УДК 512.544

Ф.Н. Лиман, Т.Д. Лукашова

О норме бесконечных циклических подгрупп непериодических групп

В современной теории групп важное место занимают результаты, связанные с изучением групп, в которых те или иные подгруппы или их системы удовлетворяют некоторым, наперед заданным условиям. К этому направлению относятся исследования, в которых ограничения накладываются не на сами подгруппы выделенной системы Σ, а на их нормализаторы и соответствующие Σ-нормы.

Напомним, что Σ-нормой называют пересечение нормализаторов всех подгрупп, входящих в некоторую непустую систему подгрупп Σ данной группы. Ясно, что Σ-норма является характеристической подгруппой группы и содержит центр группы.

При рассмотрении Σ-норм возникает ряд проблем, связанных с исследованием свойств группы при заданной системе подгрупп Σ и ограничениях, накладываемых на эту Σ-норму. Такого рода задачи решались многими алгебраистами, но в большинстве исследований в роли Σ-нормы выступала вся группа g, то есть изучались группы с системами нормальных подгрупп Σ (см., например, [1–7]).

Поэтому естественно было бы рассмотреть более общую ситуацию и исследовать группы, в которых Σ-норма является некоторой, в частности, собственной, подгруппой. Впервые это было сделано Р. Бером [8] еще в 30-х годах прошлого столетия для системы всех (циклических) подгрупп группы. Соответствующую Σ-норму он назвал нормой группы.

В непериодических группах понятие нормы группы может быть естественным образом обобщено.

Определение. *Пересечение нормализаторов всех бесконечных циклических подгрупп непериодической группы G будем называть нормой бесконечных циклических подгрупп этой группы и обозначим ее $N_G(C_\infty)$.*

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работах [9, 10] и изучаются свойства нормы бесконечных циклических подгрупп, а также взаимосвязи между строением группы и ограничениями, которые накладываются на эту норму. В качестве таких ограничений выбираются неабелевость указанной нормы и конечность ее индекса в группе.

Очевидно, что в непериодической группе G, совпадающей со своей нормой $N_G(C_\infty)$, инвариантны все бесконечные циклические подгруппы. Строение непериодических неабелевых групп, обладающих таким свойством, описывает следующее утверждение.

Лемма 1. *В непериодической неабелевой группе G тогда и только тогда инвариантны все бесконечные циклические подгруппы, когда*

$$G = A\langle b\rangle,$$

где A – непериодическая абелева группа, $b^2 \in A$, $b^4 = 1$ и $b^{-1}ab = a^{-1}$ для произвольного элемента $a \in A$.

Доказательство. Пусть в G инвариантны все бесконечные циклические подгруппы и a – произвольный элемент бесконечного порядка группы G. Обозначим через $A=C_G(a)$ его централизатор в G. Очевидно, что $A\triangleleft G$ и $[G:A] \leq 2$. Покажем, что подгруппа A абелева.

Пусть $x,y \in A$. Если $|x| = |y| = \infty$, то из условий $\langle x\rangle\triangleleft G$, $\langle y\rangle\triangleleft G$ следует, что $[x,y] = 1$. Если же $|x| < \infty$ или $|y| < \infty$, то $|xa| = \infty$ (соответственно $|ya| = \infty$) и $[y,x] = [x,ya] = [ax,y] = [ax,ya] = 1$. Поскольку группа G неабелева, то ее центр не содержит ни одного элемента бесконечного порядка и $[G:A] = 2$.

Пусть b – произвольный элемент группы G, не принадлежащий A. Тогда $b^2\in A$ и $|b| < \infty$. Если $x \in A$ и $|x| = \infty$, то $b^{-1}xb = x^{-1}$ по доказанному ранее. В случае $|x| < \infty$, $|xa| = \infty$ и $b^{-1}xab = (xa)^{-1} = x^{-1}a^{-1}$. С другой стороны, $b^{-1}xab = b^{-1}xba^{-1}$, т.е. $b^{-1}xb = x^{-1}$ для любого элемента $x \in A$.

Обозначим z – произвольный центральный элемент из $Z(G)$. Тогда из условий $|za| = \infty$ и $b^{-1}zab = (za)^{-1} = za^{-1}$ следует, что $|z| = 2$, а раз так, то $|b| \leq 4$ и необходимость условий леммы доказана.

Их достаточность следует из того, что A содержит все бесконечные циклические подгруппы. Лемма доказана.

Следствие 1. *Произвольная группа без кручения, в которой нормальны все бесконечные циклические подгруппы, абелева.*

Теорема 1. *Если G – группа без кручения, то ее норма бесконечных циклических подгрупп совпадает с центром Z(G).*

Доказательство. Предположим, что $N_G(C_\infty) \neq Z(G)$. Тогда существуют такие элементы $x \in N_G(C_\infty)$ и $y \in G$, что $[x,y] \neq 1$. Далее, учитывая определение подгруппы $N_G(C_\infty)$, получим $x^{-1}yx = y^{-1}$. Следовательно, $\langle x\rangle \bigcap \langle y\rangle = E$ и $[x^2,y] = 1$. Поскольку подгруппа $\langle x^2y\rangle$ – x-инвариантна, то $x^{-1}x^2yx = x^{-2}y^{-1} = x^2y^{-1}$. Но в таком случае $x^4 = 1$, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие 2. *Произвольная группа G без кручения, являющаяся конечным расширением нормы $N_G(C_\infty)$ бесконечных циклических подгрупп, абелева.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $N_G(C_\infty) = Z(G)$, поэтому $[G:Z(G)] < \infty$. Как известно, в таком случае $|G'| < \infty$, откуда $G' = E$ и G – абелева группа.

Перейдем к изучению нормы бесконечных циклических подгрупп в смешанных непериодических группах. Следующие примеры показывают, что норма $N_G(C_\infty)$ может быть центральной, абелевой нецентральной и недедекиндовой подгруппой группы.

Пример 1. $G=H\times\langle a\rangle$, $H=\langle h_1,h_2\rangle$, $|h_1|=|h_2|=4$, $h_1^2=h_2^2=[h_1,h_2]$, $|a| = \infty$.

В этой группе $N_G(C_\infty)=\langle h^2\rangle\times\langle a\rangle=Z(G)$.

Пример 2. $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\,\lambda\,\langle c\rangle$, $|a|=|b|=\infty$, $|c|=3$, $c^{-1}ac=b$, $c^{-1}bc=a^{-1}b^{-1}$.

Здесь $N_G(C_\infty)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ является нецентральной абелевой подгруппой, порожденной всеми элементами бесконечного порядка группы G.

Пример 3. $G=(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)\,\lambda\,\langle c\rangle$, $|a|=|b|=\infty$, $|c|=6$, $c^{-1}ac=ab$, $c^{-1}bc=a^{-1}$.

В этом случае $Z(G)=E$, $N_G(C_\infty)=(<a>\times<b>)\lambda<c^3>$ – непериодическая недедекиндова группа, а все бесконечные циклические подгруппы группы G содержатся в $<a,b>$.

Лемма 2. *Если центр $Z(G)$ непериодической группы G содержит элементы бесконечного порядка, то норма бесконечных циклических подгрупп $N_G(C_\infty)$ абелева и совпадает с центром $Z(G)$.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что норма $N_G(C_\infty)$ абелева. Пусть $x \in N_G(C_\infty)$, $y \in G$, $|y| = \infty$ и $[x,y] \neq 1$. Тогда $x^{-1}yx = y^{-1}$. Поскольку $N_G(C_\infty)$ – непериодическая абелева группа, она порождается элементами бесконечного порядка. Следовательно, можно полагать, что $|x| = \infty$. В силу предыдущего замечания $<x> \bigcap <y> = E$. Принимая во внимание, что $[x^2,y] = 1$ и учитывая x-инвариантность подгруппы $<x^2y>$, получим $x^{-1}x^2yx = x^{-2}y^{-1} = x^2y^{-1}$. Следовательно, $x^4=1$, что противоречит его выбору. Итак, $[x,y] = 1$ для произвольных элементов $x \in N_G(C_\infty)$ и $y \in G$, $|y| = \infty$.

Пусть теперь $|y| < \infty$. Тогда $|yz| = \infty$, где $z \in Z(G)$, $|z| = \infty$. Повторяя приведенные выше рассуждения для элемента yz, легко показать, что $[<y>,N_G(C_\infty)] = E$. Итак, $N_G(C_\infty)=Z(G)$, что и следовало доказать.

Следствие 3. *Если в непериодической группе G найдется такая бесконечная подгруппа $<x>$, что $<x> \cap N_G(C_\infty) = E$, то норма $N_G(C_\infty)$ абелева.*

Доказательство. Пусть $x \in G$ и $<x> \cap N_G(C_\infty) = E$. Тогда подгруппы $<x>$ и $N_G(C_\infty)$ инвариантны в группе $G_1 = N_G(C_\infty)<x>$ и $G_1 = N_G(C_\infty) \times <x>$. Тогда $x \in Z(G_1)$ и в силу леммы 2 норма $N_{G_1}(C_\infty)$ абелева. Следовательно, абелевой будет и группа $N_G(C_\infty) \subseteq N_{G_1}(C_\infty)$.

Следствие 4. *Пусть G – смешанная непериодическая группа. Тогда ее норма $N_G(C_\infty)$ бесконечных циклических подгрупп может быть абелевой (периодической или непериодической) группой, либо непериодической неабелевой группой.*

Далее будем рассматривать группы, имеющие неабелеву норму $N_G(C_\infty)$ бесконечных циклических подгрупп. В соответствии с леммой 1 в этом случае $N_G(C_\infty) = A<b>$, где A – непериодическая абелева группа, $b^4 = 1$, $b^2 \in A$ и $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.

Обозначим как D подгруппу, порожденную всеми элементами бесконечного порядка группы G. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Подгруппа D абелева и содержит все бесконечные циклические подгруппы из G.*

Доказательство. Пусть G – непериодическая группа и $N_G(C_\infty) = A<b>$ – ее норма бесконечных циклических подгрупп. Покажем сначала, что $A \leq Z(D)$.

Допустим противное. Тогда найдутся элементы $a \in A$ и $d \in D$, $|a| = |d| = \infty$ такие, что $[a,d] \neq 1$. Значит, $a^{-1}da = d^{-1}$ и $<a> \cap <d> = E$. Так как $[a^2, d] = 1$, то $|a^2d| = \infty$ и подгруппа $<a^2d>$ a-инвариантна. Следовательно, $a^{-1}a^2da = a^{-2}d^{-1} = a^2d^{-1}$ и $a^4 = 1$, что противоречит его выбору. Таким образом, $A \leq Z(D)$.

Учитывая, что норма $N_G(C_\infty)$ непериодична и повторяя предыдущие рассуждения, делаем вывод, что элемент b не перестановочен ни с одним элементом $d \in D$ бесконечного порядка. Значит, $b^{-1}db = d^{-1}$.

Нетрудно убедиться, что $b^{-1}hb = h^{-1}$ и для любого элемента $h \in D$, $|h| < \infty$. В самом деле, если $|h| < \infty$, то $|hz| = \infty$, где $z \in A$ и $|z| = \infty$. Поскольку подгруппа $\langle hz \rangle$ b-инвариантна, то $b^{-1}hzb = (hz)^{-1} = h^{-1}z^{-1} = b^{-1}hbz^{-1}$. Следовательно, $b^{-1}hb = h^{-1}$.

Предположим, что подгруппа D неабелева. Тогда существуют такие элементы $x \in D$, $y \in D$, что $[x, y] \neq 1$. Но в таком случае $b^{-1}xyb = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, $b^{-1}xyb = b^{-1}xbb^{-1}yb = x^{-1}y^{-1}$. Отсюда $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ и $[x,y] = 1$, что противоречит допущению. Таким образом, подгруппа D абелева и лемма доказана.

Теорема 2. *Норма $N_G(C_\infty)$ бесконечных циклических подгрупп непериодической группы G тогда и только тогда неабелева, когда все элементы бесконечного порядка группы G порождают инвариантную абелеву подгруппу D и существует элемент b порядка 2 или 4 такой, что $b^{-1}db=d^{-1}$ для любого элемента $d \in D$. При этом $N_G(C_\infty) = D\langle b \rangle$.*

Необходимость условий теоремы следует из леммы 3. Их достаточность очевидна.

Следствие 5. *Произвольная непериодическая группа G, являющаяся конечным расширением нормы $N_G(C_\infty)$, почти абелева.*

Следствие 6. *Если G – непериодическая группа, имеющая неабелеву норму $N_G(C_\infty)$, то фактор-группа $G/N_G(C_\infty)$ периодична.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dedekind R.** Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann., 1897. – 48. – P. 548–561.
2. **Черников Н.С.** Группы, в которых инвариантны все абелевы подгруппы, отличные от своих нормализаторов // Теоретико-групповые исследования. – Киев, 1978. – С. 117–127.
3. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн., 1967. – 19, № 6. – С. 111–131.
4. **Лиман Ф.М.** Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР, 1967. – 12. – С. 1073–1075.
5. **Лиман Ф.М.** Неперіодичні групи, всі абелеві підгрупи яких інваріантні // Допов. АН УРСР, 1969. – 1. – С. 11–13.
6. **Черников С.Н.** Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев, 1971. – С. 47–65.
7. **Черников С.Н.** Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн., 1971. – 23, № 5. – С. 604–628.
8. **Baer R.** Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math., 1934. – 1. – S. 254–283.
9. **Лиман Ф.М., Лукашова Т.Д.** Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп // Укр. мат. журн., 2001. – 53, № 5. – С. 625–630.
10. **Лиман Ф.Н., Лукашова Т.Д.** Обобщенные нормы непериодических групп // Известия Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. Вопросы алгебры, 2003, № 4(19). – С. 62–67.

SUMMARY

The authors study the non-periodic groups with non-abelian norm of the infinite cyclic subgroups. Under this condition, they determine connections between properties of such groups and their norms of the infinite cyclic subgroups.

Поступила в редакцию 14.08.2006