

Композиционные формации с условием дополняемости

Н.Н. Воробьев*, А.П. Мехович**

*Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

**Учреждение образования «Витебский государственный университет
им. П.М. Машерова»

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = (1)$. Символом $\bigotimes_{i \in I} \mathbf{F}_i$ обозначают (А.Н. Скиба, 1997) класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ где $A_1 \in \mathbf{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathbf{F}_{i_2}$, ..., $A_r \in \mathbf{F}_{i_r}$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$.

Для произвольной формации $\mathcal{F}$ через $L(\mathbf{F})$ обозначают решетку всех подформаций формации $\mathcal{F}$. Если же $\mathcal{F}$ – p -композиционная формация, то через $L_{c_p}(\mathbf{F})$ обозначают решетку всех p -композиционных подформаций p -композиционной формации $\mathcal{F}$.

В настоящей работе описаны p -композиционные формации, у которых каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathbf{F})$ дополняем в решетке $L(\mathbf{F})$. В частности, доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ – p -композиционная формация, $\mathcal{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathbf{F})$ дополняем в решетке $L(\mathbf{F})$;
- 2) $\mathcal{F} = \bigvee \bigotimes \text{form } A_1 \otimes \text{form } A_2 \otimes \dots \otimes \text{form } A_r$ где $A_1, A_2, \dots, A_r$ – простые неабелевы группы.

Ключевые слова: p -композиционная формация, дополняемая подформация, атом решетки, прямое разложение классов групп, решетка всех формаций, решетка всех p -композиционных формаций.

Composition formations with complementability condition

N.N. Vorobyev*, A.P. Mekhovich**

*Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

**Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

All groups considered are finite. Let $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$ be a system of non-empty classes of groups such that $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = (1)$ for all distinct $i, j \in I$. The symbol $\bigotimes_{i \in I} \mathbf{F}_i$ denotes (A.N. Skiba, 1997) the class of groups $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r$ where $A_1 \in \mathbf{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathbf{F}_{i_2}$, ..., $A_r \in \mathbf{F}_{i_r}$ for some $i_1, i_2, \dots, i_r \in I$.

Let $\mathcal{F}$ be a formation. The symbol $L(\mathbf{F})$ denotes the lattice of all subformations of $\mathcal{F}$. If $\mathcal{F}$ is a p -composition formation, then the symbol $L_{c_p}(\mathbf{F})$ denotes the lattice of all p -composition subformations of $\mathcal{F}$.

In this paper p -composition formations such that every atom of $L_{c_p}(\mathbf{F})$ is complemented in $L(\mathbf{F})$ are described. In particular, we prove the following theorem.

Theorem. Let $\mathcal{F}$ be a p -composition formation, $\mathcal{F} \neq (1)$. The following conditions are equivalent:

- 1) every atom of the lattice $L_{c_p}(\mathbf{F})$ is complemented in the lattice $L(\mathbf{F})$;
- 2) $\mathcal{F} = \bigvee \bigotimes \text{form } A_1 \otimes \text{form } A_2 \otimes \dots \otimes \text{form } A_r$ where $A_1, A_2, \dots, A_r$ are simple nonabelian groups.

Key words: p -composition formation, complemented subformation, atom of a lattice, direct decomposition of classes of groups, the lattice of all formations, the lattice of all p -composition formations.

Все рассматриваемые нами группы конечны. Используется стандартная терминология [1–4].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В теории решеток классов групп многие исследования связаны с изучением дополняемых подформаций. Понятие дополняемой подформации введено в работе А.Н. Скибы [5], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы.

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathcal{X}$, обозначают $\text{form } \mathcal{X}$ и называют *формацией, порожденной $\mathcal{X}$* . В частности, пишут $\text{form } G$ в случае, когда $\mathcal{X} = \{G\}$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* [1]. Подформация $\mathcal{M}$ формации $\mathcal{F}$ называется *дополняемой в $\mathcal{F}$* [5], если $\mathcal{M}$ дополняема в решетке подформаций формации $\mathcal{F}$, т.е. если в $\mathcal{F}$ имеется такая подформация $\mathcal{N}$ (*дополнение к $\mathcal{M}$ в $\mathcal{F}$*), что

$$\mathcal{F} = \text{form } (\mathcal{M} \vee \mathcal{N}) \text{ и } \mathcal{M} \wedge \mathcal{N} = (1).$$

Изучение формаций с системами дополняемых подформаций проводилось в работах многих других авторов (см., в частности, [1, 6–8]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла конструкция прямого разложения классов групп.

Пусть $\{\mathcal{F}_i | i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = (1)$. Следуя [1], через $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ мы обозначаем класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathcal{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathcal{F}_{i_2}$, ..., $A_t \in \mathcal{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$. В частности, если $I = \{1, 2, \dots, t\}$, то пишем $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_t$. Такая конструкция ранее изучалась в работах [9–10]. Всякое представление класса групп $\mathcal{F}$ в виде $\mathcal{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ называется *прямым разложением* этого класса. Заметим, что впервые конструкция прямого разложения классов групп возникла в [3, определение 17.6]. В неявном виде данная конструкция использовалась в [6; 8] (см. также [2, с. 670]). Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении ряда открытых вопросов теории групп и при построении формаций с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим работы [8; 11], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля–Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций $\mathcal{F}$ для которых множество всех $\mathcal{F}$ -субнормальных подгрупп каждой конечной группы образует подрешетку решетки всех подгрупп группы и монографию А.Н. Скибы [1], где прямые разложения классов

групп нашли применение при решении многих открытых задач теории формаций конечных групп.

Пусть p – некоторое простое число, тогда символ p' обозначает множество всех простых чисел, отличных от p . Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G , $\pi(\mathcal{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп $\mathcal{X}$. Символами $R_p(G)$, $C^p(G)$ обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая p -подгруппа группы G и пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , у которых композиционные факторы имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в группе G нет таких факторов). Через $\mathcal{N}$, $\text{Com}(\mathcal{X})$ обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп и класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathcal{X}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \{p, p'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (*)$$

Следуя [4], сопоставим функции f вида (*) класс групп

$$CF_p(f) = (G | G/R_p(G) \in f(p') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\text{Com}(G))).$$

Если формация $\mathcal{F}$ такова, что $\mathcal{F} = CF_p(f)$ для некоторой функции f вида (*), то $\mathcal{F}$ называется *p -композиционной формацией с p -композиционным спутником f* [4].

Элемент a решетки с нулем L называется *атомом*, если для любого $x \in L$ из $0 < x \leq a$ следует, что $x = a$ (т.е. если a покрывает наименьший элемент 0).

Для произвольной формации $\mathcal{F}$ через $L(\mathcal{F})$ обозначают решетку всех подформаций формации $\mathcal{F}$. Если же $\mathcal{F}$ – p -композиционная формация, то через $L_{c_p}(\mathcal{F})$ обозначают решетку всех p -композиционных подформаций p -композиционной формации $\mathcal{F}$. Символ c_p обозначает решетку всех p -композиционных формаций.

Целью данной работы является описание p -композиционных формаций, у которых каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathcal{F})$ дополняем в решетке $L(\mathcal{F})$. На пути достижения поставленной цели доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F}$ – p -композиционная формация, $\mathcal{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:

1) каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathcal{F})$ дополняем в решетке $L(\mathcal{F})$;

2) $\mathcal{F} = \bigvee \otimes \text{form } A_1 \otimes \text{form } A_2 \otimes \dots \otimes \text{form } A_r$, где $A_1, A_2, \dots, A_r$ – простые неабелевы группы.

Кроме того, доказано, что решетка $L_{c_p}(\mathbf{F})$ имеет конечное число атомов (теорема 2), а также найдено описание атомов решетки c_p (теорема 3).

Схема доказательства теоремы 1 представлена следующими леммами.

Лемма 1 (теорема [9]). Пусть $\mathbf{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathbf{F}_i$ для некоторых формаций $\mathcal{F}_i$ таких, что $\pi(\mathcal{F}_i) \cap \pi(\mathcal{F}_j) = \emptyset$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация $\mathcal{F}$ r -композиционна в том и только в том случае, когда r -композиционна каждая из формаций $\mathcal{F}_i$.

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольная совокупность групп. Тогда

$Q(\mathcal{X}) = (G \mid \text{существует } H \in \mathcal{X} \text{ и эпиморфизм } H \text{ на } G)$;

$R_0(\mathcal{X}) = (G \mid \text{существует } N_i (G, G/N_i \in \mathcal{X}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, t \text{ и } N_1 \dots N_t = 1)$.

Лемма 2 (лемма 1.2.22 [1]). Для любой совокупности групп $\mathcal{X}$ справедливо равенство

$$\text{form } \mathcal{X} = QR_0(\mathcal{X})$$

Лемма 3 (лемма 2.4 [3]). Справедливо равенство $QR_0Q = QR_0$.

Класс групп $\mathcal{F}$ называется *полуформацией*, если $\mathcal{F} = Q\mathcal{F}[1]$.

Лемма 4 (лемма 1.2.21 [1]). Пусть $\mathcal{F}$ – полуформация, порожденная совокупностью групп $\mathcal{X}$. Тогда

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{X}.$$

Неединичная группа G называется *монолитической*, если в ней имеется единственная минимальная нормальная подгруппа (монолит группы G) [4].

Лемма 5 (лемма 12 [12]). Пусть A – монолитическая группа с неабелевым монолитом R , $\mathcal{M}$ – некоторая полуформация и $A \in c_p \text{form } \mathbf{M}$. Тогда $A \in \mathcal{M}$.

Цоколем группы G называется подгруппа, обозначаемая символом $\text{Soc}(G)$, которая является произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G .

Теорема 2. Пусть $\mathbf{F} = c_p \text{form } G$ – однопорожденная r -композиционная формация. Тогда у решетки $L_{c_p}(\mathbf{F})$ имеется лишь конечное число атомов.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ – атом решетки $L_{c_p}(\mathbf{F})$. Тогда $\mathbf{M} = c_p \text{form } A$ для некото-

рой простой группы A . Пусть A – неабелева группа. Так как $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$, то $A \in \mathbf{F} = c_p \text{form } G$.

Тогда, согласно лемме 2,

$$c_p \text{form } (G) = c_p \text{form}(\text{form } (G)) = c_p \text{form}(QR_0(G)).$$

В силу леммы 3

$$\begin{aligned} c_p \text{form}(QR_0(G)) &= c_p \text{form}(QR_0Q(G)) = \\ &= c_p \text{form}(Q(R_0Q(G))) = c_p \text{form}(Q(R_0(Q(G)))) = \\ &= c_p \text{form}(Q(R_0\mathcal{L})) = c_p \text{form}(QR_0\mathcal{L}), \end{aligned}$$

где, согласно лемме 4, $\mathcal{L} = Q(G)$ – полуформация, порожденная группой G . Ввиду леммы 2 имеет место равенство

$$c_p \text{form}(QR_0\mathcal{L}) = c_p \text{form}(\text{form } \mathcal{L}) = c_p \text{form } \mathcal{L}.$$

Итак, $A \in c_p \text{form } \mathcal{L}$. Поскольку A – простая группа, то A – монолитическая группа с неабелевым монолитом $\text{Soc}(A) = A$. Следовательно, по лемме 5 $A \in \mathcal{L} = Q(G)$. Это означает, что в решетке $L_{c_p}(\mathbf{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть $|A| = p$ – простое число, где $p \in \pi = \pi(G)$. Заметим, что класс всех π -групп $\mathcal{J}_\pi$ является r -композиционной формацией. Поэтому из $A \in \mathcal{J}_\pi$ следует

$$\mathcal{M} = c_p \text{form } A \subseteq \mathcal{J}_\pi.$$

Но π – конечное множество. Поэтому в $\mathcal{J}_\pi$ имеется лишь конечное число r -композиционных подформаций, порожденных простой группой A порядка $p \in \pi = \pi(G)$. Это означает, что в решетке $L_{c_p}(\mathbf{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Теорема доказана.

Лемма 6 (теорема 2 [4]). Пусть $\mathcal{F}$ – формация. Тогда $\mathcal{F}$ – r -композиционна для любого простого p , не принадлежащего $\pi(\text{Com}(\mathcal{F}))$.

Лемма 7 (замечание 1 [4]). Любая r -композиционная формация обладает каноническим r -композиционным спутником.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех r -композиционных спутников формации $\mathcal{F}$. Ввиду леммы 2 [4] $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ – r -композиционный спутник формации $\mathcal{F}$, называемый *минимальным*.

Для произвольной совокупности групп $\mathcal{X}$ полагают [4]

$$\mathbf{X}(C^p) = \begin{cases} \text{form}(G/C^p \mid G \in \mathbf{X}), & \text{если } p \in \pi(\text{Com}(\mathbf{X})), \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \pi(\text{Com}(\mathbf{X})). \end{cases}$$

Если $\mathcal{F} = CF_p(\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}(p') = \mathcal{F}$ и $\mathbf{F}(p) = \bigvee_p \mathcal{F}(C^p)$ для всех $p \in \pi(\text{Com}(\mathcal{F}))$, то спутник $\mathbf{F}$ называется *каноническим r -композиционным спутником* формации $\mathcal{F}$ [4].

Символом $\bigvee_p$ обозначают класс всех p -групп.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{M} = c_p \text{form } A$ – p -композиционная формация, порожденная простой группой A . Тогда формация $\mathcal{M}$ является атомом решетки c_p в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) если A – простая неабелева группа и $|A| \neq p$, то $\mathcal{M} = \text{form } A$;
- 2) если $|A| = p$, то $\mathcal{M} = \mathcal{N}_p$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{M} = c_p \text{form } A$ – атом решетки c_p . Если $|A| = p$, то $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{M}$ в силу того, что $A \in \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ – атом, то $\mathcal{N}_p = \mathcal{M}$. Если A – неабелева группа и $|A| \neq p$, то по лемме 6 формация $\text{form } A$ является p -композиционной. Значит, $\text{form } A = c_p \text{form } A = \mathcal{M}$.

Достаточность. Ясно, что формация $\mathcal{M} = c_p \text{form } A$ (A – простая группа) является атомом решетки c_p .

Покажем, что в случае $|A| = p$ атом $\mathcal{M}$ решетки c_p совпадает с формацией $\mathcal{N}_p$. Предположим от противного, что $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}_p$. По лемме 5 [4] формация $\mathcal{M}$ обладает минимальным p -композиционным спутником f . Тогда если $p \in \pi(\mathcal{M})$, то в силу леммы 7 выполняется включение $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{N}_p f(p) = F(p) \subseteq \mathcal{M}$, где F – канонический p -композиционный спутник формации $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ – атом, то $\mathcal{N}_p = \mathcal{M}$, противоречие.

Пусть A – простая неабелева группа и $|A| \neq p$. Покажем, что в этом случае атом $\mathcal{M}$ решетки c_p совпадает с формацией $\text{form } A$. Предположим от противного, что $\mathcal{M} \neq \text{form } A$. Поскольку $\mathcal{M} = c_p \text{form } A$, то $A \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\text{form } A \subseteq \mathcal{M}$. Но формация единичных групп (1) – наименьший элемент решетки c_p . Значит, $(1) \subseteq \text{form } A \subseteq \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ – атом, то $\mathcal{M} = \text{form } A$, противоречие. Теорема доказана.

Ясно, что формация $\mathcal{F}$ является композиционной формацией, если она p -композиционна для любого простого p . Поэтому из теоремы 1 мы непосредственно получаем

Следствие (И.В. Близнец, 2002). Пусть $\mathcal{F}$ – композиционная формация, $\mathcal{F} \neq (1)$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) каждый атом решетки $L_c(\mathcal{F})$ дополняем в решетке $L(\mathcal{F})$;
- 2) $\mathcal{F} = \mathcal{N} \otimes \text{form } A_1 \otimes \text{form } A_2 \otimes \dots \otimes \text{form } A_t$, где $A_1, A_2, \dots, A_t$ – простые неабелевы группы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант докторанта М 12–06, № гр. 20120919; грант аспиранта 36/12, № гр. 20121177).

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Белорусская наука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math. / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter & Co., 1992. – Vol. 4. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. Скиба, А.Н. Кратно $\mathcal{L}$ -композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинск. матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельск. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
6. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.
7. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тезисы докл. IX Всесоюз. симпозиума по теории групп. – М., 1984. – С. 101.
8. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. ст. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
9. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n -кратно ω -композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.
10. Мехович, А.П. Прямые разложения τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций / А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 49–53.
11. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathcal{F}$ -subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.
12. Воробьев, Н.Н. Тожества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирск. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.