УДК 512.542

Композиционные формации с условием дополняемости

Н.Н. Воробьев*, А.П. Мехович**

**Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»*

***Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»*

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных* $i, j \in I$ *имеет место* $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. *Символом* $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ *обозначают (А.Н. Скиба, 1997) класс всех групп вида* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, *где* $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, …, $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ *для некоторых* $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ *через* $L(\mathfrak{F})$ *обозначают решетку всех подформаций формации* $\mathfrak{F}$. *Если же* $\mathfrak{F}$ *– p-композиционная формация, то через* $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *обозначают решетку всех p-композиционных подформаций p-композиционной формации* $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе описаны p-композиционные формации, у которых каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *дополняем в решетке* $L(\mathfrak{F})$. *В частности, доказана следующая*

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– p-композиционная формация,* $\mathfrak{F} \neq (1)$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *дополняем в решетке* $L(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \otimes \mathrm{form}\, A_1 \otimes \mathrm{form}\, A_2 \otimes \ldots \otimes \mathrm{form}\, A_t$, *где* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *– простые неабелевы группы.*

Ключевые слова: *p-композиционная формация, дополняемая подформация, атом решетки, прямое разложение классов групп, решетка всех формаций, решетка всех p-композиционных формаций.*

Composition formations with complementability condition

N.N. Vorobyev*, A.P. Mekhovich**

**Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»*

***Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»*

All groups considered are finite. Let $\{\mathfrak{F}_i \mid i$ ™ $I\}$ *be a system of non-empty classes of groups such that* $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ *for all distinct* i, j ™ I. *The symbol* $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ *denotes (A.N. Skiba, 1997) the class of groups* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, *where* $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, …, $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ *for some* $i_1, i_2, \ldots, i_t$ ™ I.

Let $\mathfrak{F}$ *be a formation. The symbol* $L(\mathfrak{F})$ *denotes the lattice of all subformations of* $\mathfrak{F}$. *If* $\mathfrak{F}$ *is a p-composition formation, then the symbol* $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *denotes the lattice of all p-composition subformations of* $\mathfrak{F}$.

In this paper p-composition formations such that every atom of $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *is complemented in* $L(\mathfrak{F})$ *are described. In particular, we prove the following theorem.*

Theorem. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a p-composition formation,* $\mathfrak{F} \neq (1)$. *The following conditions are equivalent:*

1) every atom of the lattice $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *is complemented in the lattice* $L(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \otimes \mathrm{form}\, A_1 \otimes \mathrm{form}\, A_2 \otimes \ldots \otimes \mathrm{form}\, A_t$, *where* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *are simple nonabelian groups.*

Key words: *p-composition formation, complemented subformation, atom of a lattice, direct decomposition of classes of groups, the lattice of all formations, the lattice of all p-composition formations.*

Все рассматриваемые нами группы конечны. Используется стандартная терминология [1–4].

Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

В теории решеток классов групп многие исследования связаны с изучением дополняемых подформаций. Понятие дополняемой подформации введено в работе А.Н. Скибы [5], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают form $\mathfrak{X}$ и называют *формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$. В частности, пишут form G в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Всякая формация такого вида называется *однопорожденной формацией* [1]. Подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется *дополняемой* в $\mathfrak{F}$ [5], если $\mathfrak{M}$ дополняема в решетке подформаций формации $\mathfrak{F}$, т.е. если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (*дополнение* к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}) \text{ и } \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1).$$

Изучение формаций с системами дополняемых подформаций проводилось в работах многих других авторов (см., в частности, [1, 6–8]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла конструкция прямого разложения классов групп.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная система непустых классов групп такая, что для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Следуя [1], через $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ мы обозначаем класс всех групп вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, …, $A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$. В частности, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$, то пишем $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_t$. Такая конструкция ранее изучалась в работах [9–10]. Всякое представление класса групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ называется *прямым разложением* этого класса. Заметим, что впервые конструкция прямого разложения классов групп возникла в [3, определение 17.6]. В неявном виде данная конструкция использовалась в [6; 8] (см. также [2, с. 670]). Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении ряда открытых вопросов теории групп и при построении формаций с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим работы [8; 11], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля–Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций $\mathfrak{F}$, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп каждой конечной группы образует подрешетку решетки всех подгрупп группы и монографию А.Н. Скибы [1], где прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых задач теории формаций конечных групп.

Пусть p – некоторое простое число, тогда символ p' обозначает множество всех простых чисел, отличных от p. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из совокупности групп $\mathfrak{X}$. Символами $R_p(G)$, $C^p(G)$ обозначаются соответственно наибольшая нормальная разрешимая p-подгруппа группы G и пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в группе G нет таких факторов). Через $\mathfrak{N}$, $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают соответственно класс всех нильпотентных групп и класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \{p,\ p'\} \to \{\text{формации групп}\}. \quad (*)$$

Следуя [4], сопоставим функции f вида $(*)$ класс групп

$$CF_p(f) = (G \mid G/R_p(G) \in f(p') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_p(f)$ для некоторой функции f вида $(*)$, то $\mathfrak{F}$ называется *p-композиционной формацией* с *p-композиционным спутником* f [4].

Элемент a решетки с нулем L называется *атомом*, если для любого $x \in L$ из $0 < x \le a$ следует, что $x = a$ (т.е. если a *покрывает* наименьший элемент 0).

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ через $L(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если же $\mathfrak{F}$ – p-композиционная формация, то через $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ обозначают решетку всех p-композиционных подформаций p-композиционной формации $\mathfrak{F}$. Символ c_p обозначает решетку всех p-композиционных формаций.

Целью данной работы является описание p-композиционных формаций, у которых каждый атом решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ дополняем в решетке $L(\mathfrak{F})$. На пути достижения поставленной цели доказана следующая

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – *p-композиционная формация,* $\mathfrak{F} \ne (1)$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) *каждый атом решетки* $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ *дополняем в решетке* $L(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \otimes \text{form}\, A_1 \otimes \text{form}\, A_2 \otimes \ldots \otimes \text{form}\, A_t$, *где* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *– простые неабелевы группы.*

Кроме того, доказано, что решетка $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ имеет конечное число атомов (теорема 2), а также найдено описание атомов решетки c_p (теорема 3).

Схема доказательства теоремы 1 представлена следующими леммами.

Лемма 1 (теорема [9]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\otimes}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$ *таких, что* $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ *для всех различных* $i, j \in I$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ p*-композиционна в том и только в том случае, когда* p*-композиционна каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп. Тогда

$\mathrm{Q}(\mathfrak{X}) = (G \mid$ существует $H \in \mathfrak{X}$ и эпиморфизм H на G);

$\mathrm{R}_0(\mathfrak{X}) = (G \mid$ существует N_i (G, $G/N_i \in \mathfrak{X}$, где $i = 1, 2, \ldots, t$ и N_1 I … I $N_t = 1$).

Лемма 2 (лемма 1.2.22 [1]). *Для любой совокупности групп* $\mathfrak{X}$ *справедливо равенство*

$$\text{form}\, \mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{X})$$

Лемма 3 (лемма 2.4 [3]). *Справедливо равенство* $\mathrm{QR_0Q} = \mathrm{QR_0}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *полуформацией*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\mathfrak{F}$ [1].

Лемма 4 (лемма 1.2.21 [1]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– полуформация, порожденная совокупностью групп* $\mathfrak{X}$. *Тогда*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Q}(\mathfrak{X}).$$

Неединичная группа G называется *монолитической*, если в ней имеется единственная минимальная нормальная подгруппа (*монолит* группы G) [4].

Лемма 5 (лемма 12 [12]). *Пусть* A *– монолитическая группа с неабелевым монолитом* R, $\mathfrak{M}$ *– некоторая полуформация и* $A \in c_p\text{form}\, \mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Цоколем группы G называется подгруппа, обозначаемая символом $\mathrm{Soc}(G)$, которая является произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = c_p\text{form}\, G$ – однопорожденная p-композиционная формация. Тогда у решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число атомов.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_{c_p}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = c_p\text{form}\, A$ для некоторой простой группы A. Пусть A – неабелева группа. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $A \in \mathfrak{F} = c_p\text{form}\, G$. Тогда, согласно лемме 2,

$$c_p\text{form}\,(G) = c_p\text{form}(\text{form}\,(G)) = c_p\text{form}(\mathrm{QR}_0(G)).$$

В силу леммы 3

$$c_p\text{form}(\mathrm{QR}_0(G)) = c_p\text{form}(\mathrm{QR_0Q}(G)) =$$
$$= c_p\text{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R_0Q}(G))) = c_p\text{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_0(\mathrm{Q}(G)))) =$$
$$= c_p\text{form}(\mathrm{Q}(\mathrm{R}_0\mathfrak{H})) = c_p\text{form}(\mathrm{QR}_0\mathfrak{H}),$$

где, согласно лемме 4, $\mathfrak{H} = \mathrm{Q}(G)$ – полуформация, порожденная группой G. Ввиду леммы 2 имеет место равенство

$$c_p\text{form}(\mathrm{QR}_0\mathfrak{H}) = c_p\text{form}(\text{form}\mathfrak{H}) = c_p\text{form}\mathfrak{H}.$$

Итак, $A \in c_p\text{form}\mathfrak{H}$. Поскольку A – простая группа, то A – монолитическая группа с неабелевым монолитом $\mathrm{Soc}(A) = A$. Следовательно, по лемме 5 $A \in \mathfrak{H} = \mathrm{Q}(G)$. Это означает, что в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть $|A| = p$ – простое число, где $p \in \pi = \pi(G)$. Заметим, что класс всех π-групп $\mathfrak{G}_\pi$ является p-композиционной формацией. Поэтому из $A \in \mathfrak{G}_\pi$ следует

$$\mathfrak{M} = c_p\text{form}\, A \subseteq \mathfrak{G}_\pi.$$

Но π – конечное множество. Поэтому в $\mathfrak{G}_\pi$ имеется лишь конечное число p-композиционных подформаций, порожденных простой группой A порядка $p \in \pi = \pi(G)$. Это означает, что в решетке $L_{c_p}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Теорема доказана.

Лемма 6 (теорема 2 [4]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация. Тогда* $\mathfrak{F}$ *-* p*-композиционна для любого простого* p*, не принадлежащего* $\pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$.

Лемма 7 (замечание 1 [4]). *Любая* p*-композиционная формация обладает каноническим* p*-композиционным спутником.*

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех p-композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2 [4] $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ – p-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным*.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ полагают [4]

$$\mathfrak{X}(C^p) = \begin{cases} \text{form}(G/C^p \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X})). \end{cases}$$

Если $\mathfrak{F} = CF_p(F)$, где $F(p') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(C^p)$ для всех $p \in \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F}))$, то спутник F называется *каноническим* p*-компози-ционным спутником* формации $\mathfrak{F}$ [4].

Символом $\mathfrak{N}_p$ обозначают класс всех p-групп.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{M} = c_p\mathrm{form}A$ *– p-композиционная формация, порожденная простой группой A. Тогда формация* $\mathfrak{M}$ *является атомом решетки* c_p *в том и только в том случае, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) *если A – простая неабелева группа и* $|A| \neq p$, *то* $\mathfrak{M} = \mathrm{form}A$;

2) *если* $|A| = p$, *то* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{M} = c_p\mathrm{form}A$ – атом решетки c_p. Если $|A| = p$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ в силу того, что $A \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – атом, то $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$. Если A – неабелева группа и $|A| \neq p$, то по лемме 6 формация $\mathrm{form}A$ является p-композиционной. Значит,

$$\mathrm{form}A = c_p\mathrm{form}A = \mathfrak{M}.$$

Достаточность. Ясно, что формация $\mathfrak{M} = c_p\mathrm{form}A$ (A – простая группа) является атомом решетки c_p.

Покажем, что в случае $|A| = p$ атом $\mathfrak{M}$ решетки c_p совпадает с формацией $\mathfrak{N}_p$. Предположим от противного, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}_p$. По лемме 5 [4] формация $\mathfrak{M}$ обладает минимальным p-композиционным спутником f. Тогда если $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то в силу леммы 7 выполняется включение $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{M}$, где F – канонический p-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – атом, то $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$, противоречие.

Пусть A – простая неабелева группа и $|A| \neq p$. Покажем, что в этом случае атом $\mathfrak{M}$ решетки c_p совпадает с формацией $\mathrm{form}A$. Предположим от противного, что $\mathfrak{M} \neq \mathrm{form}A$. Поскольку $\mathfrak{M} = c_p\mathrm{form}A$, то $A \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathrm{form}A \subseteq \mathfrak{M}$. Но формация единичных групп (1) – наименьший элемент решетки c_p. Значит, $(1) \subseteq \mathrm{form}A \subseteq \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – атом, то $\mathfrak{M} = \mathrm{form}A$, противоречие. Теорема доказана.

Ясно, что формация $\mathfrak{F}$ является композиционной формацией, если она p-композиционна для любого простого p. Поэтому из теоремы 1 мы непосредственно получаем

Следствие (И.В. Близнец, 2002). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– композиционная формация,* $\mathfrak{F} \neq (1)$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) *каждый атом решетки* $L_c(\mathfrak{F})$ *дополняем в решетке* $L(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{N} \otimes \mathrm{form}\,A_1 \otimes \mathrm{form}\,A_2 \otimes \ldots \otimes \mathrm{form}\,A_t$, *где* $A_1, A_2, \ldots, A_t$ *– простые неабелевы группы*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант докторанта М 12–06, № гр. 20120919; грант аспиранта 36/12, № гр. 20121177).

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Doerk, K. Finite soluble groups. De Gruyter Expo. Math. / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter & Co., 1992. – Vol. 4. – 891 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
4. Скиба, А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинск. матем. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.
5. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельск. семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
6. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.
7. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – М., 1984. – С. 101.
8. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. ст. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
9. Воробьев, Н.Н. Прямые разложения n-кратно ω-композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.П. Мехович // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 26–29.
10. Мехович, А.П. Прямые разложения τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций / А.П. Мехович // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 49–53.
11. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal groups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Pérez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 148, № 1. – P. 42–52.
12. Воробьев, Н.Н. Тождества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирск. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.

Поступила в редакцию 05.09.2012. Принята в печать 22.10.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: amekhovich@yandex.ru – Мехович А.П.