

О СУЩЕСТВОВАНИИ И СОПРЯЖЕННОСТИ ИНЪЕКТОРОВ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ

Н.Т. Воробьев, Е.Д. Волкова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой своей группой содержит и все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он обладает следующими свойствами: 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$; 2) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G = N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$. Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и для любой группы G можно определить подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ как максимальную нормальную $\mathfrak{F}$ -подгруппу G . Ее называют $\mathfrak{F}$ -радикалом G .

Основополагающими результатами в теории групп и их классов являются классические теоремы М.Л. Силова и П. Холла. Обобщение этих теорем в терминах классов Фиттинга получено В. Гашюцем, Б. Фишером и Б. Хартли [2], где доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ разрешимых групп в каждой конечной разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены. Дальнейшее развитие и обобщение теоремы Гашюца-Фишера-Хартли приводит к исследованиям вопросов существования и сопряженности инъекторов в группах (в общем случае неразрешимых), что нашло применение в работах Л.А. Шеметкова [3–4], Б. Фишера [5], Б. Хартли [6], Д. Блессеноля и Х. Лауэ [7], Ю. Ли, В. Го и Н.Т. Воробьева [8], В. Го и Н.Т. Воробьева [9], Н. Янга, В. Го и Н. Т. Воробьева [10] и др.

Во многих случаях определяющим в решении задачи существования и сопряженности инъекторов является локальный метод изучения разрешимых групп посредством радикалов и классов Фиттинга, который впервые был предложен Б. Хартли [6]. В серии работ А. Н. Скибы [11–12] был предложен оригинальный метод исследования групп и их классов при помощи наличия у них σ -свойств, который был дуализирован для локальных классов Фиттинга в [13].

В связи с этим актуальна задача существования и сопряженности $\mathfrak{H}$ -инъекторов для σ -класса Хартли $\mathfrak{H}$ в Π -скованных группах. Реализации ее и посвящена настоящая работа.

Материал и методы. Материалом для исследования являются инъекторы в группе и их свойства. При этом использованы терминология и методы абстрактной теории групп и теории классов групп, в частности, теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество простых делителей числа n , $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Пусть σ – некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Всякое отображение вида $h : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называется σ -функцией Хартли или просто H_σ -функцией [13]. Если h – H_σ -функция, то символом $Supp(h)$ обозначают носитель h , т.е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $h(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то их произведением является класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Пусть $LH_\sigma(h) = \bigcap_{\sigma_i \in \sigma} h(\sigma_i) \mathfrak{E}_{\sigma_i}' \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}'$ – классы всех σ_i -групп и всех σ_i' -групп соответственно.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем σ -классом Хартли, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ -функции h . В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, то $\mathfrak{H}$ называют классом Хартли [6].

Группа G называется σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$; σ -нильпотентной, если $G = G_1 \times \dots \times G_n$ для некоторых σ -примарных групп $G_1, \dots, G_n$.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Тогда группу G называют Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Пусть $\mathfrak{N}_\Pi$ – класс всех σ -нильпотентных Π -групп. Группу G назовем Π -скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{N}_\Pi}) \leq G_{\mathfrak{N}_\Pi}$.

Задачу существования и сопряженности $\mathfrak{H}$ -инъекторов для σ -класса Хартли в Π -скованных группах решает следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга, h – H_σ -функция такая, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{X}$ для любого $\sigma_i \in \Pi = \text{Supp}(h)$ и G – группа. Если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ и фактор $G/G_{\mathfrak{X}}$ Π -скован, то справедливы следующие утверждения:

1) подгруппа V группы G является $\mathfrak{H}$ -инъектором G в точности тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{N}_{\Pi}$ -инъектор $G/G_{\mathfrak{X}}$;

2) в G существуют $\mathfrak{H}$ -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Заключение. В настоящей работе доказано существование и сопряженность $\mathfrak{H}$ -инъекторов для σ -класса Хартли $\mathfrak{H}$, определяемого постоянной H_σ -функцией.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
3. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebr. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.
4. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.
5. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.
6. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
7. Bessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Hauptfaktoren einfach sind / D. Bessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.
8. Liu, Y.F. Description of $\mathfrak{F}$ -injectors of finite soluble groups / Y.F. Liu, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.
9. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
10. Yang, N. On $\mathfrak{F}$ -injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N. T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
11. Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4(21). – P. 89–96.
12. Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3(24). – P. 70–83.
13. Guo, W. On σ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

ВОЗМОЖНОСТИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ КАФЕДРЫ

С.А. Ермоченко, Д.Д. Гончарова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Формирование учебной нагрузки кафедры и распределение на её основе учебных поручений между преподавателями кафедры в некоторых случаях представляет собой достаточно сложную и трудоёмкую задачу. Нагрузка состоит из большого количества дисциплин, каждая из которых может дробиться на более мелкие элементы, распределяемые между разными преподавателями, например, отдельно лекционная нагрузка и нагрузка на проведение практических занятий или лабораторных работ по подгруппам. Кроме того, количество ограничений при распределении таких элементов между преподавателями может быть достаточно большим. Например, невозможность проведения некоторых видов занятий преподавателями, не имеющими учёной степени; минималь-