(общ. ред.) [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 202–203. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/40756 (дата обращения: 26.01.2024).
4. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учебник / А.Г. Курош. – 19-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 432 с.
5. Gelfand, I.M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I.M. Gelfand, M.M Kapranov, A.V. Zelevinsky. – Boston: Birkhäuser, 1994. – 528 p.
6. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [1]. Естественно возникает проблема существования и единственности решения такой задачи в пространстве суммируемых функций. Цель данного исследования – сформулировать условия существования и единственности решения дифференциальной задачи.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, являющиеся модификациями классических операций дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля [2]. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Ранее нами рассматривались дифференциальные задачи с дробными производными Адамара в иной постановке [1], [3], [4]. Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка состоит в отыскании функции $y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющей уравнению

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = p(x)y(x) + g(x),\ \alpha > 0 \tag{1}$$

и начальным условиям

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k \in R,\ k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]. \tag{2}$$

Левую часть в начальных условиях (2) следует рассматривать как предел в правосторонней окрестности $(a, a+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$ точки a:

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = \lim_{x\to a+}\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{\alpha-k} y\right)(x),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n} y\right)(a+) = \lim_{x\to a+}\left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x),\ \alpha \neq n,$$
$$\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{0} y\right)(a+) = \lim_{x\to a+} y(x),\ \alpha = n.$$

Здесь $\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \delta^n\left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x),\quad \delta = x\dfrac{d}{dx},\ n = [\alpha]+1,$ что можно понимать и так

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \delta^n\left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x) = \delta^n\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n} g\right)(x),$$

где конструкция

$$\left(\Im^{\alpha}_{a+}g\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{g(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0\le a<x$$

является дробным интегралом Адамара, а $\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x)$ – дробная производная Адамара.

Задача (1)–(2) рассматривается в пространстве регулярных функций

$$L^{\alpha}_{\delta}(a,b)=\left\{y\in L(a,b)\,\middle|\, D^{\alpha}_{a+}y\in L(a,b)\right\},\ 0<a<b<+\infty\,, \tag{3}$$

где

$$L(a,b)=\left\{z(t)\,\middle|\,\int\limits_a^b |z(t)|\,dt<+\infty\right\},\ \ \|z_1-z_2\|_{L(a,b)}=\int\limits_a^b |z_1(t)-z_2(t)|\,dt\,.$$

Обращаясь к теореме 2 в [5], дополнив её условия требованиями: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\ \ y_1,y_2\in R$, постоянная L не зависит от переменного x – получаем утверждение, дающее ключ к решению вопроса существования и единственности решения задачи (1)–(2).

Теорема. Пусть $\alpha>0, n=-[-\alpha], g(x)\in L(a,b)$, причём $0<a<b<+\infty$. Если к тому же функция $p(x)$ является ограниченной на отрезке $[a,b]$, то задача (1)–(2) имеет единственное решение в пространстве (3).

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе приводится утверждение о корректной постановке дифференциальной задачи для дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71–72. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26880 (дата обращения: 24.01.2023).

2. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Шлапаков, С.А. О разрешимости задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2022. С. 52-53. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/31567 (дата обращения: 24.01.2023).

4. Шлапаков С.А., Скоромник О.В. Об одной дифференциальной задаче с дробными производными Адамара / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука - образованию, производству, экономике: Материалы 75 Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 03 марта 2023 г. / Витебский гос. ун-т; редкол.: Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2023. – с. 66-68.

5. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для уравнения с дробной производной Адамара / О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта –2023.– №3, С. 10-14.