

УДК 373.545.016:512

Е.В. Лукашева

Основные этапы изучения линии уравнений в углубленном курсе алгебры 8–9 классов

Проведенный анализ процесса усвоения учащимися темы «Уравнения» показывает, что формирование навыков и умений, необходимых для успешного выполнения данной деятельности, начинает осуществляться в русле изучения отдельных приемов решения уравнений. Имеет место и обратная закономерность: для того чтобы учащиеся при решении трудной стандартной задачи имели возможность сосредоточить все свои силы, внимание, способности на осуществлении приема решения, они должны иметь полноценные

(прочные) умения и навыки в выполнении всех элементарных действий и операций, входящих в состав этого приема решения задач.

Процесс формирования навыков и умений продолжается при решении уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема. При этом формируются навыки выполнения тождественных преобразований, навыки устных вычислений и умения осуществлять определенную последовательность действий, приводящих заданное уравнение к виду, прием решения которого уже сформирован. Созданные навыки и умения найдут свое дальнейшее развитие при использовании сформированного приема решения определенного вида уравнений для решения других математических задач.

Согласно вышесказанному, основываясь на этапах процесса изучения тождественных преобразований, предложенных в диссертационном исследовании Н.А. Ряписова [1], также для удобства рассмотрения линии уравнений в процессе углубленного изучения курса алгебры 8–9 классов выделим следующую последовательность освоения приемов решения:

- непосредственное применение изучаемого приема решения уравнения;
- решение уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема;
- использование сформированного приема для решения других математических задач.

Благодаря выделению этапов изучения приемов существенно улучшается и упрощается методика изучения темы, построение системы упражнений, составленной в соответствии с уровнями усвоения учебного материала, а также выделение уровней сформированности умений и навыков учащихся.

По нашему мнению, процесс формирования навыков и умений начинается с третьего уровня усвоения учебного материала. Предлагаемые нами **уровни формирования навыков и умений** связаны с ними следующим образом:

- **репродуктивный** (соответствующий третьему уровню);
- **конструктивный** (достигается на четвертом уровне);
- **творческий** (соответствует пятому уровню).

В нашей работе будем исходить из четырехкомпонентной структуры содержания обучения (знания; умения и навыки; опыт творческой деятельности; опыт эмоционально-ценностного отношения к выполняемой деятельности). На наш взгляд, компонент «умения и навыки» содержания образования требует внесения уточнений, существенно влияющих как на методику обучения алгебре, так и на контроль усвоения учебного материала. Он должен иметь следующие **составляющие**: элементарные умения; навыки; обобщенные умения. Подобное разделение умений имеется у Т.И. Ильиной:

1) простые умения, связанные с действиями, «совершаемыми на основе конкретных знаний» [2];

2) умения «более высокого порядка», связанные с «более сложными действиями, в которые включаются целые системы знаний, простых умений и навыков» [2].

В каждом из вышеперечисленных этапов изучения линии решения уравнений можно выделить уровни сформированности умений и навыков учащихся (табл.).

Рассмотрим более подробно методические функции этапов формирования умений и навыков по применению приемов решения уравнений.

На **этапе непосредственного применения изучаемого приема решения уравнения** создается ориентировочная основа действия в виде определенного приема, формируются соответствующие умения и навыки, обеспечивающие решение поставленной задачи.

Целью данного этапа является создание за небольшой промежуток времени элементарных умений и навыков, обеспечивающих применение соответствующих приемов.

| Этапы изучения приемов решения уравнений | Уровни сформированности соответствующих умений и навыков |
|--|--|
| Непосредственное применение изучаемого приема решения уравнения | Репродуктивный |
| Решение уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема | Репродуктивный Конструктивный Творческий |
| Использование сформированного приема для решения других математических задач | Репродуктивный Конструктивный Творческий |

Перечислим **методические особенности** формирования элементарных умений и навыков на этапе непосредственного применения изучаемого приема решения уравнения:

- в первоначальный период постоянная опора на ориентировочную основу действия в виде приема решения данного вида уравнений;
- выполнение приема при неизменных или незначительно измененных условиях;
- акцент на существенные признаки выполняемого приема при варьировании несущественных признаков;
- появление ошибок;
- концентрация внимания и волевых усилий;
- выполнение проверки.

Важным **средством** формирования умений и навыков на всех этапах изучения приемов решения уравнений являются упражнения. На этапе непосредственного применения изучаемого приема решения уравнения на начальной стадии используются пробные упражнения, сопровождаемые комментированием или кратким обоснованием, затем переходят к тренировочным упражнениям по образцу, по инструкции и по представлению.

Примерами упражнений, выполнение которых свидетельствует о сформированности навыков и умений решения уравнений на этапе непосредственного применения изучаемого приема решения уравнения, могут быть следующие задания.

Для репродуктивного уровня (см. табл.):

1) Найдите дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

в) $2x^2 - 7x + 6 = 0$;

г) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

2) С помощью формул $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ найдите, если мож-

но, корни уравнений, предложенных в № 1.

3) Решите уравнение:

а) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

б) $x^2 - 3x - 4 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

г) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

4) Решите уравнение:

а) $3y^2 - 10y + 3 = 0$;

б) $t^2 - 1\frac{1}{2}t + \frac{3}{8} = 0$;

в) $2c^2 - 3,1c + 0,42 = 0$;

г) $2k^2 + 5\sqrt{3}k + 11 = 0$.

Процессу прохождения данного этапа нужно уделять особое внимание и достаточное количество времени, поскольку именно здесь закладываются

основы правильного, уверенного и рационального применения формируемого приема на дальнейших этапах. Прохождение первого этапа является опорным в системе формирования умений и навыков линии решения уравнений. Для учителя своеобразным показателем перехода к следующему этапу формирования умений и навыков должна выступать обратная связь, показывающая, насколько успешно идет усвоение учебного материала.

На этапе **решения уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема**, важно создать устойчивую базу в виде актуализированных знаний и сформированных навыков школьников. В частности, при изучении темы «Квадратные уравнения» такими навыками будут навыки решения квадратных уравнений, выполнения тождественных преобразований.

Цель данного этапа – формирование у школьников умения выполнять некоторую последовательность преобразований в исходном уравнении, приводящих к уравнению, решаемому с помощью известного приема.

Методические особенности формирования умений и навыков на этапе решения уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема:

- уверенное применение формируемого приема;
- активное привлечение таких интеллектуальных умений, как умения сравнивать, анализировать, выделять главное, существенное, классифицировать и др.;
- привлечение умений выполнять тождественные преобразования;
- использование умений выполнять равносильные переходы при решении уравнений;
- постоянный контроль мышления;
- умение относить уравнение к одному из известных видов уравнений.

Основным **средством** формирования умений и навыков на данном этапе, как и на предыдущем, являются упражнения. Характерными для данного этапа в зависимости от уровня сформированности умений будут сначала пробные, а затем тренировочные упражнения. Высшим показателем сформированности умений и навыков на этом этапе служит выполнение учащимися как стандартных, так и нестандартных упражнений.

Этап решения уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема, является важным в осмыслении сути, возможностей, исследования рассматриваемого вида уравнений.

Несмотря на сформированный прием решения определенного вида уравнений, у учащихся этот этап изучения линии решения уравнений вызывает многочисленные затруднения. Такая ситуация возникает из-за усложнения математической деятельности, при осуществлении которой учащемуся необходимо:

- определить, к какому виду уравнений относится предложенное уравнение;
- привести уравнение к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$;
- осуществить анализ левой части уравнения;
- вычленить его элементы и определить логическую последовательность этих элементов;
- записать полученное уравнение в стандартном виде;
- применить к полученному уравнению усвоенный прием решения данного типа задач;
- при необходимости проверить правильность проведенных выкладок.

Подготовка к такой сложной математической деятельности, а затем и ее осуществление должны быть специально организованы. Здесь же должны выделяться четкие ориентиры и инструкции, позволяющие учащимся распознать и отнести предложенное уравнение к определенному виду, прием решения которых уже сформирован.

Рассмотреть в виде образцов весь спектр упражнений, включающих комбинации сформированных навыков и вновь созданного навыка, используемых на

данном этапе, достаточно сложно и нецелесообразно, поскольку это приводит к уменьшению доли самостоятельной работы учащихся и мало способствует развитию исследовательской деятельности школьников. Поэтому необходимо отобрать наиболее типичные, существенные примеры, которые можно представить в виде образцов. Например, изучая квадратные уравнения, наиболее существенными при выполнении комбинированных упражнений являются:

- 1) навыки решения квадратных уравнений;
- 2) навыки выполнения тождественных преобразований.

Примерами упражнений, выполнение которых свидетельствует о сформированности навыков и умений решения уравнений на этапе решения уравнений, сводящихся к уравнению, решаемому с помощью известного приема, могут быть следующие задания:

Для репродуктивного уровня (см. табл.):

1) Решите уравнение:

а) $12x - 4x^2 = 9$;

б) $(x - 1)(x + 1) - 4x = -6$;

в) $(x - 2)(12 - x) = 9$;

г) $2 - x(x - 12) = 2x + 5$.

2) Найдите корни уравнения:

а) $(x^2 - 7x + 6)(-2x^2 + x + 15) = 0$;

б) $(x^2 - 4x + 1)(-2x^2 + 3x + 4) = 0$.

Для конструктивного уровня (см. табл.):

1) Установите, имеет ли уравнение корни одного знака:

а) $7x^2 - 193x - 15 = 0$;

б) $5x^2 - 214x - 14 = 0$.

2) Решите уравнение:

а) $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 1 = 0$;

б) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$.

3) Составьте квадратное уравнение, имеющее корнями следующие числа:

а) 4 и 2; б) -2,4 и -2,4; в) $\sqrt{2} + 1$ и $\sqrt{2} - 1$; г) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ и $\frac{-\sqrt{2}-1}{3}$.

Для творческого уровня (см. табл.):

1. Задания на применение стандартных приемов, недостаточно полно используемых на уроках алгебры, но применяемых на последующих этапах обучения математике.

Например, «Сравните меньший корень уравнения $x^2 - 14x + 28 = 0$ с большим корнем уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$ ». (Сравниваются корни $x_M = 7 - \sqrt{21}$ и $x_B = 1 + \sqrt{2}$).

2. Задания, формирующие умения учащихся решать уравнения с модулем.

Например, «Решите уравнение: $x^2 - 6x + |x - 4| + 8 = 0$ ».

3. Задания, формирующие умения решать уравнения с параметром.

Например, «При каком целом значении параметра a корни квадратного уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку $[0;3]$?»

Заключительным этапом выработки навыков и умений решения уравнений является **использование сформированного приема для решения других математических задач**. Этот этап во многом «отвечает» за ориентировочно-мотивационную сторону деятельности учащихся по освоению приема. Поскольку на предыдущих этапах изучения линии решения уравнений главной целью обучения являлось формирование формально-оперативных навыков. Основное внимание уделялось технике выполнения формируемого приема, преобладающей была операционально-исполнительная и рефлексивно-оценочная стороны деятельности.

Но каждый из четырех компонентов содержания образования оказывает большое влияние друг на друга [3]:



На данном этапе на формирование навыков и умений оказывают существенное влияние имеющиеся знания (поскольку происходит расширение круга решаемых задач), опыт творческой деятельности (поскольку решение большинства задач в курсе углубленного изучения алгебры на данном этапе носит творческий характер) и опыт эмоционально-ценностного отношения к совершаемой деятельности (на данном этапе можно показать применение формируемого приема к решению широкого круга математических задач, важность его освоения).

Цели данного этапа – расширить возможности учащихся в изучении углубленного курса алгебры, создать мотивационную основу для дальнейшего изучения и применения формируемого приема, показать эстетическую красоту решения алгебраических задач (в частности, решения уравнений) с помощью имеющегося набора приемов.

Методические особенности формирования умений и навыков на этапе использования сформированного приема для решения других математических задач:

- ведущее значение таких интеллектуальных умений, как умения сравнивать, анализировать, выделять главное, существенное, классифицировать и др.;
- видение структуры предложенной задачи;
- привлечение умений обозначать неизвестное и сопряженные с ним компоненты буквами;
- использование умений составлять уравнение по текстовой задаче;
- использование умения переводить с языка задачи на символический язык и обратно;
- уверенное владение всеми необходимыми приемами решения уравнений;
- владение умением выполнять проверку на достоверность полученных решений уравнения.

Средством формирования умений и навыков на данном этапе, как и на предыдущих этапах, являются упражнения. Характерными для данного этапа в зависимости от уровня сформированности умений будут пробные упражнения. Пройдя через тренировочные упражнения, наибольший отрезок времени следует уделить выполнению учащимися как стандартных, так и нестандартных, творческих упражнений.

Примерами упражнений, выполнение которых свидетельствует о сформированности навыков и умений решения уравнений на этапе использования сформированного приема для решения других математических задач, могут быть следующие задания:

Для репродуктивного уровня (см. табл.):

- 1) Найдите координаты точки пересечения с осью Oy графика функции:
 - а) $y = 2x^2 + 5x + 2$;
 - б) $y = -x^2 + x + 2$.

2) Найдите область определения функции, заданной формулой:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

3) Постройте график функции $y = -x^2 - 4x + 5$.

Для конструктивного уровня (см. табл.):

1) Найдите область определения функции, заданной формулой:

$$а) y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}};$$

$$б) y = \frac{\sqrt{-x^2 + 5x + 6}}{x}.$$

2) В однокруговом шахматном турнире было сыграно 105 партий. Сколько человек участвовало в соревновании?

3) Какое наименьшее значение может принимать функция, заданная формулой:

$$а) y = \frac{16}{x^2 - 12x + 40};$$

$$б) y = \frac{20}{-x^2 + 14x - 45}?$$

Для творческого уровня (см. табл.):

1) Найдите значения параметра a , при которых график квадратичной функции $y = ax^2 - 6x + 7$ пересекает ось Ox в двух различных точках.

2) Постройте график квадратного трехчлена $y = 2x^2 - (c + 2)x + c$, если

известно, что его корни связаны соотношением $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

Благодаря представлению процесса изучения приемов решения уравнений в виде этапов, происходит упорядочение, упрощение этого процесса, а значит существенно совершенствуется методика формирования умений и навыков учащихся, становится прозрачной для школьников последовательность усвоения учебного материала, цепочка усваиваемых знаний представляет собой логическую взаимосвязь изучаемых объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ряписов Н.А.** Совершенствование методики формирования навыков тождественных преобразований при изучении алгебры в 6–7 классах. Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – М., 1987. – С. 9.
2. **Ильина Т.А.** Педагогика: Курс лекций. – М., 1984. – С. 220.
3. **Берулава М.Н.** Теоретические основы интеграции образования. – М., 1998. – С. 44.

S U M M A R Y

The logic of studying the lines of solving equations in the course of profound study of algebra in 8–9 forms is considered in the article. The author proposes the successive stages of assimilation and mastering the material studied.

Поступила в редакцию 1.03.2005