма совпадает с группой. Впервые ситуацию, когда Σ -норма является собственной подгруппой группы, стал рассматривать Р. Бэр [1].

Авторы продолжают исследование групп с недедекиндовой Σ -нормой для системы Σ всех абелевых нециклических подгрупп группы. В работе [2] соответствующая Σ -норма была названа нормой абелевых нециклических подгрупп N_G^A. Если $N_G^A=G$, то в группе G нормальны все абелевы нециклические подгруппы. Периодические неабелевы группы с таким свойством были изучены в [3] при условии, что каждая из таких групп содержит хотя бы одну абелеву нециклическую подгруппу, и названы там $\overline{HA}$ -группами ($\overline{HA}_p$ -группами в случае p-групп).

Целью настоящей статьи является исследование бесконечных локально конечных групп, имеющих недедекиндову локально нильпотентную норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп. При этом в значительной степени будут использованы результаты, полученные авторами в работах [2; 4], где рассмотрены бесконечные локально конечные p-группы с недедекиндовой нормой N_G^A.

Лемма 1. *Пусть Σ – такая система подгрупп группы G, что для каждой Σ-подгруппы S подгруппа $S\times\langle x\rangle$, где $x\in G$, также является Σ-подгруппой. Если при этом группа G содержит Σ-подгруппу A, имеющую единичное пересечение с Σ-нормой группы G, то Σ-норма дедекиндова.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N(\Sigma)$ – Σ -норма группы G и A – такая Σ-подгруппа, что $A\cap N(\Sigma)=E$. Тогда для любого элемента $x\in N(\Sigma)$ получим $[A,\langle x\rangle]\subseteq A\cap N(\Sigma)=E$. По условию $\langle A,x\rangle=A\times\langle x\rangle$ также является Σ-подгруппой и потому нормализуется Σ-нормой. Но в таком случае

$$A\times\langle x\rangle\cap N(\Sigma)=\langle x\rangle\lhd N(\Sigma)$$

и норма $N(\Sigma)$ будет дедекиндовой. Лемма доказана.

В случае, когда Σ – система всех абелевых нециклических подгрупп группы G, получим следующий результат.

Следствие 1. *Если в группе G содержится такая абелева нециклическая подгруппа A, что $N_G^A\cap A=E$, где N_G^A – норма абелевых нециклических подгрупп группы G, то подгруппа N_G^A дедекиндова.*

Далее будем считать, что норма N_G^A является недедекиндовой локально нильпотентной подгруппой группы G. Если при этом $N_G^A=G$, то G является локально нильпотентной негамильтоновой $\overline{HA}$ -группой. Строение таких групп описывает следующее утверждение.

Утверждение 1 [3]. *Периодическая негамильтонова локально нильпотентная группа G тогда и только тогда является $\overline{HA}$ -группой, когда $G=G_p\times B$, где G_p – силовская p-подгруппа группы G, являющаяся негамильтоновой $\overline{HA}_p$ -группой, а B – конечная дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические.*

Пусть $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядков элементов группы G и $p\in\pi(G)$. Напомним, что *p'-подгруппой* группы G называют подгруппу, не содержащую p-элементов. Максимальную по включению p'-подгруппу группы G называют ее силовской p'-подгруппой (см., например, [5, с. 343]).

Лемма 2. *Если периодическая непримарная группа G имеет недедекиндову локально нильпотентную норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, силовская p-подгруппа $(N_G^A)_p$ которой недедекиндова, то все абелевы p'-подгруппы группы G циклические. Если при этом группа G локально конечна, то все ее силов-*

ские p'-подгруппы конечны, а силовские q-подгруппы ($q\in\pi(G)$, $q\neq p$) являются либо циклическими, либо конечными кватернионными 2-группами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку норма N_G^A является негамильтоновой локально нильпотентной $\overline{HA}$-группой, то ввиду утверждения 1

$$N_G^A=(N_G^A)_p\times B,$$

где $(N_G^A)_p$ – силовская p-подгруппа нормы, являющаяся негамильтоновой $\overline{HA}_p$-группой, а B – конечная дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические, $(|B|,p)=1$.

Пусть $G_{p'}$ – произвольная силовская p'-подгруппа группы G. Покажем, что все абелевы подгруппы группы $G_{p'}$ циклические. В самом деле, если A – абелева нециклическая p'-подгруппа, то для любого элемента $x\notin(N_G^A)_p$ подгруппа $\langle x,A\rangle$ будет N_G^A-допустимой, откуда

$$\langle x,A\rangle\cap(N_G^A)_p=\langle x\rangle\lhd(N_G^A)_p.$$

Но в таком случае $(N_G^A)_p$ – дедекиндова группа, что противоречит условию. Следовательно, все абелевы p'-подгруппы группы G циклические.

Пусть теперь G – локально конечная группа. Поскольку $G_{p'}$ не содержит бесконечных абелевых подгрупп, то в силу известного результата М.И. Каргаполова, Ф. Холла и Кулатилаки (см., например, [5, с. 499]) $G_{p'}$ является конечной группой, и по доказанному все ее абелевы подгруппы циклические. Из этого также следует, что все силовские q-подгруппы группы G ($q\in\pi(G)$, $q\neq p$) циклические для нечетных простых чисел, а силовская 2-подгруппа либо циклическая, либо конечная кватернионная 2-группа. Лемма доказана.

Отметим, что существуют периодические не локально конечные группы, у которых норма абелевых нециклических подгрупп локально нильпотентна. Простейший пример таких групп приведен ниже.

Пример 1. Пусть $G=G_p\times B$, где G_p – негамильтонова $\overline{HA}_p$- группа, B – бесконечная периодическая не локально конечная группа А.Ю. Ольшанского, все подгруппы которой имеют простой порядок (см. [6]) и $p\notin\pi(B)$.

В этой группе норма абелевых нециклических подгрупп локально нильпотентна и совпадает с G_p.

Лемма 3. *Периодическая группа G, имеющая недедекиндову локально нильпотентную норму N_G^A, удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G и ее норма абелевых нециклических подгрупп N_G^A удовлетворяют условиям леммы. Тогда N_G^A – недедекиндова локально нильпотентная $\overline{HA}$-группа. Из описания таких групп [3] следует, что N_G^A удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп и либо конечна, либо является конечным расширением квазициклической p-подгруппы.

Предположим, что G не удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Тогда она содержит абелеву подгруппу M, разложимую в прямое произведение бесконечного числа подгрупп простых порядков. Пусть $M_1=N_G^A\cap M$ – пересечение подгруппы M с нормой N_G^A. Тогда $M_1<\infty$ и $M = M_1\times\propto M_2$, где $M_1=\infty$ и $N_G^A\cap M_2=E$. В силу леммы 1 норма N_G^A должна быть дедекиндовой, что невозможно по условию. Следовательно, G – группа с условием минимальности для абелевых подгрупп, что и требовалось доказать.

Поскольку для локально конечных групп условие минимальности для абелевых подгрупп равносильно условию минимальности для всех подгрупп [7], то имеет место следствие 2.

Следствие 2. *Произвольная бесконечная локально конечная группа G, имеющая недедекиндову локально нильпотентную норму N_G^A, является группой Черникова.*

Следующая теорема характеризует строение бесконечных периодических локально нильпотентных групп, имеющих недедекиндову норму абелевых нециклических подгрупп.

Теорема 1. *Бесконечная периодическая локально нильпотентная группа G тогда и только тогда имеет недедекиндову норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, когда $G=G_p\times G_{p'}$, где G_p – бесконечная силовская*

p-подгруппа группы G с недедекиндовой нормой $N_{G_p}^A$ абелевых нециклических подгрупп (где $p\in\pi(G)$), а $G_{p'}$ – конечная циклическая или конечная гамильтонова p'-подгруппа, все абелевы подгруппы которой циклические, причем $N_G^A = N_{G_p}^A \times G_{p'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условий теоремы очевидна. Покажем их необходимость. Пусть норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп недедекиндова. Тогда из утверждения 1 получаем $N_G^A = (N_G^A)_p \times B$, где $(N_G^A)_p$ – силовская p-подгруппа группы N_G^A, являющаяся негамильтоновой $\overline{HA}_p$-группой, B – конечная дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические и $(p,|B|)=1$.

Как известно (предложение 1.4 [8]), периодическую локально нильпотентную группу можно представить в виде прямого произведения ее силовских подгрупп G_p и $G_{p'}$, т.е. $G = G_p \times G_{p'}$. Ввиду леммы 2 $G_{p'}$ – конечная группа, в которой все абелевы подгруппы циклические. Следовательно, $G_{p'}$ либо циклическая, либо является прямым произведением циклической группы нечетного (в том числе и единичного) порядка и конечной кватернионной 2-группы.

Пусть $2\in\pi(G_{p'})$. Покажем, что силовская 2-подгруппа G_2 группы G не содержит обобщенной группы кватернионов порядка 16. Допустим противное: пусть $G_2 \supseteq \langle h_1, h_2\rangle$, где $|h_1| = 8$, $|h_2| = 4$, $h_1^4 = h_2^2$, $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$. В таком случае подгруппа $H = \langle h_1^2, h_2\rangle$ нормализует каждую абелеву нециклическую подгруппу группы G, откуда $H \subset N_G^A$. Пусть M – произвольная абелева нециклическая подгруппа группы G_p. Тогда $\langle h_1h_2\rangle \times M$ будет N_G^A-допустимой подгруппой, а значит N_G^A-допустимой будет и подгруппа $\langle h_1h_2\rangle$. Следовательно, $H \subset N_G(\langle h_1h_2\rangle)$. С другой стороны, $[h_1h_2, h_2] = [h_1, h_2] = h_1^{-2} \notin \langle h_1h_2\rangle$, что невозможно. Таким образом, подгруппа G_2 либо циклическая, либо является группой кватернионов порядка 8.

Покажем, что $N_G^A = N_{G_p}^A \times G_{p'}$, где $N_{G_p}^A$ – норма абелевых нециклических подгрупп группы G_p. В самом деле, из условия $\left(N_G^A\right)_p \subseteq N_{G_p}^A$ следует, что норма $N_{G_p}^A$ группы G_p недедекиндова. Учитывая, что каждую абелеву нециклическую подгруппу группы G можно представить в виде $M_p \times \langle h\rangle$, где M_p – нециклическая p-подгруппа, $(|h|, p) = 1$, и $N_{G_p}^A$ нормализует все такие подгруппы, приходим к выводу, что $\left(N_G^A\right)_p = N_{G_p}^A$, откуда $N_G^A = N_{G_p}^A \times G_{p'}$. Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что в теореме 1 силовская p-подгруппа G_p группы G является бесконечной p-группой с недедекиндовой нормой $N_{G_p}^A$ абелевых нециклических подгрупп. Строение таких групп описывает следующее утверждение.

Утверждение 2 [2; 4]. *Все бесконечные локально конечные p-группы (p – простое число) с недедекиндовой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп исчерпываются группами следующих типов:*

1) *$G=(A\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle c\rangle$, где A – квазициклическая p-группа,* $|b|=|c|=p$, $[A,\langle c\rangle]=1$, $[b,c]=a_1\in A$, $|a_1|=p$; $N_G^A=G$;

2) *$G=A\times Q$, где A – квазициклическая 2-группа, Q – группа кватернионов порядка 8;* $N_G^A=G$;

3) *$G=A\langle b\rangle$, где A – квазициклическая 2-группа,* $|b|=4$, $b^2\in A$, $b^{-1}ab=a^{-1}$ *для любого элемента* $a\in A$; $N_G^A=G$;

4) *$G=A\langle b\rangle$, где A – квазициклическая 2-группа,* $|b|=8$, $b^4\in A$, $b^{-1}ab=a^{-1}$ *для любого элемента* $a\in A$; $N_G^A=G$;

5) *$G=(A\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle c\rangle\leftthreetimes\langle d\rangle$, где A – квазициклическая 2-группа,* $|b|=|c|=|d|=2$, $[A,\langle c\rangle]=1$, $[b,c]=[b,d]=[c,d]=a_1\in A$, $|a_1|=2$, $d^{-1}ad=a^{-1}$ *для любого элемента* $a\in A$; $N_G^A=(\langle a_2\rangle\times\langle b\rangle)\leftthreetimes\langle c\rangle$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$;

6) *$G=(A\langle y\rangle)Q$, где A – квазициклическая 2-группа,* $[A,Q]=1$, $Q=\langle q_1,q_2\rangle$, $|q_1|=4$, $q_1^2=q_2^2=[q_1,q_2]$, $|y|=4$, $y^2=a_1\in A$, $y^{-1}ay=a^{-1}$ *для любого элемента* $a\in A$, $[\langle y\rangle, Q]\subseteq\langle a_1\rangle\times\langle q_1^2\rangle$; $N_G^A=\langle a_2\rangle\times Q$, $a_2\in A$, $|a_2|=4$.

Следствие 3. *Произвольная локально конечная p-группа G, имеющая бесконечную недедекиндову норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп, является бесконечной негамильтоновой $\overline{HA}_p$-группой.*

Следствие 4. *Пусть G – бесконечная локально конечная группа, имеющая локально нильпотентную норму N_G^A с негамильтоновой силовской p-подгруппой $(N_G^A)_p$. Тогда G является конечным расширением квазициклической p-подгруппы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду следствия 2 G – группа Черникова и поэтому является конечным расширением полной абелевой подгруппы P. Так как по лемме 2 все силовские q-подгруппы групы G при $q \neq p$ либо циклические, либо кватернионные 2-группы, то P будет прямым произведением конечного числа квазициклических p-подгрупп.

Пусть $P \supseteq (A_1 \times A_2)$, где A_1 и A_2 – квазициклические p-подгруппы. Поскольку $N_G^A \lhd G_1 = (A_1 \times A_2) N_G^A$, то по теореме 1.16 [8] центр группы G_1 содержит такую полную абелеву подгруппу P_1, что $|P_1 \cap N_G^A| < \infty$ и $G_1 = P_1 N_G^A$. Значит, G_1 – конечная над центром локально нильпотентная $\overline{HA}$-группа. Из описания таких груп (утверждения 1 и 2) получаем, что $P = A$ – квазициклическая p-подгруппа, являющаяся максимальной полной подгруппой группы G.

Исследуем теперь строение бесконечных локально конечных не локально нильпотентных групп, у которых норма абелевых нециклических подгрупп является бесконечной локально нильпотентной подгруппой.

Теорема 2. *Пусть G – локально конечная не локально нильпотентная группа, имеющая бесконечную локально нильпотентную недедекиндовую норму N_G^A абелевых нециклических подгрупп. Тогда $G = G_p \leftthreetimes H$, где G_p – бесконечная $\overline{HA}_p$-группа, совпадающая с силовской p-подгруппой нормы N_G^A, H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические и $(|H|, p) = 1$. При этом каждый элемент $h \in H$, централизующий некоторую абелеву нециклическую подгруппу $M \subset N_G^A$, централизует норму N_G^A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G и ее норма N_G^A удовлетворяют условиям теоремы. Тогда ввиду утверждения 1 N_G^A является конечным расширением своей силовской p-подгруппы $(N_G^A)_p$.

Так как $(N_G^A)_p$ содержится в норме $N_{G_p}^A$ абелевых нециклических подгрупп произвольной силовской p-подгруппы G_p группы G, то G_p является локально конечной p-группой с бесконечной нормой абелевых нециклических подгрупп. Применяя к G_p следствие 3, получим

$$(N_G^A)_p = N_{G_p}^A = G_p,$$

т.е. G_p является нормальной в G бесконечной $\overline{HA}_p$-группой одного из типов 1)–4) утверждения 2. Учитывая, что по следствию 4 $|G : G_p| < \infty$ и применяя обобщенную теорему Шура (см., например, [8, с. 214]), приходим к выводу, что подгруппа G_p дополняема в G, $G = G_p \leftthreetimes H$. Ввиду леммы 2 подгруппа H конечна, все ее абелевы подгруппы циклические и $(|H|, p) = 1$.

Пусть теперь h – произвольный элемент подгруппы H, централизующий некоторую абелеву нециклическую подгруппу $M \subset N_G^A$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $M \subset G_p$. Тогда $(M \times \langle h \rangle)$ – N_G^A-допустимая подгруппа, а значит ее характеристическая подгруппа $\langle h \rangle$ также N_G^A-допустима. Учитывая строение нормы N_G^A, приходим к заключению, что $\langle h \rangle \subset C_G(N_G^A)$. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть G – бесконечная локально конечная группа, имеющая бесконечную локально нильпотентную недедекиндову норму N_G^A. Тогда G является конечным расширением нормы N_G^A абелевых нециклических подгрупп.*

Как показывает следующий пример, группа указанного в теореме 2 строения может иметь не локально нильпотентную норму абелевых нециклических подгрупп, поэтому условия теоремы 2 являются необходимыми, но не достаточными.

Пример 2. Пусть $G = ((A \times \langle b \rangle) \rtimes \langle c \rangle) \rtimes \langle h \rangle$, где A – квазициклическая 7-подгруппа,

$|b|=|c|=7$, $|a_1|=7$, $|h|=3$, $[A,<c>]=1$, $[b,c]=a_1\in A$, $[b,h]=b$, $[c,h]=c$, $[a,h]=a^3$ для каждого элемента $a\in A$.

Очевидно, что G является группой вида $G=G_7 \rtimes H$, где $G_7=(A\times<b>)\rtimes<c>$ – бесконечная $\overline{HA}_7$-группа и $H=\langle h\rangle$, но ее норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп не локально нильпотентна и совпадает с G.

С другой стороны, при некоторых ограничениях условия теоремы 2 могут стать достаточными. В частности, имеют место следующие два утверждения.

Следствие 6. *Пусть G – бесконечная локально конечная группа. Норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп тогда и только тогда является локально нильпотентной недедекиндовой группой с бесконечной силовской 2-подгруппой, когда $G=G_2\times H$, где G_2 – бесконечная $\overline{HA}_2$-группа, совпадающая с силовской 2-подгруппой нормы N_G^A, H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические, и $(|H|,2)=1$. При этом $N_G^A=G_2\times Z(H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. По теореме 2 $G=G_2\rtimes H$, где G_2 – бесконечная $\overline{HA}_2$-группа, совпадающая с силовской 2-подгруппой нормы N_G^A, а H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические, $(|H|,2)=1$. Учитывая утверждение 2, где описаны бесконечные $\overline{HA}_2$-группы, приходим к заключению, что G_2 – конечное расширение квазициклической 2-группы A.

Обозначим h – произвольный элемент группы H. Тогда из предложения 1.11 [8] следует, что $h\in C_G(A)$ и подгруппа $(\langle h\rangle\times A)$ является N_G^A-допустимой. Ввиду характеристичности в $(\langle h\rangle\times A)$, подгруппа $\langle h\rangle$ также N_G^A-допустима. Учитывая теперь условие $G_2\subseteq N_G^A$, делаем вывод, что $G=G_2\times H$.

Покажем, что $N_G^A=G_2\times Z(H)$. Пусть $h\in\left(H\cap N_G^A\right)$. По доказанному $\langle h\rangle$ – N_G^A-допустимая подгруппа. Учитывая локальную нильпотентность нормы N_G^A, характеристичность подгруппы $\langle h\rangle$ в ней и тот факт, что каждый элемент $h\in\left(H\cap N_G^A\right)$ нормализует подгруппу $A\times\langle y\rangle$ для всех $y\in H$, получим $[h,y]\subseteq\langle h\rangle\cap A\times\langle y\rangle=1$. Следовательно, $h\in Z(H)$ и $N_G^A=G_2\times Z(H)$.

Достаточность. Пусть G – группа указанного в теореме строения. Тогда все ее абелевы нециклические подгруппы можно представить в виде $M\times\langle t\rangle$, где $M\subseteq G_2$ – абелева нециклическая 2-группа, $\langle t\rangle\subseteq H$. Так как G_2 – бесконечная $\overline{HA}_2$-группа, то $G_2\subseteq N_G^A$ и учитывая утверждение 2 G_2 является конечным расширением квазициклической 2-группы A.

Пусть $h,y\in H\cap N_G^A$ и $(|h|,|y|)=1$. Тогда подгруппы $A\times\langle y\rangle$ и $A\times\langle h\rangle$ будут N_G^A-допустимыми как абелевы нециклические подгруппы. Ввиду характеристичности подгруппы $\langle h\rangle$ и $\langle y\rangle$ также будут N_G^A-допустимыми. Следовательно, $[h,y]\subseteq\langle h\rangle\cap\langle y\rangle=1$ и N_G^A – локально нильпотентная группа. Как и при доказательстве необходимости, нетрудно убедиться, что $N_G^A=G_2\times Z(H)$.

Следствие 7. *Пусть G – локально конечная группа с бесконечной недедекиндовой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп, причем $G=G_p\rtimes H$, где G_p – бесконечная $\overline{HA}_p$-груп-па, H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические, $(|H|,p)=1$. Если $Z(G)\cap G_p\neq E$, то норма N_G^A локально нильпотентна и $N_G^A=G_p\times Z(H)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по условию G_p – бесконечная $\overline{HA}_p$-группа, то из утверждения 2 следует, что G_p является конечным расширением квазициклической p-группы A. Если при этом p=2, то справедливость утверждения теоремы вытекает из следствия 6.

Пусть $p\neq2$. Тогда G_p – группа типа 1) утверждения 2. Так как $Z(G)\cap G_p\neq E$ и $Z(G_p)=A$, то элемент $a\in A$, где $|a|=p$ содержится в центре группы G. По утверждению 1.11 [8] $A\subseteq Z(G)$. Дальше остается повторить рассуждения, используемые при доказательстве следствия 6.

Обратим внимание, что подгруппа H, о которой идет речь в теореме 2 и ее следствиях, может быть ненильпотентной.

Пример 3. В группе

$$G=((A\times<b>)\leftthreetimes<c>)\times H,$$

где A – квазициклическая 5-подгруппа, $|b|=|c|=5$, $[A,<c>]=1$, $[b,c]=a_1\in A$, $|a_1|=5$, $H=\langle d\rangle\leftthreetimes h$, $|d|=3, |h|=4, h^{-1}dh=d^{-1}$, норма абелевых нециклических подгрупп $N_G^A=((A\times<b>)\leftthreetimes<c>)\times\langle h^2\rangle$, а H – ненильпотентная подгруппа.

Рассмотрим теперь бесконечные локально конечные не локально нильпотентные группы, в которых норма абелевых нециклических подгрупп является конечной нильпотентной недедекиндовой подгруппой.

Теорема 3. *Бесконечная локально конечная не локально нильпотентная группа* G *тогда и только тогда имеет конечную нильпотентную недедекиндову норму* N_G^A *абелевых нециклических подгрупп, когда* $G=H\leftthreetimes G_2$, *где* G_2 *– бесконечная 2-группа одного из типов 5)–6) утверждения 2, ее норма* $N_{G_2}^A$ *абелевых нециклических подгрупп конечна и совпадает с силовской 2-подгруппой нормы* N_G^A, H *– конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические,* $(|H|,2)=1$. *При этом любой элемент* $h\in H$, *принадлежащий централизатору некоторой абелевой нециклической подгруппы* $M\subset N_G^A$, *содержится в централизаторе нормы* N_G^A.

Доказательство. Так как норма N_G^A группы G недедекиндова и нильпотентна, то ввиду утверждения 1 $N_G^A=\left(N_G^A\right)_p\times B$, где $\left(N_G^A\right)_p$ – силовская p-подгруппа нормы, являющаяся негамильтоновой $\overline{HA}_p$-группой, B – конечная дедекиндова группа, все абелевы подгруппы которой циклические и $(|B|,p)=1$. Применяя к группе G следствие 4, приходим к выводу, что G – конечное расширение квазициклической p-подгруппы A.

Если $p\neq 2$, то A содержится в центре каждой силовской p-подгруппы G_p группы G. Тогда норма $N_{G_p}^A$ абелевых нециклических подгрупп группы G_p бесконечна и по теореме 2 $N_{G_p}^A=G_p$. Учитывая недедекиндовость подгруппы $\left(N_G^A\right)_p$ и утверждение 2, делаем вывод, что $G_p=A\cdot\left(N_G^A\right)_p$. Значит, $G_p\lhd G$ как произведение нормальных подгрупп. По обобщенной теореме Шура [8, с. 214], подгруппа G_p дополняема в G и $G=G_p\leftthreetimes H$, где H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические и $(|H|,p)=1$.

Если при этом все абелевы нециклические подгруппы группы G являются p-группами, то $G_p\subseteq N_G^A$, что противоречит конечности нормы N_G^A. Таким образом, G содержит непримарную абелеву нециклическую подгруппу $M=M_p\times M_q$, где M_p – абелева нециклическая p-группа, M_q – циклическая q-группа. Учитывая строение группы G_p, приходим к выводу, что $M_p\cap A\neq E$ Значит, $M_q\subseteq C_G(a_1)$, где $a_1\in A, |a_1|=p$. Ввиду предложения 1.11 [8] $M_q\subseteq C_G(A)$, откуда $A\subseteq N_G^A$, что противоречит конечности нормы N_G^A.

Пусть теперь $p=2$. Если квазициклическая 2-группа A содержится в центре силовской 2-подгруппы G_2, то учитывая условие $A\lhd G$ и предложение 1.11 [8] приходим к заключению, что $A\subseteq Z(G)$, что невозможно. Таким образом, $A\not\subseteq Z(G_2)$. Тогда $[G:C_G(A)]=2$ и $G=C_G(A)\langle x\rangle,\ x^2\in C_G(A)$. По доказанному выше $N_G^A\subseteq C_G(A)$. Из этого следует, что $C_G(A)$ – группа с бесконечной локально нильпотентной нормой абелевых нециклических подгрупп. Применяя к $C_G(A)$ следствие 6, получим $C_G(A)=C_2\times H$, где C_2 – бесконечная $\overline{HA}_2$-группа одного из типов 1)–4) утверждения 2, H – конечная группа с циклическими абелевыми подгруппами и $(|H|,2)=1$. Обратим внимание на то, что подгруппа H содержит все $2'$-элементы группы G и потому является силовской $2'$-подгруппой G. Ввиду характеристичности H в $C_G(A)$ получим $H\lhd G$. Учитывая теперь, что группа G счетна, имеет нормальную разрешимую локально нормальную силовскую $2'$-подгруппу H и применяя [5, с. 508], приходим к заключению, что H дополняема в G. Следовательно, $G = H \leftthreetimes G_2$, где G_2 – некоторая силовская 2-подгруппа группы G.

Поскольку силовская 2-подгруппа $\left(N_G^A\right)_2$ нормы N_G^A конечна, содержится в норме $N_{G_2}^A$ абелевых нециклических подгрупп группы G_2 и $A \not\subseteq Z(G_2)$, то $N_{G_2}^A$ – конечная негамильтонова $\overline{HA}_2$-группа, а G_2 – бесконечная локально конечная 2-группа с конечной недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп. Учитывая описание таких групп, G_2 – группа одного из типов 5)–6) утверждения 2. Доказательство последнего утверждения теоремы проводится так же, как это было сделано в теореме 2. Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем их достаточность. Пусть $G = H \leftthreetimes G_2$, где G_2 – бесконечная 2-группа одного из типов 5)–6) утверждения 2, норма $N_{G_2}^A$ абелевых нециклических подгрупп группы G_2 конечна и совпадает с силовской 2-подгруппой нормы N_G^A, H – конечная группа, все абелевы подгруппы которой циклические, $(|H|,2)=1$. В таком случае группа G является конечным расширением квазициклической 2-подгруппы A. Так как квазициклическая 2-группа не имеет автоморфизмов нечетного порядка, то $[A,H]=1$. Поэтому для любого элемента $h \in H$ подгруппа $\langle h,A\rangle = \langle h\rangle \times A$ будет N_G^A-допустимой, откуда ввиду характеристичности N_G^A-допустимой будет и подгруппа $\langle h\rangle$. Следовательно, для любых элементов $h,y \in \left(H \cap N_G^A\right)$, порядки которых взаимно простые, получим $[h,y] \subseteq \left(\langle h\rangle \cap \langle y\rangle\right) = 1$. Поэтому N_G^A – нильпотентная недедекиндова группа. Теорема доказана.

Существование бесконечных не локально нильпотентных групп, имеющих конечную нильпотентную недедекиндову норму абелевых нециклических подгрупп, подтверждает следующий пример.

Пример 4. Пусть $G = h \leftthreetimes A \times B \leftthreetimes c \leftthreetimes d$, где A – квазициклическая 2-группа, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A,<c>]=1$, $[b,c]=[b,d]=[c,d]=$
$= a_1 \in A$, $|a_1|=2$, $d^{-1}ad=a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$, $|h| = 3$, $d^{-1}hd = h^{-1}$, $[\langle A,b,c\rangle, \langle h\rangle] = 1$.

Группа G – бесконечная не локально нильпотентная, а ее норма $N_G^A = \langle a_2, b, c\rangle$, где $a_2 \in A$, $|a_2|=4$, – конечная нильпотентная группа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Baer, R. Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe / R. Baer // Comp. Math. – 1935. – 1. – S. 254–283.
2. Лукашова, Т.Д. Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p-груп ($p \neq 2$) / Т.Д. Лукашова // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. «Фіз.-мат. науки». – 2004. – № 3. – С. 35–39.
3. Лиман, Ф.Н. Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны / Ф.Н. Лиман // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наукова думка, 1971. – С. 65–96.
4. Лиман, Ф.М. Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп / Ф.М. Лиман, Т.Д. Лукашова // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. «Фіз.-мат. науки». – 2005. – № 1. – С. 56–64.
5. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
6. Ольшанский, А.Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков / А.Ю. Ольшанский // Изв. АН СССР. Сер. «Математика». – 1980. – 44, № 2. – С. 309–321.
7. Шунков, В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп / В.П. Шунков // Алгебра и логика. – 1970. – 9. – С. 579–615.
8. Черников, С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп / С.Н. Черников. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Поступила в редакцию 10.07.2012. Принята в печать 14.12.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: mathematicsspu@mail.ru – Лиман Ф.Н.