МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ШКОЛЬНЫХ КУРСАХ ФИЗИКИ, ХИМИИ, БИОЛОГИИ

Гелясин Александр Евгеньевич,
проректор по учебной работе Витебского областного института развития образования, кандидат физико-математических наук

Гелясина Елена Владимировна,
заведующий кафедрой психологии, педагогики и частных методик Витебского областного института развития образования, кандидат педагогических наук, доцент

СТАТЬЯ ПОСВЯЩЕНА РАССМОТРЕНИЮ ВОПРОСА ФОРМИРОВАНИЯ У ОБУЧАЮЩИХСЯ УМЕНИЯ МОДЕЛИРОВАТЬ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ШКОЛЬНОГО СОДЕРЖАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН. ЦЕНТРАЛЬНЫМ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫМ КОМПОНЕНТОМ ОПРЕДЕЛЕНА МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРЕДЛОЖЕНО ОСУЩЕСТВЛЯТЬ НА МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОМ МАТЕРИАЛЕ. ПРИВЕДЁН ВАРИАНТ СОДЕРЖАНИЯ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ, НА КОТОРЫХ ИЗУЧАЕТСЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛОТКИ — ВОЛЬТЕРРЫ. ПОКАЗАНО, КАК ПУТЁМ ПРИВЕДЕНИЯ ЕЁ УРАВНЕНИЙ К СТАНДАРТНОМУ УРАВНЕНИЮ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ОБЪЯСНИТЬ РЯД БИОЛОГИЧЕСКИХ И ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.

• естественнонаучное образование школьников • метапредметный подход • межпредметная интеграция • математическая модель • колебательные процесс

Теория колебаний сегодня — это широкая всеобъемлющая наука об эволюционных процессах в природе, технике и обществе, в механике, физике, астрономии, химии, биологии, экономике… и во всём, что нас окружает, и в нас самих…

Ю.И. Неймарк

Моделирование, как показано в исследованиях В.В. Давыдова [5], Б.Д. Эльконина, А.Б. Воронцова, Е.В. Чудиновой [11], является основным действием, осваиваемым при обучении на второй ступени общего среднего образования. Модели, созданные как математический аналог исследуемого объекта, получили название математических. Благодаря замене реального объекта соответствующей ему математической моделью появляется возможность более детально, чётко и аналитично дать описание исследуемому объекту. Следует отметить, что с помощью математических моделей, как правило, можно описать не единичный объект, а целый класс объектов, в которых предметом описания выступает предельно общая закономерность, лежащая в основе их функционирования.

Метод математического моделирования — это фактически метод математического познания изучаемых реальных объектов. Этот метод зародился в физике, но постепенно стал использоваться в химии, биологии, географии и гуманитарных науках. Вместе с тем важно понимать, что математическое моделирование не подменяет собой физику, биологию, химию и другие области наук. Оно интегрируется в их методологический аппарат, выступая как мощнейший инструмент познания.

В качестве конкретного примера рассмотрим колебательные процессы, происходящие в физических, биологических и химических системах. По нашему мнению, эти процессы целесообразно изучать с единых метапредметных позиций, используя математическую модель линейного гармонического осциллятора.

Общеизвестно, что тему «Колебания и волны» школьники изучают в процессе освоения курса физики. Вместе с тем «предметный диапазон» изучения колебательных явлений может быть расширен. Следуя Ю.И. Неймарку, теория колебаний на современном этапе развития науки приобретает статус всеобъемлющей науки [7]. Это обусловлено тем, что теория колебаний раскрывает суть всех без исключения эволюционных процессов вне зависимости от того, где они протекают (в природе, технике, обществе), и предметом рассмотрения какой науки являются (физики, астрономии, химии, биологии, экономики). Из данного утверждения следует, что при помощи одной и той же математической модели можно описать движение грузика на пружинке, колебание математического и физического маятников, изменение заряда и тока в электрическом контуре, а также эволюцию во времени многих систем физической, биологической, химической и даже социальной природы.

Рассмотрим учебное содержание, раскрывающее особенности математической модели линейного гармонического осциллятора. Любая система, способная совершать колебательное движение, описывается некоторой величиной. Её отклонение от равновесного значения зависит от времени и подчиняется при этом периодическому (или почти периодическому) закону. Традиционно периодическая функция определяется следующим образом: функция $f(t)$ называется периодической, с периодом T, если $f(t + T) = f(t)$ при любом значении t. То есть в физике колебаний процесс рассматривается за некоторое время и охватывает определённое число периодов.

Математическим аппаратом, описывающим задачи теории колебаний, является теория обыкновенных дифференциальных уравнений [1; 8]. Если поставленную задачу удаётся свести к дифференциальному уравнению, методы решения которого стандартны, то такую задачу можно считать решённой. В случае, когда в колеблющейся системе энергия не рассеивается, дифференциальное уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1),$$

где x — переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.),
ω_0 — собственная частота колебаний,
t — время.

Точками сверху принято обозначать производные $x(t)$ по времени $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$.

Уравнение **(1)** называется уравнением стандартного вида. Оно является основным при изучении колебательных процессов в курсе физики средней школы. Поэтому задача учителя физики — научить учащихся составлять данное уравнение для разных физических систем, поскольку оно имеет стандартное решение, представляющее собой функцию:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где $x(t)$ — отклонение тела от положения равновесия в момент времени t;
A — амплитуда колебания, то есть максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия;
ω_0 — круговая (циклическая) частота;
$\omega_0 t + \varphi$ — фаза колебания в момент времени t;
φ — начальная фаза колебания.

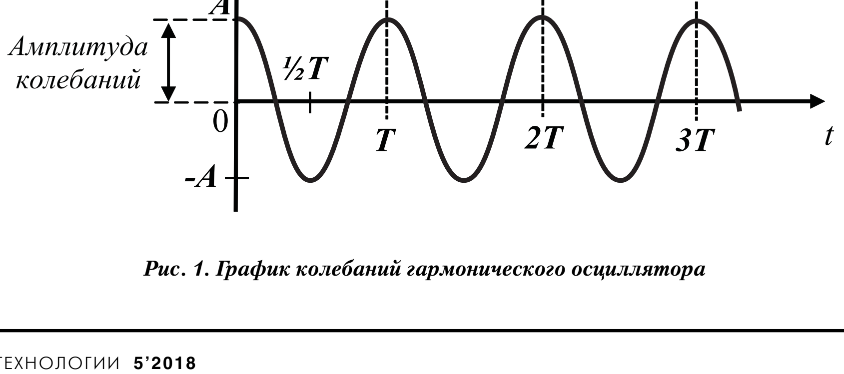

Рис. 1. График колебаний гармонического осциллятора

Круговая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, откуда период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Поскольку задачи на колебания любых по своей природе систем сводятся к расчёту периода (циклической частоты) колебаний изучаемой системы, основной целью процесса решения является получение уравнения **(1)**.

Для демонстрации обучающимся особенностей приложения теории колебаний к биологическим и химическим объектам нами разработано содержание двух факультативных занятий: «Колебания в системе „хищник — жертва“ — „экологический осциллятор“» и «Колебания в ходе химических реакций — „химический осциллятор“». Естественно, что разработка и проведение данных занятий требуют интеграционного взаимодействия учителей физики, химии и биологии.

На первом занятии у учащихся формируются представления о том, что методы теории колебаний, разработанные в физике, применимы к описанию периодических процессов и в биологии. В качестве биологического «примера» мы рассматриваем колебания в популяционной модели «хищник — жертва» — так называемом «экологическом осцилляторе». Объектом изучения на занятии является простейшая из моделей, широко применяемая в биологии — математическая модель Лотки — Вольтерры. Данная модель является моделью отбора на основе конкурентных отношений, или, другими словами, математическим описанием дарвинского принципа борьбы за существование.

Раскрывая её сущность, мы даём краткую историческую справку о её разработке и создателях. Отмечаем, что впервые данная модель была получена А. Лоткой в 1925 году [12]. Чуть позже аналогичные (но более сложные) модели были разработаны итальянским математиком Вито Вольтеррой [4]. Модель достаточно широко освещена в литературе [3; 9], однако остаётся недоступной для понимания учащимися школы в силу недостаточного знания ими теории математического анализа. Нашей задачей будет сведение уравнений данной модели к стандартному уравнению гармонического осциллятора, т.е. её адаптации для учащихся, изучивших тему «колебания» в школьном курсе физики.

Рассмотрим основные положения самого простого варианта модели Лотки — Вольтерры. В её основе лежит математическое описание взаимодействия между двумя системами, одна из которых черпает необходимую ей для развития энергию, вещество или другие компоненты из другой. По сути дела, такой постулат является аналогом закона сохранения и изменения энергии в биологической системе. В данной модели считается, что обе популяции (хищники и жертвы) живут на ограниченной территории и не взаимодействуют с любыми другими популяциями, также отсутствуют и другие факторы, способные повлиять на численность популяций. Среда обитания стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть жертвой. Другой вид — хищник — также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Это могут быть караси и щуки, зайцы и волки, мыши и лисы, амёбы и бактерии и т.д. При этом можно сделать следующие предположения. Поскольку пищевые ресурсы жертвы не ограничены, в отсутствие хищника популяция жертвы возрастает по экспоненциальному закону (закон Мальтуса). Хищники, отделённые от своих жертв, умирают с голоду также по экспоненциальному закону. Как только хищники и жертвы начинают обитать в непосредственной близости друг от друга, изменения численности их популяций становятся взаимосвязанными. В этом случае, очевидно, относительный прирост численности жертв будет зависеть от размеров популяции хищников и наоборот. Численности популяций жертв и хищников зависят только от времени. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными. Сразу отметим, что ситуация, описываемая моделью Лотки — Вольтерры — это ситуация очень упрощённая и крайне идеализированная. Здесь важно понять, что математическая модель вовсе не обязана детально описывать изучаемый объект, а может и должна отражать лишь самое важное для изучения данного вопроса. В рассматриваемом нами простейшем случае, когда имеется одна популяция хищников и одна жертв, математическая модель такой системы будет состоять из двух дифференциальных уравнений, описывающих динамику популяций хищников и жертв. Пусть x — количество жертв, а y — количество особей в популяции хищников. Тогда скорость изменения (увеличения) количества хищников пропорциональна количеству жертв, а скорость изменения (убывания) количества жертв пропорциональна количеству хищников. Математически эти рассуждения можно описать системой дифференциальных уравнений для изменений численности жертв *(x)* и хищников *(y)*: $\dot{y} = ax$ и $\dot{x} = -by$ (знак «минус» означает убывание). Коэффициенты (a и b), отражающие взаимодействия между видами, являются только положительными. Дифференцируя данные уравнения по времени (поскольку в модели численности популяций жертв и хищников зависят только от времени), получим:

$$\ddot{y} = a\dot{x} = -aby \text{ или } \ddot{y} + aby = 0.$$

Если ввести обозначение $\omega^2 = ab$, то мы получим стандартное уравнение консервативного осциллятора, которое уже рассматривалось выше: $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. Следовательно, система уравнений будет иметь такое же решение, как и физические школьные задачи о колебаниях (пружинный и математический маятники, электромагнитный колебательный контур), и полученное уравнение описывает колебательный процесс с периодом T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$$

Другими словами, в рамках данной модели изменение численности популяций жертв и хищников носит периодический характер. Конкретные значения параметров a и b, отражающие взаимодействия между видами, могут быть определены путём многолетних наблюдений за популяциями. Таким образом, в рамках модели Лотки — Вольтерры изменения численности жертвы и хищника во времени представляют собой колебания — «консервативный экологический осциллятор» с периодом T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}.$$

Причём колебания численности хищника отстают по фазе от колебаний жертв — максимальному значению y соответствует среднее значение x и наоборот (рис. 2.). Амплитуда колебаний и их период определяются начальными значениями численностей популяций.

Согласно полученным результатам в рамках данной модели не будет существовать стабильной численности популяций и численности хищника, и жертвы будут совершать циклические колебания. В каждом цикле, как только увеличивается популяция жертвы, начинает расти и популяция хищника. Она превышает численность жертвы, потребляет кормовой ресурс больше нормы для поддержания своей стабильности, отчего размер популяции жертвы снижается. Теперь численность хищника следует за убыванием численности жертвы до тех пор, пока уровень численности хищника не станет таким низким, что популяция жертвы начинает вновь возрастать. Если считать условия окружающей среды постоянными, тогда интенсивность, или амплитуда циклов — разница между максимумом и минимумом численности — будет определяться только начальной численностью и останется неизменной.

В процессе освоения обучающимися изложенного выше содержания необходимо обратить их внимание на то, что модель Лотки — Вольтерры не может отражать все стороны взаимодействия в системе «хищник — жертва» и в природе колебания численностей имеют более сложный характер.

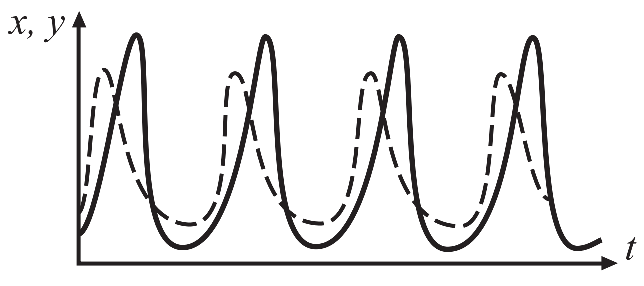

Рис. 2. Зависимость численности жертвы и хищника от времени в модели Лотки — Вольтерры

Однако, несмотря на упрощения, в модели фиксируются представления о принципиально колебательном характере динамики системы «хищник — жертва», что позволяет прогнозировать динамику экологических систем. Названное обстоятельство обусловливает широкое практическое использование рассмотренной модели в экологии.

Второе факультативное занятие посвящено теме «Колебания в ходе химических реакций — „химический осциллятор“». В процессе введения учащихся в тему мы сообщаем о том, что об осцилляциях в ходе химических реакций известно достаточно давно, однако данные реакции не привлекали особого внимания химиков. Это было связано с тем, что химическая кинетика как наука начала оформляться лишь в 70–80-х годах XIX века. В 1925 году А. Лотка предложил теоретическую модель системы с двумя последовательными автокаталитическими реакциями, в которой химические колебания могли быть незатухающими. Поскольку первые математические модели описывали ненаблюдаемые (в то время) химические реакции, модель Лотки — Вольтерры была не востребована химиками. Она нашла своё применение лишь для описания и объяснения колебаний численности сосуществующих видов животных в системе «хищник — жертва», о чём говорилось на первом из представленных в статье факультативном занятии.

Считаем целесообразным раскрытие основной темы занятия «Колебания в ходе химических реакций…» вести в историческом ракурсе. Для этого сообщаем учащимся, что в середине прошлого столетия советский химик Борис Павлович Белоусов проводил исследования цикла Кребса (цикл Кребса — система ключевых биохимических превращений карбоновых кислот в клетке), пытаясь найти его неорганический аналог. В результате одного из экспериментов в 1951 году, а именно окисления лимонной кислоты броматом калия в кислой среде в присутствии катализатора — ионов церия (**Ce^{+3}**), он обнаружил в процессе реакции колебания. Течение реакции менялось со временем, что проявлялось периодическим изменением цвета раствора. Эффект стал ещё более заметен в присутствии индикатора pH (ферроина). Данная реакция оказалась очень удобной для лабораторных исследований. Колебания можно было легко наблюдать визуально, а их период находился в пределах 10–100 с. Белоусов провёл достаточно подробное исследование этой реакции и выяснил, в частности, что период колебаний существенно уменьшается с повышением кислотности среды и температуры [2].

Позже группа исследователей под руководством А.М. Жаботинского провела подробные исследования реакции Белоусова, включая её различные варианты. Следует подчеркнуть, что работа проходила в режиме постоянных консультаций с физиками и математиками, хорошо знакомыми с теорией колебаний и её применением к различным колебательным (в том числе и химическим) системам. Такое сотрудничество помогло создать первую математическую модель реакции [6], и сегодня она известна во всём мире как «реакция Белоусова — Жаботинского». Реакция Белоусова — Жаботинского — это класс химических реакций, протекающих в колебательном режиме, при котором некоторые параметры реакции изменяются периодически, образуя сложную пространственно-временную структуру реакционной среды. Реакция Белоусова — Жаботинского стала одной из самых известных в науке химических реакций, её исследованиями занимается множество учёных различных научных дисциплин и направлений во всём мире.

На факультативном занятии предлагаем ученикам рассмотреть реакцию Белоусова — Жаботинского:– окисление малоновой кислоты броматом калия в присутствии катализатора — ионов церия в кислой среде. Эту и аналогичные ей реакции можно провести в школьной лаборатории. Методика их проведения подробно описана в многочисленной литературе. Кроме того, на канале «YouTube» размещены видеоролики, демонстрирующие порядок её проведения в лаборатории.

Полный механизм реакции Белоусова — Жаботинского очень сложен и насчитывает более 80 реакций и 20 химических соединений, принимающих в них участие. Однако колебания концентраций с течением времени, которые можно наблюдать визуально, по изменению окраски либо потенциометрически, по изменению ЭДС гальванического элемента, происходят за счёт превращения Ce^{3+} в Ce^{4+}. Поэтому мы будем рассматривать только взаимопревращения ионов церия.

В упрощённой схеме реакция Белоусова состоит из двух фаз. В первой фазе трёхвалентный церий Ce^{3+}, определяющий розовый цвет раствора, окисляется бромноватой кислотой — $HBrO_3$ ($Ce^{3+} \xrightarrow{HBrO_3} Ce^{4+}$), что приводит к избытку ионов Ce^{4+} (голубой цвет раствора). Во второй фазе четырёхвалентный церий Ce^{4+} восстанавливается органическим соединением — малоновой кислотой ($Ce^{4+} \xrightarrow{МК} Ce^{3+}$), и голубой цвет сменяется розовым. После чего опять происходит смена фаз, и раствор приобретает голубую окраску. Процесс смены цвета происходит с периодичностью, равной примерно 1 минуте. Периодический процесс прекращается после большого числа периодов из-за необратимого расходования бромата — BrO_3^-.

Первая модель реакции Белоусова — Жаботинского была получена в 1967 году А.М. Жаботинским и М.Д. Корзухиным на основе подбора эмпирических соотношений, правильно описывающих колебания в системе консервативной модели Лотки — Вольтерры [6]. Оказалось, что одна из простейших химических схем, описывающих колебания в системе двух последовательных автокаталитических реакций, математически тождественна уравнениям, которые Лотка и Вольтерра использовали для описания экологических процессов, и была известна как задача о «хищниках и жертвах». Химическим аналогом системы «хищник — жертва» и является колебательная реакция, в которой происходит периодическое изменение концентраций промежуточных компонентов. Применительно к химическим колебаниям, протекающим в гомогенной (однородной) среде, кинетическая схема модели Лотки — Вольтерры имеет вид: $A \to X \leftrightarrow Y \to B$. Данная схема определяет следующую гипотетическую реакцию. Пусть в некотором объёме находится вещество A, расход которого в процессе реакции почти незаметен, т.е. A находится в избытке. В процессе реакции происходит превращение молекул вещества A в молекулы вещества X. Эта реакция нулевого порядка протекает с постоянной скоростью k_0 (порядок реакции — это величина, равная сумме показателей степеней, с которыми концентрации реагентов входят в выражение для скорости реакции). Далее вещество X превращается в вещество Y, при этом скорость превращения k_1 прямо пропорциональна концентрации молекул вещества Y, которые со скоростью k_2 обратно превращаются в вещество X (это обстоятельство в кинетической схеме отмечено стрелкой $\leftrightarrow$). Данные реакции являются реакциями второго порядка. Наконец, молекулы вещества Y необратимо распадаются, образуя вещество B (k_3, реакция первого порядка). В данной схеме, основанной на принципах химической кинетики, скорость убыли количества вещества X и скорость прибыли количества вещества Y считаются пропорциональными их произведению. При таких допущениях математическую модель Лотки — Вольтерры можно распространить на химическую систему и представить в виде, который соответствует уравнению гармонического осциллятора:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

где $\omega^2 = k_1 k_3[A][B] > 0$

Стандартное решение данного уравнения показывает, что система совершает во времени незатухающие колебания по X и Y с частотой, что соответствует постоянному периоду колебаний T:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 k_3[A][B]}}$$

Положения максимума и минимума на кинетической кривой (рис. 3) будут отличаться по времени на величину, равную Δt:

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{k_1 k_3[A][B]}}$$

Следовательно, механизм реакции, идущей по приведённой выше кинематической схеме, приводит (как и в случае «экологического

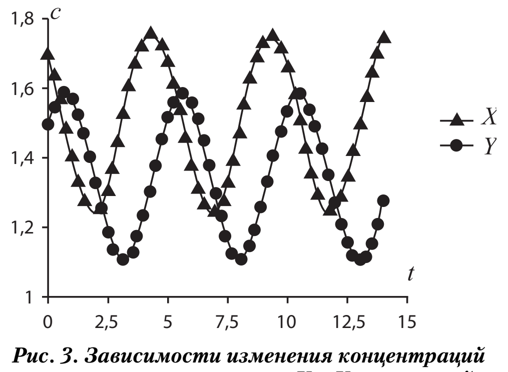

Рис. 3. Зависимости изменения концентраций промежуточных веществ X и Y химической реакции от времени в модели Лотки — Вольтерры

осциллятора») к незатухающим колебаниям, амплитуда и частота которых зависят только от начальных условий.

Таким образом, используя математическую модель линейного гармонического осциллятора, можно с единых позиций осуществить изучение колебательных процессов в физических, химических и биологических системах и сформировать у школьников представления об общности процессов, протекающих в природе. ❑

Литература

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1975. — 239 с.
2. *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и её механизм / Б.П. Белоусов // Химия и жизнь. — 1982. — № 7. — С. 65–68.
3. *Бигон М.* Экология. Особи, популяции и сообщества: в 2 т. / М. Бигон, Дж. Харпер, К. Таунсенд — М.: Мир, 1989. — Т. 1. — 667 с.
4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В.Вольтерра. — М.: Наука, 1976. — 288 с.
5. *Давыдов В.В.* Учебная деятельность и моделирование / В.В. Давыдов, А.У. Варданян. — Ереван: Луйс, 1981. — 220 с.
6. *Жаботинский А.М.* Концентрационные колебания / А.М. Жаботинский. — М.: Наука, 1974. — 179 с.
7. *Неймарк Ю.И.* Математические модели в естествознании и технике: Учебник. — Н.Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2004. — 401 с.
8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.
9. *Ризниченко Г.Ю.* Математические модели в биофизике и экологии / Г.Ю. Ризниченко. — Москва — Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. — 184 с.
10. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. — СПб.: Изд-во «Лань», 2005. — 440 с.
11. *Эльконин Б.Д.* Подростковый этап школьного образования в системе Эльконина — Давыдова / Б.Д. Эльконин, А.Б. Воронцов, Е.В. Чудинова // Вопросы образования. — 2004. — № 3. — С. 118–142.
12. *Lotka A.* Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. A. Lotka. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.math.wm.edu/~shij/math345/Lotka-1920-PNAS.pdf. (Дата обращения: 17.06.2016).

References

1. *Arnol'd V.I.* Obyknovennye differencial'nye uravneniya / V.I. Arnol'd. — M.: Nauka, 1975. — 239 s.
2. *Belousov B.P.* Periodicheski dejstvuyushchaya reakciya i eyo mekhanizm / B.P. Belousov // Himiya i zhizn'. — 1982. — № 7. — S. 65–68.
3. *Bigon M.* Ehkologiya. Osobi, populyacii i soobshchestva: v 2 t. / M. Bigon, Dzh. Harper, K. Taunsend — M.: Mir, 1989. — T. 1. — 667 s.
4. *Vol'terra V.* Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie / V. Vol'terra. — M.: Nauka, 1976. — 288 s.
5. *Davydov V.V.* Uchebnaya deyatel'nost' i modelirovanie / V.V. Davydov, A.U. Vardanyan. — Erevan: Lujs, 1981. — 220 s.
6. *Zhabotinskij A.M.* Koncentracionnye kolebaniya / A.M. ZHabotinskij. — M.: Nauka, 1974. — 179 s.
7. *Nejmark Yu.I.* Matematicheskie modeli v estestvoznanii i tekhnike: Uchebnik. — N Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2004. — 401 s.
8. *Petrovskij I.G.* Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij / I.G. Petrovskij. — M.: Izd-vo MGU, 1984. — 296 s.
9. *Riznichenko G.YU.* Matematicheskie modeli v biofizike i ehkologii / G.YU. Riznichenko. — Moskva — Izhevsk: In-t komp'yuternyh issledovanij, 2003. — 184 s.
10. *Strelkov S.P.* Vvedenie v teoriyu kolebanij / S.P. Strelkov. — SPb.: Izd-vo «Lan'», 2005. — 440 s.
11. *El'konin B.D.* Podrostkovyj ehtap shkol'nogo obrazovaniya v sisteme El'konina — Davydova / B.D. EHl'konin, A.B. Voroncov, E.V. CHudinova // Voprosy obrazovaniya. — 2004. — № 3. — S. 118–142.
12. *Lotka A.* Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. A. Lotka. [Elektronnyj resurs]. — Rezhim dostupa: http://www.math.wm.edu/~shij/math345/Lotka-1920-PNAS.pdf. (Data obrashcheniya: 17.06.2016).