накоплению экранирующих зарядов в плоскости стенки, что предположительно приводит к ее повышенной электропроводности. Кроме того, теоретические расчеты также указывают на роль неоднородных упругих деформаций, существующих у стенки.

Заключение. В представленном случае слоистых кристаллов TGS − TGS+Cr наиболее естественно рост проводимости в примесных слоях с Cr^{3+} объяснить за счет сквозной электронной проводимости и повышенной плотности доменных стенок. Установлено также, что диэлектрическая проницаемость в примесных областях поверхности падает примерно в 4−6 раз по сравнению с номинально чистыми участками полосчатых кристаллов.

1. Salje, E.K.H. Multiferroic Domain Boundaries as Active Memory Devices: Trajectories Towards Domain Boundary Engineering/ E.K.H. Salje// ChemPhysChem. – 2010. – Vol. 11. – P. 940–950.
2. Шут, В.Н. Выращивание сегнетоэлектрических монокристаллов ТГС с послойно-периодическим изменением состава / В.Н. Шут, И.Ф. Кашевич // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Регион. науч.-практ. конф. преподав., науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2021. – С. 73–75.
3. Толстихина, А.Л. Особенности формирования доменных границ в сегнетоэлектрических послойно легированных кристаллах TGS-TGS+Cr / А.Л. Толстихина, Б.С. Рощин, И.Ф. Кашевич [и др.] // Наука - образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2022. – С. 46–48.
4. Prashant, R. Review of Domain Modelling and Domain Imaging Techniques in Ferroelectric Crystals / R. Prashant, Nien-Ti Tsou and John E. Huber A. //Materials. – 2011. – V. 4. – P. 417–447.

СРАВНЕНИЕ И РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К ПОЛУЧЕНИЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Направление получения точных рациональных формул для вычисления кратных корней полиномов на основе конструкций, связанных с результантом полиномов, до появления современных компьютеров практически не развивалось из-за большой громоздкости вычислений. В последние два десятилетия ситуация коренным образом изменилась и возрос интерес математиков к изучению данной темы. Настоящее исследование является естественным продолжением и развитием результатов работ [1; 2; 3]. Цель исследования – провести сравнительный анализ результатов в теории получения рациональных выражений для кратных корней полиномов с последующим обобщением и развитием данных результатов.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента $f(z)$, имеющие кратный корень кратности $s \geq 2$, а также алгоритмы построения рациональных формул для их вычисления. Методы исследования – анализ и синтез, а также методы математического анализа и алгебры с применением системы компьютерной математики *Maple* 2023.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим два полинома комплексного аргумента вида. и $g = g(z) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (z - \beta_j)$.

Напомним, что выражение $R = a_0^m b_0^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j)$ называется *результантом* полиномов f и g. Это рассматриваемое выражение можно представить в виде [4; с. 336]:

$$R = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) = (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdot \ldots \cdot f(\beta_m). \quad (1)$$

В терминах коэффициентов полиномов выражение (1) имеет вид определителя, который часто называют *формулой Сильвестра* (в ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули):

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

Если в качестве первого многочлена $f=f(z)$ взять полином, имеющий кратный корень (некоторой кратности s), а в качестве полинома $g=g(z)$ выбрать производную от первого (любого порядка до $s-1$ включительно), то, проводя анализ структур частных производных от результанта (1) по коэффициентам данных полиномов, выходим на семейства рациональных формул для вычисления значения имеющегося кратного корня. Так, в работах [5] и [6] для получения значения кратного корня результант дифференцируют по коэффициентам a_i $(i=0,1,\dots,n)$. Авторами настоящего доклада доказана альтернативная теорема 1.

Теорема 1. *Если полином комплексного аргумента* $f=f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_n \neq 0)$, *имеет корень* w *кратности* $s \geq 2$, *то вектор частных производных первого порядка по коэффициентам* a_i $(i=0,1,\dots,n)$ *от результанта* $R=R(f,f^{(s-1)})$ *многочлена, составленного с его производной порядка* $s-1$, *т. е. с* $f^{(s-1)}=f^{(s-1)}(z)=\sum_{k=0}^{n-s+1} b_k z^{n-s+1-k}$, *имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial a_0} & \dfrac{\partial R}{\partial a_1} & \dfrac{\partial R}{\partial a_2} & \dots & \dfrac{\partial R}{\partial a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^n & w^{n-1} & \dots & w & 1 \end{pmatrix} \cdot \prod_{m=2}^{n-s+1} f_m,$$

где $f_m=f(z_m)=\sum_{k=0}^{n} a_k z_m^{n-k}$ $(m=1,2,\dots,n-s+1)$ *– значение многочлена на* i*-м корне его производной порядка* $s-1$.

Таким образом, из данной теоремы непосредственно следует, что корень w кратности $s \geq 2$ при условии, что остальные корни имеют меньшую кратность, можно найти из любого из отношений

$$w=\frac{\partial R(f,f^{(s-1)})}{\partial a_k} : \frac{\partial R(f,f^{(s-1)})}{\partial a_{k+1}} \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

Новым направлением в теории построения рациональных формул для кратных корней полинома является дифференцирование результанта по коэффициентам полинома $g=g(z)=f'(z)$. Здесь авторами настоящего доклада были доказаны теоремы следующего вида.

Теорема 2. *Если полином комплексного аргумента* $f = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 = 1, a_n \neq 0)$, *имеет корень* w *кратности* 3, *то матрицы, составленные из частных производных третьего порядка от результанта* $R = R(f, g)$, *где* $g = f''(z) = \sum_{j=0}^{n-2} b_j z^{n-2-j}$, $g_i = f''(z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *по правилу* $\mathrm{H}_{b_l} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_l}$ *(*H *– матрица Гессе из производных* $\dfrac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k}$, $(j, k, l = 0, 1, \ldots, n-2)$*), имеют вид:*

$$\mathrm{H}_{b_0} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0^2}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0 \partial b_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0 \partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_0 \partial b_{n-2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1^2}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_1 \partial b_{n-2}}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3} \partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3} \partial b_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3}^2}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-3} \partial b_{n-2}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2} \partial b_0}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2} \partial b_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2} \partial b_{n-3}}\right) & \frac{\partial}{\partial b_0}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_{n-2}^2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= 3! \cdot \prod_{m=4}^{n} g_m \begin{pmatrix} w^{3(n-2)} & w^{3(n-2)-1} & \cdots & w^{2(n-2)+1} & w^{2(n-2)} \\ w^{3(n-2)-1} & w^{3(n-2)-2} & \cdots & w^{2(n-2)} & w^{2(n-2)-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w^{2(n-2)+1} & w^{2(n-2)} & \cdots & w^{n} & w^{n-1} \\ w^{2(n-2)} & w^{2(n-2)-1} & \cdots & w^{n-1} & w^{n-2} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{H}_{b_s} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial b_s} = \frac{1}{w^s} \cdot \mathrm{H}_{b_0} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Конечные выражения, получаемые на основе теоремы 2 и аналогичных ей, получаются более компактными по сравнению с формулами на основе теоремы 1.

Заключение. Таким образом, проведен сравнительный анализ двух подходов к получению семейств рациональных формул для корней полиномов в системах компьютерной алгебры. В обоих направлениях также получены новые результаты, обобщающие имеющиеся сведения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23М-003), а также в рамках ГПНИ Республики Беларусь «Конвергенция – 2025» (рег. № 20210494).

1. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1(110). – С. 13–25. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26638 (дата обращения: 26.01.2024).

2. Трубников, Ю.В. О структурах частных производных высоких порядков от результата многочлена с первой производной при наличии кратных корней / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Наука – образованию, производству, экономике [Электронный ресурс]: материалы 75-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 3 марта 2023 г. – Витебск: ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – С. 61–64. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/36818 (дата обращения: 26.01.2024).

3. Чернявский, М.М. Актуальные алгоритмы построения точных формул для кратных корней полиномов / М.М. Чернявский // Второй Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования Республики Беларусь: сб. науч. тр. / М-во образования Респ. Беларусь, М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В.М. Пашкевич

(общ. ред.) [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. – С. 202–203. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/40756 (дата обращения: 26.01.2024).
4. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры: учебник / А.Г. Курош. – 19-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2013. – 432 с.
5. Gelfand, I.M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I.M. Gelfand, M.M Kapranov, A.V. Zelevinsky. – Boston: Birkhäuser, 1994. – 528 p.
6. Антипова, И.А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И.А. Антипова, Е.Н. Михалкин, А.К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30.

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

С.А. Шлапаков
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе объектом исследования является задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [1]. Естественно возникает проблема существования и единственности решения такой задачи в пространстве суммируемых функций. Цель данного исследования – сформулировать условия существования и единственности решения дифференциальной задачи.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара, являющиеся модификациями классических операций дробного интегрирования и дифференцирования Римана–Лиувилля [2]. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. Ранее нами рассматривались дифференциальные задачи с дробными производными Адамара в иной постановке [1], [3], [4]. Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка состоит в отыскании функции $y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющей уравнению

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = p(x)y(x) + g(x),\ \alpha > 0 \tag{1}$$

и начальным условиям

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k \in R,\ k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]. \tag{2}$$

Левую часть в начальных условиях (2) следует рассматривать как предел в правосторонней окрестности $(a, a+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$ точки a:

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{\alpha-k} y\right)(x),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x),\ \alpha \neq n,$$
$$\left(\mathcal{D}_{a+,\mu}^{0} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} y(x),\ \alpha = n.$$

Здесь $\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \delta^n \left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x), \quad \delta = x\dfrac{d}{dx},\ n = [\alpha]+1,$ что можно понимать и так

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \delta^n \left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x) = \delta^n \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n} g\right)(x),$$

где конструкция