УДК 512.542

В.И. Гойко

О классах сопряженных подгрупп конечных групп

В теории конечных групп характеристическим классам сопряженных подгрупп уделено достаточно много мнимания. Среди таких классов подгрупп наибольшую популярность имеют $\mathfrak{F}$-проекторы, $\mathfrak{F}$-нормализаторы и $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы ($\mathfrak{F}$ – насыщенная формация). В дальнейшем эти подгруппы нашли свое применение при исследовании многих вопросов теории групп (см. работы Л.А. Шеметкова, Н.Т. Воробьева, К. Дерка, Хартли и др.).

В работе [1] определен класс сопряженных подгрупп в конечных разрешимых группах – $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы, которые являются формационным обобщением подгрупп, построенных в [2]. Позже появилось большое количество работ, посвященных исследованию свойств таких подгрупп и их обощений (см. список литературы в [3]).

Цель данной работы – установить существование и изучить основные свойства еще одного класса сопряженных подгрупп – $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевых подгрупп в конечных группах. В случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех групп и группа разрешима, то $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы совпадают с подгруппами, построенными в [2].

В дальнейшем $\mathfrak{F}$ обозначает локальную формацию. Другие обозначения и определения, которые здесь используются, можно найти в [4, 5].

Напомним определение короны группы. Пусть H / K – нефраттиниевый абелевый главный фактор группы G, $C_G(H / K) = C$, R – пересечение всех таких нормальных подгрупп N из G, что C / N не входит в $\Phi(G / N)$ и факторы C / N и H / K являются G-изоморфными. C / R называется короной группы G, соответствующей фактору H / K, или короче – (H / K)-короной. (H / K)-корону назовем $\mathfrak{F}$-центральной, если H / K есть $\mathfrak{F}$-центральный G-главный фактор.

Лемма 1. *Пусть C / R – некоторая корона группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Все G-главные факторы из C / R G-изоморфны между собой.

2) Всякий G-главный фактор из C / R нефраттиниев.

3) G-главный фактор H / K тогда и только тогда нефраттиниев и G-изоморфен G-главным факторам из C / R, когда верны включения: $RK \subset RH \subseteq C$.

Доказательство. 1) Рассматриваем G как группу операторов для C. Увреждение 1 теперь вытекает из определения короны и из работы [6].

2) Пусть $N_1, \ldots, N_t$ – произвольный набор таких нормальных подгрупп группы G, что C / N_i не содержится в $\Phi(G / N_i)$ и C / N_i есть G-главный фактор. Индукцией по t покажем, что все G-главные факторы, лежащие между C и $R = \bigcap_{i=1}^{t} N_i$, нефраттиниевы. Пусть $t > 1$ и $L = \bigcap_{i=1}^{t-1} N_i$. Если $L = R$, то по индукции все G-главные факторы, лежащие между L и C, нефраттиниевы. Можно считать, что $L \neq R$. Тогда L не входит в N_t. Значит, $C = N_t L$. Поскольку имеет место G-изоморфизм $C / N_t = N_t L / N_t \cong L / L \cap N_t$, то L / R есть G-главный фактор. Но C / N_t не содержится в $\Phi(G / N_t)$. Ясно, что L / R не входит в $\Phi(G / R)$. По индукции каждый главный фактор группы G, лежащий между L и C, нефраттиниев. Таким образом, в группе G / R имеется такой главный ряд, проходящий через C / R, все факторы которого, лежащие ниже C / R, нефраттиниевы. По лемме 2.6 из [7] это означает, что всякий (G/R)-главный фактор, лежащий ниже C / R, нефраттиниев. Следовательно, всякий G-главный фактор, лежащий между R и C, нефраттиниев.

3) Пусть справедливы включения: $RK \subset RH \subseteq C$. Имеет место G-изоморфизм: $RH/RK \cong H/K(H \cap R)$. Если $K(H \cap R) = H$, то $RH/RK = E$, а это противоречит включению $RK \subset RH$. Значит, $K(H \cap R) \subset H$. Поскольку H / K есть G-главный фактор, то $K = K(H \cap R)$. Значит, имеет место G-изоморфизм: $RH / RK \cong H/(H \cap R)K = H/K$. В силу пункта 1 имеем, что H / K G-изоморфен G-главным факторам из C / R. Ввиду утверждения 2: RH / RK не входит в $\Phi(G / RK)$. Тогда в G / RK существует такая максимальная под-

группа M / RK, что RH / RK не входит в M / RK. Тогда H не входит в M, $K \subseteq M$, т.е. H / K не входит в $\Phi(G / K)$.

Предположим теперь, что H / K – нефраттиниевый главный фактор группы G, G-изоморфный G-главным факторам из C / R. Пусть M – максимальная подгруппа из G, которая не покрывает H / K. Тогда $MH = G$ и $M \cap H = K$. Ввиду G-изоморфизма $HM_G / M_G \cong H / K$ получим, что $C_G(H / K) \supseteq M_G$ Тогда $M \cap C_G (H / K) = M_G$. Далее, поскольку $(M \cap C_G (H / K)) H = C_G (H / K) MH = C_G (H / K)$, то $C_G (H / K) = HM_G$. Ясно, что C / M_G не входит в $\Phi(G / M_G)$. В силу G-изоморфизма $C / M_G = HM_G / M_G \cong H/K$ и определения короны заключаем, что $R \subseteq M_G$. Значит, $RH \subseteq C$. Если допустить, что $RH = RK$, то в силу G-изоморфизма $RH / RK \cong H / K (H \cap R)$ получим, что $K (H \cap R) = H \cap RK = H$. Отсюда получим, что $H \subseteq RK \subseteq M_G$. Последнее невозможно, т.к. M дополняет H / K в G. Значит, $RK \subset RH$. *Лемма* доказана.

Лемма 2. *Пусть N – нормальная подгруппа конечной группы G и пусть между 1 и N нет ни одного нефраттиниевого G-главного фактора, G-изоморфного хотя бы одному нефраттиниевому G-главному фактору из G / N. Тогда, если C / R есть (H / K)-корона, где (H / K) – нефраттиниевый абелевый G-главный фактор, лежащий между N и G, то $(C / N) / (R / N)$ есть $((H / N) / (K / N))$-корона группы G / N.*

Доказательство. Т.к. $N \subseteq K \subseteq C_G(H/K) = C$, то $CN = C$. Следовательно, C / N есть централизатор (G/N)-главного фактора $(H / N)/(K / N)$. Пусть $(C/N)/(R^*/N)$ – корона фактор-группы G/N, соответствующая $(H/N)/(K/N)$.

Покажем, что $RN/N \subseteq R^*/N$. В самом деле, пусть $(C/N)/(L/N)$ – такой нефраттиниевый (G/N)-главный фактор, который (G/N)-изоморфен $(H/N)/(K/N)$. Тогда C/L – нефраттиниевый G-главный фактор. Кроме того, поскольку имеют место G-изоморфизмы $(H/N)/(K/N) \cong H/K$, $(C/N)/(L/N) \cong C/L$ и (G/N)-изоморфизм $(H/N)/(K/N) \cong (C/N)/(L/N)$, то H/K G-изоморфен C/L. Таким образом, $R \subseteq L$. Следовательно, $R^*/N \supseteq RN/N$. Теперь для завершения доказательства леммы остается установить справедливость обратного включения. Для этого покажем, что $N \subseteq R$. Предположим противное, т.е. N не входит в R. Тогда в группе G найдется такой нефраттиниев G-главный фактор C/L, G-изоморфный H/K, что N не входит в L. Но $N \subseteq C$. Значит, $C = LN$. Пусть M – максимальная подгруппа группы G, дополняющая C/L в G. Тогда очевидно, что M дополняет $N/N \cap L$ в G, т.е. фактор $N/N \cap L$ – нефраттиниевый. При этом, в силу G-изоморфизма $N/N \cap L \cong NL/N = C/N$, ясно, что $N/N \cap L$ – главный фактор группы G. Пришли к противоречию с условием леммы. Таким образом, $N \subseteq R$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть C / R – (H / K)-корона группы G, $N \subseteq R$. Тогда $(C / N) / (R / N)$ является $((H N / N) / (K N / N))$-короной фактор-группы G / N. Доказательство данной леммы вытекает из леммы 2.*

Лемма 4. *Корона группы G дополняема в G, а если группа G разрешима, то все такие дополнения сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть C / R – корона группы G и пусть

$$R = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_t = C \qquad (1)$$

участок G-главного ряда между R и C.

Все G-главные факторы между R и C абелевы и нефраттиниевы по лемме 1 и, значит, дополняемы в G. Дополнениями являются максимальные подгруппы группы G. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_t$ – дополнения к факторам ряда (1), причем ровно по одному дополнению к каждому фактору ряда (1). Тогда получим $(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t)\, C = (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t)\, R_tC = (M_2 \cap \ldots \cap M_t \cap M_1 R_1)\, C =$ $= (M_2 \cap \ldots \cap M_t)C = \ldots = M_tC = G$, $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_t \cap C = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{t-1} \cap$ $\cap R_{t-1} = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_{t-2} = M_t \cap R_t = R$, т.е. C/R дополняема в G.

В случае, когда группа G разрешима, сопряженность следует из работы [2].

Лемма 5 [2]. *Пусть A, B, AB – подгруппы группы G; $x, y \in AB$. Тогда $A \cap B$ и $A^x \cap B^y$ сопряжены в AB.*

Лемма 6. *Пусть C/R – корона группы G, B – дополнение к C/R в группе G. Тогда B изолирует все нефраттиниевы G-главные факторы, G-изоморфные G-главным факторам из C/R, и покрывает остальные G-главные факторы.*

Доказательство. Пусть H/K – нефраттиниев главный фактор группы G, G-изоморфный G-главным факторам из C/R. По лемме 1 фактор RH/RK – нефраттиниев G-главный фактор такой, что $RK \subset RH \subseteq C$. Пусть M – дополнение к RH/RK в G. Тогда M дополняет H/K в G. Далее, в силу изоморфизма $C/M_G = HM_G/M_G \cong H/K$ видно, что C/M_G – абелев нефраттиниев G-главный фактор. Очевидно, что BM_G/M_G – дополнение к C/M_G в G/M_G. Значит, BM_G/M_G – максимальная подгруппа в G/M_G и ее ядро есть M_G/M_G. Отсюда следует, что M_G – ядро максимальной подгруппы BM_G в G и $B \subseteq BM_G$. Поскольку BM_G дополняет H/K в G, то $H \cap BM_G = K$. Отсюда получаем, что $B \cap H \subseteq K$, а это означает, что B изолирует H/K. Пусть

$$1 = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_t = G \qquad (2)$$

произвольный главный ряд группы G и пусть B изолирует фактор K_j/K_{j-1}. В силу изоморфизма $B \cap K_j / K_{j-1} \cong (B \cap K_j)\, K_{j-1} / K_{j-1} = K_{j-1} / K_{j-1}$ видим, что $B \cap K_j / K_{j-1}$ – единичный фактор. Если B не покрывает K_i / K_{i-1}, то не входит в $(B \cap K_i)\, K_{i-1} / K_{i-1} \cong (B \cap K_i) / (B \cap K_{i-1})$, $|K_i / K_{i-1}| > |B \cap K_i / B \cap K_{i-1}|$. Но B – дополнение к C/R в G. Значит, порядок группы B совпадает с произведением всех тех факторов ряда (2), которые либо фраттиниевы, либо не G-изоморфные G-главным факторам из C/R. Поскольку при этом B изолирует всякий нефраттиниев фактор ряда (2), G-изоморфный G-главным факторам из C/R, то остается заключить, что B покрывает всякий фраттиниев и всякий не G-изоморфный G-главным факторам из C/R фактор ряда (2). Теперь учитывая, что индекс подгруппы B в группе G совпадает с произведением порядков тех нефраттиниевых факторов указанного выше G-главного ряда, которые G-изоморфны G-главным факторам из C/R, заключаем, что B покрывает все фраттиниевы G-главные факторы и главные факторы не G-изоморфные G-главным факторам из C/R. Лемма доказана.

Определение. Пусть $C_1/R_1, C_2/R_2, \ldots, C_n/R_n$ – множество всех $\mathfrak{F}$-центральных корон группы G. Всякое пересечение вида $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_n$, где H_i – дополнение к C_i/R_i в G ($i = 1, 2, \ldots, n$), назовем $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевой подгруппой группы G. Если в G нет $\mathfrak{F}$-центральных корон группы, т.е. в G нет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов, то $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевой подгруппой группы G назовем саму группу G.

Очевидно, что в каждой конечной группе для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ множество $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевых подгрупп не пусто.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы изолируют все абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-центральные G-главные факторы и покрывают остальные G-главные факторы;

2) если группа G разрешима, то все $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы группы G сопряжены в G.

Доказательство. 1. Пусть C_1/R_1, C_2/R_2, . . . , C_n/R_n – все $\mathfrak{F}$-центральные короны группы G и пусть $L = B_1 \cap \ldots \cap B_n$, где B_i дополняет C_i / R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично, как в лемме 6 можно показать, что для любой максимальной $\mathfrak{F}$-нормальной подгруппы, дополняющей G-главный фактор из C_i/R_i, найдется равноядерная с ней подгруппа M_j такая, что $B_i \subset M_j$, $j = 1, 2,\ldots, n$.

Возьмем произвольный главный ряд (α) группы G, в котором $H_1/K_1,\ldots,H_t/K_t$ – все G-главные факторы, G-изоморфные G-главным факторам из C_i / R_i. Пусть $M_1,\ldots,M_t$ – максимальные $\mathfrak{F}$-нормальные подгруппы, дополняющие эти главные факторы, причем ровно по одному дополнению для каждого из этих факторов и, кроме того, эти дополнения выбраны так, чтобы выполнялось включение

$$B_i \subseteq M_1 \cap \ldots \cap M_t. \tag{3}$$

Включение (3) всегда возможно ввиду вышесказанного. Пусть для определенности возрастание номера i соответствует увеличению факторов H_j/K_j. Обозначим $A_i = M_1 \cap \ldots \cap M_t$. Покажем, что A_i и B_i имеют одинаковое свойство покрытия-изолирования факторов ряда (α). В самом деле,

$A_i \cap H_j = M_1 \cap \ldots \cap M_t \cap H_j = M_1 \cap \ldots \cap M_{j-1} \cap M_{j+1} \cap \ldots M_t \cap (M_j \cap H_j) = M_1 \cap \ldots \cap M_t \cap K_j \subseteq K_j$. Значит, A_i изолирует H_j/K_j для любого $j = 1,\ldots, n$. Покажем далее, что A_i покрывает остальные факторы ряда (α). Очевидно, что A_i покрывает факторы между 1 и K_1, так как $K_1 \subseteq K_1 \subset A_i$. Пусть теперь D / F – фактор ряда (α) такой, что $H_k \subseteq F$. Применяя тождество Дедекинда, получим

$$A_i F = (M_1 \cap \ldots \cap M_t)F = (M_1 \cap \ldots \cap M_t)\, H_1F = (M_2 \cap \ldots \cap M_t \cap H_1M_1)F = \\ = (M_2 \cap \ldots \cap M_t)F = \ldots\ M_tF = G.$$

Значит, $D \subset A_i\ F$. Пусть теперь E/Q такой фактор ряда (α), что $H_S \subseteq Q$ и $E \subseteq H_{S+1}$. Тогда очевидно, что $M_1,\ldots, M_S$ не содержат Q, а $M_{S+1},\ldots, M_t$ содержат E. Имеем теперь:

$$A_iQ = (M_1 \cap \ldots \cap M_t)Q = (M_1 \cap \ldots \cap M_S \cap M_{S+1} \cap \ldots \cap M_t)Q = M_{S+1} \cap \ldots \cap M_t \cap \\ \cap Q(M_1 \cap \ldots \cap M_S) = M_{S+1} \cap \ldots \cap M_t \cap QH_1(M_1 \cap \ldots \cap M_S) = M_{S+1} \cap \ldots \cap M_t \cap \\ \cap Q(M_2 \cap \ldots \cap M_S \cap H_1M_1) = \ldots = M_{S+1} \cap \ldots \cap M_i \supseteq E,$$

т.е. A_i покрывает E/Q. Итак, A_i изолирует G-главные факторы, G-изоморфные G-главным факторам из C_i/R_i и покрывает остальные факторы ряда (α). Подгруппа B_i, в силу леммы 6 имеет аналогичное свойство покрытия-изолирования. Значит, $|A_i| = |B_i|$ и ввиду (3) теперь верно, что

$$B_i = A_i = M_1 \cap \ldots \cap M_t. \tag{4}$$

Указанные выше рассуждения справедливы для любого $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$, т.е. (4) верно для любого $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$. Следовательно, справедливо

$$L = B_1 \cap \ldots \cap B_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n = M_1 \cap \ldots \cap M_S.$$

Здесь M_1, $M_2,\ldots$, M_S – дополнения к нефраттиниевым абелевым $\mathfrak{F}$-центральным факторам ряда (α) ровно по одному дополнению для каждого такого фактора ряда (α).

Пусть H/K – абелевый нефраттиниев $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G ряда (α). Для некоторого $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$ H/K есть G-изоморфен G-главным факторам C_i/R_i. Тогда ввиду леммы 6 $B_i \cap M \subseteq K$. Отсюда следует, что $L \cap H \subseteq K$, т.е. L изолирует H/K.

Пусть теперь H/K либо фраттиниев, либо не является абелевым нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором. Покажем, что $L = B_1 \cap \ldots \cap B_n = M_1 \cap \ldots \cap M_S$ покрывает H/K в этом случае. Допустим, что $H \subseteq M_k$ для любого $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Тогда ясно, что L покрывает H/K. Пусть теперь $M_1, \ldots, M_l$ не содержит H, а $M_{l+1}, \ldots, M_S$ содержат H. Пусть для определенности M_1 дополняет H_1/K_1, M_2 дополняет H_2/K_2 и так далее. Применяя тождество Дедекинда, получим

$$K(M_1 \cap \ldots \cap M_l) = KH_1(M_1 \cap \ldots \cap M_l) = K(M_2 \cap \ldots \cap M_l \cap H_1M_1) = K(M_2 \cap \ldots \cap M_l) =$$
$$= KH_2(M_2 \cap \ldots \cap M_l) = K(M_3 \cap \ldots \cap M_l \cap H_2M_2) = K(M_3 \cap \ldots \cap M_l) = \ldots = KH_lM_l) = G.$$

Имеем,

$$K(M_1 \cap \ldots \cap M_S) = K(M_1 \cap \ldots \cap M_l \cap M_{l+1} \cap \ldots \cap M_S) =$$
$$= M_{l+1} \cap \ldots \cap M_S \cap K(M_1 \cap \ldots \cap M_l) = M_{l+1} \cap \ldots \cap M_S \supseteq H,$$

т.е. L покрывает H / K. Поскольку (α) – произвольный главный ряд группы G, то доказательство утверждения 1 завершено.

2. Пусть $B = B_1 \cap \ldots \cap B_n$ и $L = L_1 \cap \ldots \cap L_n$ – две произвольные $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевы подгруппы группы G. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Допустим, что N не является абелевым нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором. Тогда в силу леммы 6 имеем: $N \subseteq B_1 \cap \ldots \cap B_n$ и $N \subseteq L_1 \cap \ldots \cap L_n$, т.е. $N \subseteq B$ и $N \subseteq L$. Очевидно, что в этом случае B/N и L/N являются $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевыми подгруппами в G/N. По индукции $(B/N)^{gN} = L/N$, $g \in G$. Отсюда следует, что $B^g = L$. Пусть теперь N является абелевым нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором и пусть для определенности N G-изоморфна G-главным факторам из C_1/R_1. Тогда $N \subseteq B_2 \cap \ldots \cap B_n$ и $N \subseteq L_2 \cap \ldots \cap L_n$ и, кроме того, $(B_2 \cap \ldots \cap B_n) / N$ и $(L_2 \cap \ldots \cap L_n) / N$ сопряжены в G/N. Отсюда следует, что $B_2 \cap \ldots \cap B_n = (L_2 \cap \ldots \cap L_n)^x$. Далее, в силу леммы 4 верно, что $B_1 = L_1^y$. Теперь, поскольку B_1 изолирует G-главные факторы, G-изоморфные G-главным факторам из C_1/R_1, и покрывает остальные, то $B_1N = G$. Ввиду того, что $N \subseteq B_2 \cap \ldots \cap B_n$ ясно, что $B_1(B_2 \cap \ldots \cap B_n) = G$. Теперь по лемме 5 видим, что $B_2 \cap \ldots \cap B_n \cap B_1 = B$ и L сопряжены в G. Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ – класс всех конечных групп. Тогда из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие 1. В любой конечной группе существует подгруппа, которая изолирует все абелевые нефраттиниевы и покрывает остальные главные факторы группы. Если, кроме того, группа разрешима, то все такие подгруппы сопряжены.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, тогда справедливо следующее

Следствие 2. В любой конечной группе существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы центральные главные факторы группы и покрывает остальные главные факторы группы. Если группа разрешима, то все такие подгруппы сопряжены.

Если $\mathfrak{F}$ – формация всех сверхразрешимых групп, то получаем следующее

Следствие 3. В любой конечной группе существует подгруппа, которая изолирует все абелевы нефраттиниевы циклические главные факторы и покрывает остальные главные факторы группы. Если группа разрешима, то все такие подгруппы сопряжены.

Теорема 2. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Тогда и только тогда A / N является $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевой подгруппой группы G / N, когда в G найдется такая $\mathfrak{F}$-квазифраттиниева подгруппа B, что $A / N = BN / N$.*

Доказательство. Достаточность. Покажем сначала, что BN/N входит в некоторую $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевую подгруппу группы G/N. Если группа G/N не имеет абелевых нефраттиниевых $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов, то очевидно, BN / N входит в $\mathfrak{F}$-квазифраттиниеву подгруппу. Пусть G/N имеет абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы. Пусть $(C_i/N)/(R_i/N)$ – $\mathfrak{F}$-центральная корона в G/N и пусть M/N – такая максимальная в G/N подгруппа, которая дополняет некоторый (G/N)-главный фактор $(H/N) / (K/N)$ из $(C_i/N)/(R_i/N)$. Тогда M – максимальная подгруппа группы G, которая дополняет G-главный фактор H/K. Пусть C/R – (H/K)-корона группы G. Тогда $R \subseteq M$, $RK \subseteq M$, $RH \subseteq M$ и по лемме 1 RH/RK есть G-главный фактор. Итак, M дополняет некоторый G-главный фактор из C/R. В G найдется такая максимальная подгруппа D, что $D_G = M_G$ и $B \subseteq D$. Ядра подгрупп M/N и DN/N в G/N совпадают. Таким образом, в G/N найдется такое дополнение к короне $(C_i/N)/(R_i/N)$, которое содержит BN/N. Следовательно, в G/N найдется такая $\mathfrak{F}$-квазифраттиниева подгруппа L/N, что $BN/N \subseteq L/N$. Покажем теперь, что BN/N изолирует абелевы нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-центральные и покрывает остальные (G/N)-главные факторы. В самом деле, пусть $(H/N) / (K/N)$ – такой фактор. В силу следующего G-изоформизма $(H/N) / (K/N) \cong H/N$ справедливо, что H/N – абелев $\mathfrak{F}$-центральный G-главный фактор. Ясно, что он нефраттиниев. Ввиду утверждения 1 теоремы 1 получим, что $H \cap B \subseteq K$. Следовательно, $(H \cap B)N/N = (H \cap BN) / N = (H / N) \cap (BN / N) \subseteq K / N$, а это означает, что BN / N изолирует $(H/N) / (K/N)$.

Если же $(H/N) / (K/N)$ не является абелевым нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-центральным G-главным фактором, то и H/K не является абелевым нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором. Значит, В покрывает H/K, т.е. $H \subseteq BK$. Отсюда следует, что $H/K \subseteq BK / N = BKN / N = (BN/N)(K/N)$, а это означает, что BN / N покрывает $(H/N) / (K/N)$. Итак, подгруппы BN / N и L/N имеют одинаковое свойство покрытия-изолирования и учитывая, что $BN / N \subseteq L/N$, заключаем, что BN / N является $\mathfrak{F}$-квазифраттиниевой подгруппой группы G/N.

Необходимость. Пусть $(H/N) / (K/N)$ – произвольный абелев нефраттиниев $\mathfrak{F}$-центральный (G/N)-главный фактор. Покажем, что если $(G/N) / (R/N)$ – произвольная $\mathfrak{F}$-центральная $(H/N) / (C/N)$-корона, то для любого дополнения L/N к этой короне справедливо, что $L/N \supseteq FN/N$, где F – некоторое дополнение к (H/K)-короне в G. Действительно, пусть $R/N = Q_0N \subset Q_1/N \subset \ldots \subset Q_m = C/N$ – участок G-главного ряда. Покажем, что в G/N найдутся такие максимальные подгруппы M_1/N, $M_2/N, \ldots, M_m/N$, что $L/N = M_1/N \cap \ldots \cap M_m/N$ и, кроме того, M_i/N дополняет в G/N фактор $(Q_i/N) / (Q_{i-1}/N)$. Пусть H_1/N, $H_2/N, \ldots, H_m/N$ – такие максимальные подгруппы, что H_i/N дополняет фактор $(Q_i/N) / (Q_{i-1}/N)$, $i = 1, 2, \ldots$, n . Аналогично, как в лемме 6, можно показать, что в G/N найдется такая максимальная подгруппа M_i/N, что $L/N \subseteq M_i/N$ и M_i/N и L/N имеют равные ядра в G/N. Понятно, что M_i/N дополняет фактор $(Q_i/N) / (Q_{i-1}/N)$ и, кроме того, нетрудно показать, что $L/N = M_1/N \cap \ldots \cap M_m/N$. Пусть C_1/R_1 – (H/K)-корона в G. Поскольку $C_G(H/K) / N = C_{G/N}((H/N) / (K / N))$, то $C_1 = C$. Ясно, что $R_1 \subseteq R$. Если $R_1 = R$, то L – дополнение к короне C/R, т.е. доказываемое утверждение в этом случае очевидно. Пусть $R_1 \neq R$ и $R_1 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_l = R \subset Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_m = C$ – участок главного ряда группы G. Пусть K_1, $K_2, \ldots, K_l$ – такие максимальные подгруппы в G, что K_i дополняет фактор V_i / V_{i-1}. Пусть $F = K_1 \cap \ldots \cap K_l \cap M_1 \cap \ldots \cap M_m$. Легко видно, что $FC = G$ и $F \cap C = R_1$, т.е. F – дополнение к C/R_1 в G. При этом поскольку $M_1 \cap \ldots \cap M_m = L$, то ясно, что $FN/N \subseteq L/N$.

Покажем теперь, что если A/N – произвольная $\mathfrak{F}$-квазифраттиниева подгруппа в G/N, то в G найдется такая $\mathfrak{F}$-квазифраттиниева подгруппа T, что $A/N = TN/N$. Пусть $(C_1/N)/(R_1/N),\ldots,(C_t/N)/(R_t/N)$ – все $\mathfrak{F}$-центральные короны в G/N, причем $A/N = L_1/N \cap \ldots \cap L_t/N$ – дополнение в G/N к короне $(C_i/N)/(R_i/N)$ и $(C_i/N)/(R_i/N)$ является $(H_i/N)/(K_i/N)$-короной, $i = 1,\ldots, t$. Пусть C_i^*/R_i^* – (H_i/K_i)-корона группы G, $i = 1,\ldots, t$. Ввиду доказанного выше, для каждого $i \in \{1,\ldots, t\}$ найдется дополнение F_i к короне C_i^*/R_i^* в G, что $F_iN/N \subseteq L_i/N$. Значит, выполняется включение $F_1N/N\ N/N \subseteq A/N$. Понятно, что $(F_1 \cap \ldots \cap F_t)N/N \subseteq F_1N/N \cap \ldots \cap F_tN/N$ и в группе G найдется такая $\mathfrak{F}$-квазифраттиниева подгруппа T, что $T \subseteq F_1 \cap F_2 \cap \ldots F_t$. Значит, $TN/N \subseteq A/N$. В силу теоремы 1 получаем требуемое равенство.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Hawkes T.O.*** Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Internat. Conf. Theory of Groups. – Comberra. – 1965, N. Y. – 1967. – P. 145–150.
2. ***Gaschütz W.*** Praefrattinigruppen // Arch. Math., 1962, b. 13, № 3. – S. 418–426.
3. ***Шеметков Л.А., Скиба А.Н.*** Формации алгебраических систем. – М., 1989. – 253 с.
4. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. – М., 1978. – 271 с.
5. ***Гойко В.И.*** Исследование свойств $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп конечных групп // Веснік ВДУ, 2005, № 4(38). – С. 92–98.
6. ***Скиба А.Н.*** Характеризации конечных метанильпотентных групп // Матем. заметки, 1980. – Т. 27, № 3. – С. 345–351.
7. ***Carter R., Fisher B., Hawkes T.*** Extrime classes of a finite soluble groups // J. Algebra, 1967. – V. 9, № 3. – P. 285–313.

S U M M A R Y

The class of conjugacy subgroups in finite groups are constructed and the main properties of it are investigated.

Поступила в редакцию 14.08.2006