

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
"ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"**

УДК 512.542

**ГОЛУБЕВА Оксана Валерьевна**

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ  
С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

**01.01.06 – математическая логика,  
алгебра и теория чисел.**

**Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Гомель – 2002

Работа выполнена в Учреждении образования "Полоцкий государственный университет"

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор  
ПАЛЬЧИК Эдуард Михайлович,  
Учреждение образования "Полоцкий государственный университет",  
кафедра прикладной математики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор  
СКИБА Александр Николаевич  
Учреждение образования "Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины", кафедра алгебры и геометрии

кандидат физико-математических наук  
ТЮТЯНОВ Валентин Николаевич,  
Учреждение образования "Гомельский филиал  
Международного института трудовых и социальных  
отношений", кафедра общенаучных дисциплин

Оппонирующая организация: Гомельский городской педагогический университет

Защита состоится "11" октября 2002 года в 15<sup>30</sup> часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при Учреждении образования "Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины" по адресу: 246019, г.Гомель, ул.Советская, 104. Телефон ученого секретаря: (10-375232) 57-37-91.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале N 1 Учреждения образования "Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины"

Автореферат разослан "5" сентября 2002 года

Ученый секретарь  
совета по защите диссертаций  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

 А.Ф.ВАСИЛЬЕВ

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** Подгруппа  $A$ , перестановочная с подгруппами из класса сопряженных подгрупп  $B^X = \{B^x \mid x \in X\}$  некоторой группы  $X$ , является обобщением понятия нормальной подгруппы. В самом деле, если  $A$  нормальна в  $X$ , то, очевидным образом,  $A$  перестановочна со всеми подгруппами группы  $X$ .

Свойства перестановочных подгрупп в конечных группах изучались различными алгебраистами. Отметим, что подгруппу, перестановочную со всеми подгруппами в группе, называют квазинормальной. Еще в 1941 году Ивасава [1] заметил, что квазинормальная подгруппа не обязательно является нормальной подгруппой в группе. В 1962 году Ито и Сеп [2] установили, что если квазинормальная подгруппа  $Q$  конечной группы  $X$  не содержит нормальных в  $X$  подгрупп, то  $Q$  – нильпотентная подгруппа и для каждого простого делителя  $p$  порядка  $|Q|$  подгруппы  $Q$  в группе  $X$  существует нормальная подгруппа индекса  $p$ .

Наиболее существенный вклад в исследование перестановочных подгрупп внесли Виландт [3] и Кегель [4].

Так, в [4] Кегель доказал очень важный критерий простоты конечной группы  $X$ , у которой имеются две подгруппы  $A$  и  $B$  такие, что  $AB^x = B^xA$  для всех  $x \in X$ ,  $AB \neq X$ .

Отметим также интересные работы [5], [6], [7], касающиеся свойств перестановочных подгрупп.

В теории конечных групп важную роль играют группы Шмидта. Группой Шмидта называют конечную нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой являются нильпотентными. Иначе группы Шмидта называют минимальными нильпотентными группами. Свойства групп Шмидта можно найти в работах [8]–[12].

Возможности приложений групп Шмидта к исследованию конечных групп заметил С.А. Чунихин еще в 1929 году [13]. Он отметил, что строение конечной группы тесно связано с наличием у нее того или иного множества подгрупп Шмидта. Влияние внешних свойств подгрупп Шмидта на строение конечной группы исследовалось также в [6]. Влияние внутренних свойств подгрупп Шмидта на строение конечной группы особенно наглядно проявилось в работе [10], в которой описаны простые неабелевы конечные группы с силовой 2-подгруппой, изоморфной неабелевой силовой 2-подгруппе группы Шмидта. К этому направлению теории конечных групп относится предлагаемая диссертация.

**Связь работы с крупными научными программами и темами.** Диссертация выполнена в рамках госбюджетной темы:

"Даследаванне нармальнай будовы канечных груп, маючых спецыяльны стабілізатар капрастога аўтамарфізму, або маючых перастанавачныя падгрупы" Полоцкаго государственного университета (номер госрегистрации в БелИСА – 2001916 (ГБ-3721 в ПГУ)). Тема входит в "План важнейших наукова-даследчых работ у галіне прыродазнаўчых, тэхнічных, гуманітарных і сацыяльных навук і мастацтваў па Рэспубліцы Беларусь на 2001-2005 гады (частка I, с.10)". Выполнение темы запланировано на 2001-2005гг.

**Цель и задачи исследования.** Цель диссертации – развитие методов исследования структурной теории конечных групп с помощью внешних свойств (например, перестановочности) подгрупп Шмидта. Для этой цели решаются следующие задачи:

- установление новой информации о существовании подгрупп Шмидта в конечных группах;
- разработка новых свойств перестановочности собственных подгрупп группы с ее подгруппами Шмидта.

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования являются перестановочные подгруппы конечных групп. Предмет исследования – существование подгрупп Шмидта в конечных группах.

**Методология и методы проведенного исследования.** Используется абстрактная теория конечных групп, методы работы с перестановочными подгруппами и классификационные результаты по простым конечным группам.

**Научная новизна и значимость полученных результатов.** Все результаты диссертации являются новыми и могут использоваться в теоретических исследованиях. Получены новые признаки  $p$ -разрешимости конечных групп в зависимости от наличия в них специальных подгрупп Шмидта и в зависимости от перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта.

Работа носит теоретический характер. Отдельные результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов на математических факультетах вузов.

**Основные положения диссертации, выносимые на защиту.**

1. Новая информация о существовании подгрупп Шмидта:
  - установлено, что в любой конечной  $K$ -группе, которая не является  $p$ -замкнутой, существует  $p$ -сверхразрешимая  $pd$ -подгруппа Шмидта;
  - установлено, что для любого простого делителя  $p > 3$  порядка конечной неразрешимой группы в группе существует  $2'$ -замкнутая  $2d$ -подгруппа Шмидта, порядок которой взаимно прост с  $p$  (для  $p = 3$  это верно в том

случае, если группа не имеет секций изоморфных  $L_2(7)$  и  $L_2(13)$ ).

2. Метод исследования нормального строения конечной группы, у которой перестановочны некоторые классы сопряженных подгрупп Шмидта.

3. Метод исследования строения конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна с некоторыми классами сопряженных подгрупп Шмидта.

4. Критерий  $p$ -скованности конечной группы с  $S_p$ -подгруппой  $P$  в терминах перестановочности ее подгрупп, содержащих ее специальную характеристическую подгруппу.

**Личный вклад соискателя.** В двух совместно опубликованных работах постановка задачи и общие идеи доказательств принадлежат научному руководителю, а сами доказательства получены соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

**Апробация результатов диссертации.** Результаты исследований автора, включенные в диссертацию, докладывались в Гомельском госуниверситете на семинаре, руководимом членом-корреспондентом НАН РБ Л.А.Шемстковым, в Витебском государственном университете на алгебраическом семинаре, руководимом профессором, доктором физико-математических наук Н.Т.Воробьевым, а также на VIII-й Белорусской математической конференции (Минск, 19-24 июня 2000 г.).

**Опубликованность результатов.** Все результаты диссертации опубликованы автором в пяти статьях (две из которых являются совместными), и в одних тезисах доклада. Общее количество страниц опубликованных материалов – 22.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, вводной главы 1, основных глав 2-4, заключения и списка использованных источников в порядке их цитирования (48 наименований). Полный объем диссертации – 68 страниц.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации используются стандартные обозначения и определения современной теории конечных групп, которые можно найти в источниках [14]-[18]. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Для удобства чтения большая часть определений и обозначений имеется в разделе 1 вводной главы 1.

Как уже отмечено выше, первая глава носит вводный характер и содержит основную используемую терминологию и основные используемые

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Iwasawa K. Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen // J. Univ. Tokyo. – 1941. – Vol. 4, N 3. – P. 171-199.
2. Ito N., Szep I. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Acta Sci. Math. Szeged. – 1962. – Vol. 23. – P. 168-170.
3. Wielandt H. Über das Product paarweise vertauschbarer nilpotent Gruppen // Math. Z. – 1951. – Bd. 55. – S. 1-7.
4. Kegel O. H. Produkte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90-93.
5. Kegel O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlichen Gruppen // Math. Z. – 1962. – Bd. 78. – S. 205-221.
6. Беркович Я.Г., Пальчик Э.М. О перестановочности подгрупп конечной группы // Сибирский матем. журн. – 1967. – Т. 8, N 4. – С. 741-753.
7. Пальчик Э.М. О  $b$ -квазинормальных подгруппах // Доклады АН БССР. – 1967. – Т. 11, N 11. – С. 967-969.
8. Шмидт О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. – 1924. – Т. 31 – С. 366-372.
9. Гольфанд Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, N 8. – С. 1313-1315.
10. Мазуров В.Д., Сыскин С.А. О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Матем. зам. – 1973. – Т. 14, N 2. – С. 217-222.
11. Журтов А.Х., Сыскин С.А. О группах Шмидта // Сибирский матем. ж. – 1987. – Т. 26, N 2. – С. 74-78.
12. Redei L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math. – 1956. – N 4. – S. 303-324.
13. Чунихин С.А. О специальных подгруппах // Матем. сб. – 1929. – Т. 4, N 3. – С. 512-530.
14. Huppert B. Endliche Gruppen, I. – Berlin: Springer – Verlag. – 1967. – 793 S.
15. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, III. – Berlin: Springer – Verlag. – 1982. – 454 p.
16. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. surveys and Monographs (AMS, Providence, R. I.). – 1994. – Vol. 40, N 1. – P. 1-165.
17. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. surveys and Monographs. (AMS, Providence, R. I.), – 1994. – Vol. 40, N 2. – P. 1-218.

18. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир. – 1985. – 352 с.

19. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. – Мн.: Наука и техника. – 1964. – 154 с.

20. Беркович Я.Г. Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // В кн.: Конечные группы. – Мн.: Наука и техника. – 1966. – С. 29-39.

21. Монахов В.С. О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. Гомель: Издательство Гомельского университета. – 1998. Вып. 13. – С. 153-171.

22. Lennox J.C., Stonehewer S.E. Subnormal subgroups of groups. – Oxford: Clarendon Press. – 1987. – 253 p.

### **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

23. Пальчик Э.М., Голубева О.В. О подгруппах Шмидта простых неабелевых конечных  $K$ -групп // Известия Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины. – 2000. – N3(16). Вопросы алгебры. – С.138-144.

24. Голубева О.В. К теореме С.А.Чунихина // Известия Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины. – 2000. – N3(16). Вопросы алгебры. – С.195-198.

25. Голубева О.В. О существовании подгрупп Шмидта у конечной группы // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. н. – 2001. – N2 – С.44-47.

26. Голубева О.В., Пальчик Э.М. К теореме Виландта // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. н. – 2001. – N3 – С.135-136.

27. Голубева О.В. Критерий  $p$ -скованности конечной группы // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2001. – N4(22) – С.84-87.

28. Голубева О.В. О конечных группах с перестановочными подгруппами // VIII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Часть 2, Минск, 19-24 июня 2000г. / Минск, 2000. – С.30.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуется существование подгрупп Шмидта в произвольных конечных группах и устанавливается строение конечной группы с системами перестановочных подгрупп. Получены следующие результаты:

- в любой конечной  $K$ -группе, которая не является  $p$ -замкнутой, существует  $p$ -сверхразрешимая  $pd$ -группа Шмидта [24];
- в любой конечной неразрешимой группе для любого простого делителя  $p > 3$  порядка группы существует  $2'$ -замкнутая  $2d$ -группа Шмидта, порядок которой взаимно прост с  $p$  [25];
- получена новая информация о нормальном строении конечной группы, у которой перестановочны некоторые подгруппы Шмидта [28];
- получен критерий  $p$ -скованности конечной группы в терминах перестановочности ее  $p$ -подгрупп [27].

## Р Э З Ю М Э

Голубева Аксана Валер'еўна

Канечныя групы

з перастановачнымі падгрупамі

Ключавыя словы: канечная група,  $K$ -група, група Шмідта,  $p$ -замкнёная група,  $p$ -вырашальная група, характарыстычная група,  $p$ -скаваная група, перастановачныя падгрупы, сілаўская  $p$ -падгрупа, кф  $\{\mathfrak{R}\}$ -свабодная група.

У дысертацыі з дапамогай класіфікацыйных вынікаў па простых канечных групах апісаны мінімальныя не  $p$ -замкнёныя групы; устаноўлена, што ў любой канечнай  $K$ -групе, якая не з'яўляецца  $p$ -замкнёнай, існуе  $p$ -зверхвырашальная  $pd$ -падгрупа Шмідта; даказана, што для любога простага дзельніка  $p > 3$  парадку канечнай невырашальнай групы ў групе існуе  $2'$ -замкнёная  $2d$ -падгрупа Шмідта, парадак якой узаемна просты з  $p$ ; распрацаваны метады даследавання нармальнай будовы канечнай групы, у якой з'яўляюцца перастановачнымі некаторыя класы сапражоных падгруп Шмідта; распрацаваны метады даследавання будовы канечнай групы, у якой уласная падгрупа з'яўляецца перастановачнай з некаторымі класамі сапражоных падгруп Шмідта; даследавана  $p$ -скаванасць канечнай групы з  $S_p$ -падгрупай  $P$  у тэрмінах перастановачнасці яе падгруп, якія ўтрымліваюць яе спецыяльную характарыстычную падгрупу.

Усе атрыманыя вынікі работы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры вывучэнні канечных груп, а таксама пры чытанні спецкурсаў, выкладаемых ва ўніверсітэтах і педагагічных ВНУ.

## РЕЗЮМЕ

Голубева Оксана Валерьевна

Конечные группы  
с перестановочными подгруппами

Ключевые слова: конечная группа,  $K$ -группа, группа Шмидта,  $p$ -замкнутая группа,  $p$ -разрешимая группа,  $p$ -скованная группа, перестановочные подгруппы, силовская  $p$ -подгруппа, характеристическая подгруппа, кф{ $\mathfrak{R}$ }-свободная группа.

В диссертации с помощью классификационных результатов по простым конечным группам описаны минимальные не  $p$ -замкнутые  $p$ -разрешимые и не  $p$ -разрешимые группы; установлено, что в любой конечной  $K$ -группе, которая не является  $p$ -замкнутой, существует  $p$ -сверхразрешимая  $pd$ -подгруппа Шмидта; доказано, что для любого простого делителя  $p > 3$  порядка конечной неразрешимой группы в группе существует  $2'$ -замкнутая  $2d$ -подгруппа Шмидта, порядок которой взаимно прост с  $p$ ; разработан метод исследования нормального строения конечной группы, у которой перестановочны некоторые классы сопряженных подгрупп Шмидта; разработан метод исследования строения конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна с некоторыми классами сопряженных подгрупп Шмидта; исследована  $p$ -скованность конечной группы с  $S_p$ -подгруппой  $P$  в терминах перестановочности ее подгрупп, содержащих ее специальную характеристическую подгруппу.

Все полученные результаты работы являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы при изучении строения конечных групп, а также при чтении спецкурсов, преподаваемых в университетах и педагогических вузах.

## S U M M A R Y

**Golubeva Oksana Valer'evna**

The finite groups  
with permutable subgroups

Key word: finite group,  $K$ -group, Smidt's group,  $p$ -closed group,  $p$ -solvable group,  $p$ -constrained group, permutable subgroups, Sylow  $p$ -subgroup, characteristic subgroup,  $\text{cf}\{\mathfrak{R}\}$ -free group.

In the dissertation minimal not  $p$ -closed groups are described with help of classification results on a simple finite groups; it is established an existence of  $p$ -supersolvable  $pd$ -subgroups of Schmidt in any not  $p$ -closed  $K$ -group; it is proved that for any prime divisor  $p > 3$  of order of finite not solvable group a  $2'$ -closed  $2d$ -subgroups of Schmidt is exist in finite not solvable group whose order is prime to  $p$ ; it is worked a method of investigation of normal structer of finite group with a some permutable classes of conjugative Schmidt's subgroups; it is worked a method of investigation of construction of finite group whose private subgroups is permutable with some classes of Schmidt's subgroups; the  $p$ -constraint of finite group with  $S_p$ -subgroup is investigated in terms of permutation it's subgroups.

All main results of the work are new. They have a theoretical character and are able to use in research in the theory of finite groups and in teaching of special courses in universities and pedagogical institutes.