σ-ЛОКАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА И σ-КЛАССЫ ХАРТЛИ

Т.Б. Караулова, Н.Т. Воробьёв
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все группы, рассматриваемые нами в данной работе, конечны и разрешимы. В терминологии и обозначениях мы следуем [1].

Основная цель настоящей работы – установить взаимосвязь между σ-локальными классами Фиттинга и σ-классами Хартли.

Материал и методы. В работе материалом для исследования являются σ-локальные классы Фиттинга и σ-классы Хартли. При исследовании использованы методы теории групп и теории классов групп.

Результаты и их обсуждение. Напомним, что *классом Фиттинга* называют класс групп $\mathfrak{F}$, который обладает следующими свойствами:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

(2) если $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, $N_1 \trianglelefteq G$, $N_2 \trianglelefteq G$ и $G = N_1 N_2$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то G имеет единственную максимальную нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу, которую называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G. Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ – класс групп, то символом $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \cup\{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}.$$

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$*классы Фиттинга*$\}$ называется σ-*функцией Хартли* или H_σ-*функцией*. Если f – H_σ-функция, то символом $Supp(f)$ обозначают носитель f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – классы всех σ_i -групп и всех σ_i' – групп соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ – корадикал группы G – наименьшая нормальная подгруппа G, факторгруппа по которой σ_i – замкнута.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется σ-*локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\ldots\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным классом Фиттинга*.

Пусть $LH_\sigma(h) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем σ-*классом Хартли*, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если σ – минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, то $\mathfrak{H}$ называют *классом Хартли* [2].

Доказана

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{H}$ – σ-*класс Хартли. Справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{H}$ *является* σ-*локальным классом Фиттинга;*
2) *существуют* σ-*локальные классы Фиттинга, которые не являются* σ-*классами Хартли.*

Заключение. В настоящей работе доказано, что σ-класс Хартли является σ-локальным классом Фиттинга, хотя обратное в общем случае неверно.

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – P.891.
2. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.