

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.44

ГРОМАК ЕЛЕНА ВАЛЕРЬЕВНА

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С
ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ ВТОРОГО РОДА
И СТРУВЕ В ЯДРАХ**

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2004

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор
Килбас Анатолий Александрович
(Белорусский государственный университет,
кафедра теории функций)

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, член-кор. НАН
Беларуси, профессор Янович Леонид Александрович
(Институт Математики НАН Беларуси, отдел
стохастического анализа)

кандидат физ.-мат. наук, доцент Василец Сергей Иванович
(Белорусский государственный педагогический университет
им. М. Танка, кафедра математики физического
факультета)

Оппонирующая организация: Ростовский государственный университет

Защита состоится 17 декабря 2004 г. в 10⁰⁰ на заседании совета по защите
диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по
адресу: 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4, главный корпус, к.206, тел.
ученого секретаря совета: 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского
государственного университета.

Автореферат разослан "12" ноября 2004 г.

И.о. Ученого секретаря совета
по защите диссертаций Д 02.01.07
доктор физ.-мат. наук, профессор



А.Б. Антоневиц

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Диссертация посвящена исследованию интегральных преобразований со специальными функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах. Этой тематикой занимались многие ученые, в том числе Е. Титчмарш (E.C. Titchmarsh), П. Руни (P.G. Rooney), П. Хейвуд (P. Heywood), Э. Лав (E.R. Love), В. Маккеллар (W.H.J. McKeellar), М. Бокс (M.A. Box), Д. Окикиоулу (G.O. Okikioulu), Ву Ким Туан (Vu Kim Tuan), А.А. Килбас, М. Сайго (M. Saigo), Х. Трухилло (J.J. Trujillo) и др.

Важность изучения интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах обусловлена их широким применением при решении проблем математики и различных прикладных задач. Они используются при решении краевых задач для уравнений в частных производных, интегральных уравнений первого рода и так называемых парных и тройных уравнений, к которым сводятся разнообразные проблемы физики и механики, в теории упругости, теории теплопроводности, а также в осесимметрической теории потенциала¹.

С точки зрения приложений одной из центральных является проблема обращения интегральных преобразований, позволяющая находить решения в замкнутой форме математических и прикладных задач. Для решения этой проблемы одной из важнейших задач является изучение свойств интегральных преобразований в функциональных пространствах. Также большую роль в прикладных задачах, решения которых представляются в виде интегральных преобразований, имеет изучение асимптотического поведения этих решений в нуле и на бесконечности. При этом важно знать как первые члены асимптотик решений, так и их полные асимптотические разложения.

Поэтому одной из актуальных задач теории интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах является изучение их функциональных и асимптотических свойств.

Диссертационная работа выполнена в этом направлении. Она посвящена изучению вопросов действия операторов интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций $L_{p,r}$ на действительной полуоси со степенным весом, описанию образов этих операторов, получению различных интегральных представлений и формул обращения для исследуемых интегральных преобразований. Также в работе исследованы асимптотические свойства

¹Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. - М.: Наука, 1951. - 667 с.

таких преобразований, получены формулы асимптотических разложений на бесконечности и в нуле, в предположении, что их плотности имеют степенную асимптотику соответственно в нуле и на бесконечности.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Работа над диссертацией проводилась на кафедре теории функций Белорусского государственного университета в рамках научно-исследовательской темы: "Специальные функции, интегральные преобразования и их приложения (Математические структуры)" (2001-2004 гг.), № гос. регистрации 20011679.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является изучение функциональных и асимптотических свойств интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построить теорию интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций;
- построить теорию интегральных преобразований с функциями Струве в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций;
- получить формулы обращения рассматриваемых интегральных преобразований;
- найти асимптотические разложения на бесконечности и в нуле \mathcal{Y}_η - и \mathcal{H}_η -преобразований, в предположении степенной асимптотики подынтегральной функции;
- доказать теоремы абелева типа для интегральных преобразований, ядра которых содержат произведение функций Бесселя второго рода и Струве на экспоненциальную функцию.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются интегральные преобразования с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах, возникающие в осесимметрической теории потенциала.

Предметом исследования являются функциональные свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций, формулы их обращений, а также их асимптотическое поведение.

Методология и методы проведенного исследования. При решении поставленных задач используются методы теории интегральных преобразований и специальных функций, включающие теорию \mathcal{H} -преобразования, специальные функции бесселева типа, преобразования Меллина и Лапласа, теорию вычетов, асимптотические разложения

интегралов и др.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Научная новизна работы заключается в следующем:

- построена теория интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций;
- построена теория интегральных преобразований с функциями Струве в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций;
- получены формулы обращения для рассматриваемых интегральных преобразований;
- найдены асимптотические разложения исследуемых \mathcal{U}_η - и \mathcal{H}_η -преобразований на бесконечности и в нуле;
- доказаны теоремы абелева типа для интегральных преобразований, ядра которых содержат произведение функций Бесселя второго рода и Струве на экспоненциальную функцию.

Практическая значимость полученных результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях интегральных преобразований и их приложений при решении интегральных и дифференциальных уравнений. Результаты могут быть также использованы при решении конкретных задач в осесимметрической теории потенциала, и в учебном процессе в качестве спецкурсов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. $\mathcal{L}_{\nu,2}$ - и $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -теории для интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах.
2. Формулы обращения для рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций.
3. Асимптотические разложения на бесконечности и в нуле преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах.
4. Теоремы абелева типа для интегральных преобразований, в ядрах которых содержится произведение функции Бесселя второго рода и функции Струве на экспоненциальную функцию.

Личный вклад соискателя. Все изложенные в диссертации результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем д. ф.-м. наук, профессором А.А. Килбасом. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем.

Апробация результатов диссертации. Результаты, вошедшие в

диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

– Международная математическая конференция AMADE 2001 (Минск, 15–19 февраля 2001 г.);

– Вторая международная конференция, посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева (МГУ, Москва, 24–26 марта 2003 г.);

– Международная математическая конференция AMADE 2003 (Минск, 5–9 сентября 2003 г.);

– Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная И.Г. Петровскому (МГУ, Москва, 16–22 мая 2004 г.);

– Минский городской семинар имени академика Ф.Д. Гахова, руководитель семинара – профессор Э.И.Зверович (БГУ, Минск, 2001 – 2004 гг.).

Опубликованность результатов диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 научных работах. Среди них 5 статей в научных журналах (3 – без соавторов) и 4 тезисов докладов на международных конференциях. Общий объем опубликованных материалов – 44 страницы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, списка использованных источников, насчитывающих 73 наименования и приложения. Общий объем диссертации – 84 страницы, из которых 6 занимает список использованных источников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы интегральные преобразования, содержащие в ядрах функцию Бесселя второго рода и функцию Струве, а также преобразования, в ядрах которых содержатся произведения этих функций на экспоненциальную функцию. В процессе выполнения работы получены следующие результаты.

1. Построены $\mathcal{L}_{\nu,2}$ - и $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -теории для интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах [1, 2, 4, 6].
2. Получены формулы обращения для рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций [1, 2, 4, 6].
3. Найдены асимптотические разложения на бесконечности и в нуле преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах [5, 8, 9].
4. Доказаны теоремы абелева типа для интегральных преобразований, в ядрах которых содержится произведение функции Бесселя второго рода и функции Струве на экспоненциальную функцию [3, 7].

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Kilbas A.A., Gromak E.V. \mathcal{U}_η and \mathcal{H}_η transforms in $L_{\nu,r}$ -spaces // Int. Trans. Spec. Funct. - 2002. - Vol. 13. - P. 259-275.

2. Громак Е.В. Обобщенное преобразование Струве в весовых пространствах суммируемых функций // Вест. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. – № 3. – С. 72–76.
3. Громак Е.В., Килбас А.А. Абелевы теоремы для интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 5. – С. 14–18.
4. Громак Е.В. Обобщенное \mathcal{U}_η -преобразование в весовых пространствах $\mathcal{L}_{\nu,r}$ // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 3. – С. 17–21.
5. Громак Е.В. Асимптотическое разложение преобразования Струве // Труды Инст. мат. НАН Бел. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 56–60.
6. Gromak E.V., Kilbas A.A. \mathcal{U}_η -transform in spaces of summable functions // AMADE-2001: Abstracts of reports of international conference, 15–19 February 2001. / BSU. – Minsk, 2001. – P. 46.
7. Громак Е.В., Килбас А.А., Щетникович Е.К. Тауберовы теоремы для интегральных преобразований с функциями Бесселя в ядрах // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования: Тезисы докладов 2-ой междунард. конф., посв. 80-летию члена-корреспондента РАН, проф. Л.Д. Кудрявцева, 24–26 Марта 2003 г. / МГУ. – Москва, 2003. – С. 35–37.
8. Gromak E.V. Asymptotic expansion of integral transform with Bessel function of the second kind in the kernel // AMADE-2003: Abstracts of reports of international conference, 14–18 September 2003. / BSU. – Minsk, 2003. – P. 60–61.
9. Gromak E.V., Schetnikovich E.K. Functional and asymptotic properties of integral transforms with Bessel- and Watson-type kernels // International Conference "Differential equations and related topics", dedicated to the 103-rd anniversary of Petrovskii I.G., 16–22 May 2003. / MSU. – Moscow, 2004. – P. 81.



РЕЗЮМЕ

Громак Елена Валерьевна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С
ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ ВТОРОГО РОДА
И СТРУВЕ В ЯДРАХ

Ключевые слова: интегральные преобразования, функция Бесселя второго рода, функция Струве, асимптотические разложения, абелевы теоремы.

Объектами исследования в диссертации являются интегральные преобразования с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах. Предметом исследования являются функциональные свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций, формулы их обращений, а также их асимптотическое поведение.

Целью работы является изучение функциональных и асимптотических свойств интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Построены $\mathcal{L}_{\nu,2}$ - и $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -теории для интегральных преобразований с функциями Бесселя второго рода и функциями Струве в ядрах.

2. Получены формулы обращения для рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах суммируемых функций.

3. Найдены асимптотические разложения на бесконечности и в нуле преобразований с функциями Бесселя второго рода и Струве в ядрах.

4. Доказаны теоремы абелева типа для интегральных преобразований, в ядрах которых содержится произведение функции Бесселя второго рода и функции Струве на экспоненциальную функцию.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях интегральных преобразований и их приложений при решении интегральных и дифференциальных уравнений. Результаты могут быть также использованы при решении конкретных задач в осесимметрической теории потенциала.

РЭЗЮМЕ

Громак Алёна Валер'сёна

ІНТЭГРАЛЬНЫЯ ПЕРАЎТВАРЭННІ З ФУНКЦЫЯМІ БЕССЕЛЯ ДРУГОГА РОДА І СТРУВЕ Ў ЯДРАХ

Ключавыя словы: інтэгральныя пераўтварэнні, функцыя Бесселя другога рода, функцыя Струве, асімптатычныя раскладанні, абелевы тэарэмы.

Аб'ектам даследавання ў дысертацыі з'яўляюцца інтэгральныя пераўтварэнні з функцыямі Бесселя другога рода і Струве ў ядрах. Прадметам даследавання з'яўляюцца функцыянальныя ўласцівасці разглядаемых пераўтварэнняў у весавых прасторах сумавальных функцый, формулы іх ператварэнняў, а таксама іх асімптатычныя паводзіны.

Мэтай работы з'яўляецца даследаванне функцыянальных і асімптатычных ўласцівасцей са спецыяльнымі функцыямі ў ядрах ў весавых прасторах сумавальных функцый.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Пабудаваны $\mathcal{L}_{\nu,2}$ - і $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -тэорыі для інтэгральных пераўтварэнняў з функцыямі Бесселя другога рода і функцыямі Струве ў ядрах.

2. Атрыманы формулы зваротаў для разглядаемых інтэгральных пераўтварэнняў у весавых прасторах сумавальных функцый.

3. Знайдзены асімптатычныя раскладанні на бясконцасці і ў нуле пераўтварэнняў з функцыямі Бесселя другога рода і функцыямі Струве ў ядрах.

4. Даказаны тэарэмы абелева тыпа для інтэгральных пераўтварэнняў, у ядрах якіх знаходзіцца здабытак функцыі Бесселя другога рода і функцыі Струве на экспаненцыяльную функцыю.

Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Яе вынікі можна выкарыстоўваць ў тэарэтычных даследаваннях інтэгральных пераўтварэнняў і іх прыкладаў пры вырашэнні інтэгральных і дыферэнцыяльных раўнанняў. Вынікі таксама могуць выкарыстоўвацца пры рашэнні пэўных праблем ў восесіметрычнай тэорыі патэнцыяла.

SUMMARY

Elena V. Gromak

INTEGRAL TRANSFORMS WITH
BESSEL FUNCTION OF THE SECOND KIND AND
STRUVE FUNCTION IN THE KERNELS

Keywords: integral transforms, Bessel function of the second kind, Struve function, asymptotic expansions, Abel type theorems.

The objects of the research in this thesis are integral transforms with Bessel function of the second kind and Struve function in the kernels. The subject of the research is their functional and asymptotic properties in the weighted spaces of summable functions as well as their inversions.

The purpose of this work is to investigate the functional and asymptotic properties of the integral transforms with special functions in the kernels in the weighted spaces of summable functions.

The following new results have been obtained in the thesis:

1. $\mathcal{L}_{\nu,2}$ - and $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -theories for the integral transforms with Bessel function of the second kind and Struve function in the kernels have been constructed.
2. The inversion formulas for the investigated integral transforms in the weighted spaces of summable functions have been obtained.
3. The asymptotic expansions near infinity and zero have been given for the integral transforms with Bessel function of the second kind and Struve function in the kernels.
4. Abel type theorems for the integral transforms with the products of Bessel function of the second kind and Struve function on the exponential function in the kernels have been proved.

The thesis is theoretical. Its results may be used in theoretical investigations of the integral transforms and their applications on solving the integral and differential equations. The results can also be applied for the solution of concrete problems in the axially-symmetric potential theory.