УДК 517.925

Отражающая функция и условия центра одного уравнения в полярных координатах

П.П. Вересович
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение вида $\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2(a_2\rho^2+a_1\rho+a_0)/(b_2\rho^2+b_1\rho+b_0)$. *Это уравнение представляет в полярных координатах двумерную автономную дифференциальную систему. Указанная система имеет центр в начале координат тогда и только тогда, когда рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет только периодические решения в окрестности своего тривиального решения. Проблема «центра-фокуса» решалась с использованием отражающей функции Мироненко для рассматриваемого уравнения. С этой целью установлены необходимые и достаточные условия, при которых отражающая функция нашего уравнения имеет вид* $F(\varphi,\rho)=m(\varphi)\rho/(1+n(\varphi)\rho)$. *Для получения этих условий использовалось основное соотношение для отражающей функции.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, отражающая функция, центр.*

Reflecting function and conditions of the center for an equation in polar coordinates

P.P. Veresovich
Educational establishment «Gomel State Francisk Skorina University»

In the paper we consider the differential equation of the form $\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2(a_2\rho^2+a_1\rho+a_0)/(b_2\rho^2+b_1\rho+b_0)$. *This equation represens a two-dimensional autonomous differential system in polar coordinates. This system has center in the origin if and only if the considered equation has only periodic solutions in the neighborhoods of its zero-solution. We solved the «center-focus» problem for the system using Mironenko reflecting function for the equation under consideration. For this reason we established the conditions, under winch the equation has reflecting function of the form* $F(\varphi,\rho)=m(\varphi)\rho/(1+n(\varphi)\rho)$. *In order to get these conditions we used the main relation for the reflecting function.*

Key words: *differential equation, reflecting function, center.*

Решение проблемы различения центра и фокуса при качественном исследовании двумерных полиномиальных дифференциальных систем приводит к уравнению в полярных координатах. Если все решения этого уравнения периодические, то соответствующая изолированная особая точка исследуемой системы является центром. Методы исследования существования периодических решений дифференциальных уравнений и систем с периодической правой частью связаны с отображением за период или отображением Пуанкаре [1–2]. Но построение отображения Пуанкаре по определению требует знания общего решения дифференциальной системы в форме Коши. Мы будем пользоваться методом отражающей функции Мироненко [2–4], который в некоторых случаях позволяет получить информацию об отображении за период.

1. Предварительные результаты. В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения об отражающей функции.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x),\quad t\in R,\quad x\in D\subset R^n, \tag{1.1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Пусть функция $\varphi(t;t_0,x_0)$ есть общее решение системы (1.1).

Определение ([2, с. 62], [4, с. 11]). *Отражающей функцией системы (1.1) названа функция* $F:D\to R^n$, *определяемая формулой* $F(t,x)=\varphi(-t;t,x)$ *или иначе формулами* $F(t,x)=\varphi_{(-t,t)}(x)=\varphi(-t;0,\varphi(0;t,x))$.

Для отражающей функции справедливы свойства ([2, с. 63], [4, с. 11]): *2) для отражающей функции* F *любой системы выполнены тождества* $F(-t,F(t,x))\overset{t,x}{\equiv}F(0,x)\equiv x$;

3) дифференцируемая функция $F:D\to R^n$ будет отражающей функцией системы (1.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X\left(t,x\right)+X\left(-t,F\right)=0 \qquad (1.2)$$

и начальному условию $F\left(0,x\right)\equiv x$.

Соотношение (1.2) названо В.И. Мироненко основным соотношением для отражающей функции.

Лемма ([2, с. 65], [4, с. 12]). *Пусть правая часть системы (1.1) 2ω-периодична по t, а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Тогда отображение за период $\left[-\omega;\omega\right]$ для системы (1.1) можно найти по формуле $\varphi(\omega;-\omega,x)=F(-\omega;x)$ и поэтому решение $\varphi(t;-\omega,x)$ рассматриваемой системы будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда x есть решение недифференциальной системы $F[-\omega,x]=x$.*

Более подробные сведения об отражающей функции можно найти на сайте http:// reflecting-function.narod.ru.

2. Основные результаты. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho^2\frac{a_2\rho^2+a_1\rho+a_0}{b_2\rho^2+b_1\rho+b_0}, \qquad (2.1)$$

в котором $a_j=a_j(\varphi), b_j=b_j(\varphi),\ j=1,2,3,$ есть 2ω-периодические непрерывные функции. Такие уравнения возникают при решении проблемы центра-фокуса двумерных автономных систем с полиномиальными правыми частями.

В дальнейшем для любой функции $f(t)$ будем считать $f=f(\varphi),\ \bar f=f(-\varphi),\ f'=\dfrac{df}{d\varphi}.$

Отражающую функцию уравнения (2.1) будем искать в виде

$$F(\varphi,\rho)=\frac{m(\varphi)\rho}{1+n(\varphi)\rho}\,. \qquad (2.2)$$

Из второго свойства отражающей функции следует $m(0)=1,\ n(0)=0.$

Лемма 2.1. *Функция (2.2) будет отражающей функцией уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда $m(\varphi)\equiv 1$, а для функции $n(\varphi)$ и коэффициентов уравнения (2.1) выполняются тождества*

$$\begin{aligned}
&b_0\bar b_0 n'-a_0\bar b_0+\bar a_0 b_0\equiv 0,\\
&(b_0\bar b_1+\bar b_0 b_1)n'-((a_1\bar b_0+\bar a_1 b_0)+\\
&\quad+(a_0\bar b_1+\bar a_0 b_1))\equiv 0,\\
&(b_0\bar b_2+b_1\bar b_1+\bar b_0 b_2)n'+(b_0\bar b_1+2\bar b_0 b_1)nn'-\\
&\quad-((a_2\bar b_0+\bar a_2 b_0)+\\
&\quad+(a_1\bar b_1+\bar a_1 b_1)+(a_0\bar b_2+\bar a_0 b_2)+\\
&\quad+(2(a_1\bar b_0+\bar a_0 b_1)+(a_1\bar b_0+\bar a_1 b_0))n)\equiv 0,\\
&(b_1\bar b_2+\bar b_1 b_2)n'+(b_1\bar b_1+2\bar b_0 b_2)nn'+\\
&\quad+\bar b_0 b_1 n^2 n'-((a_2\bar b_1+\bar a_2 b_1)+\\
&\quad+(a_1\bar b_2+\bar a_1 b_2)+(2(a_2\bar b_0+\bar a_0 b_2)+\\
&\quad+(a_1\bar b_1+\bar a_1 b_1))n+(a_1\bar b_0+\bar a_0 b_1)n^2)\equiv 0,\\
&b_2\bar b_2 n'+\bar b_1 b_2 nn'+\bar b_0 b_2 n^2 n'-((a_2\bar b_2+\bar a_2 b_2)+\\
&\quad+(a_2\bar b_1+\bar a_1 b_2))n+(a_2\bar b_0+\bar a_0 b_2)n^2)\equiv 0.
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $F(\varphi,\rho)$ – отражающая функция уравнения (2.1), то для нее выполняется основное соотношение (1.2), в нашем случае принимающее вид

$$\frac{m'\rho(1+n\rho)-n'm\rho^2}{(1+n\rho)^2}+\frac{m}{(1+n\rho)^2}\times$$
$$\times\rho^2\frac{a_2\rho^2+a_1\rho+a_0}{b_2\rho^2+b_1\rho+b_0}+\left(\frac{m\rho}{1+n\rho}\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{\bar a_2(m\rho)^2+\bar a_1\rho(1+n\rho)+\bar a_0(1+n\rho)^2}{\bar b_2(m\rho)^2+\bar b_1\rho(1+n\rho)+\bar b_0(1+n\rho)^2}\right)=0.$$

После приведения к общему знаменателю и приравнивания к нулю многочлена числителя при первой степени ρ получаем $b_0\bar b_0 m'\equiv 0.$ Отсюда $m'=0$ и, значит, m = 1. С учетом этого факта равенство нулю коэффициентов при оставшихся степенях ρ приводит к тождествам (2.3). Лемма доказана.

Справедлива

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия леммы (2.1), функция b_0 обращается в нуль лишь в изолированных точках, в которых функция $s(\tau)=\dfrac{a_0(\tau)}{b_0(\tau)}$ доопределена до непрерывной при любых τ. Тогда $n(\varphi)=\int_{-\varphi}^{\varphi}s(\tau)d\tau$, а для функции n и коэффициентов уравнения (2.1) выполняются тождества*

$$\begin{aligned}
&\bar b_0^{\,2}(a_1 b_0-a_0 b_1)n+b_0^{\,2}(\bar a_2\bar b_0-\bar a_0\bar b_2)+\\
&+\bar b_0^{\,2}(a_2 b_0-a_0 b_2)+b_0 b_1(\bar a_1\bar b_0-\bar a_0\bar b_1)+\\
&+\bar b_0\bar b_1(a_1 b_0-a_0 b_1)\equiv 0,\\
&(b_0^{\,2}(\bar a_0\bar b_2-\bar a_2\bar b_0)+\bar b_0^{\,2}(a_2 b_0-a_0 b_2))n+\\
&+b_0 b_1(\bar a_2\bar b_0-\bar a_0\bar b_2)+\bar b_0\bar b_1(a_2 b_0-a_0 b_2)+\\
&+b_0 b_2(\bar a_1\bar b_0-\bar a_0\bar b_1)+\bar b_0\bar b_2(a_1 b_0-a_0 b_1)\equiv 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&b_0^{\,2}(\bar a_1 \bar b_0 - \bar a_0 \bar b_1) + \bar b_0^{\,2}(a_1 b_0 - a_0 b_1) \equiv 0,\\
&\bar b_0^{\,2}(a_2 b_0 - a_0 b_2)n^2 + (\bar b_0 \bar b_1 (a_2 b_0 - a_0 b_2) +\\
&+ b_0 b_2 (\bar a_1 \bar b_0 - \bar a_0 \bar b_1))n +{}_0\, b_2(\bar a_2 \bar b_0 - \bar a_0 \bar b_2) +\\
&\qquad + \bar b_0 \bar b_2 (a_2 b_0 - a_0 b_2) \equiv 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первого тождества (2.3) находим

$$n(\varphi) = \int_0^{\varphi} \left(\frac{a_0(\tau)}{b_0(\tau)} + \frac{a_0(-\tau)}{b_0(-\tau)} \right) d\tau = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{a_0(\tau)}{b_0(\tau)} d\tau.$$

Заметим, что функция $n(\varphi)$ нечетная в силу четности функции $\dfrac{a_0(\tau)}{b_0(\tau)} + \dfrac{a_0(-\tau)}{b_0(-\tau)}$ и условия $n(0)=0$. Из второго тождества (2.3), умноженного на $b_0 \bar b_0$, вычтем умноженное на $b_0 \bar b_1 + \bar b_0 b_1$ первое, получим первое из тождеств (2.4). Третье тождество (2.3) умножим на n и вычтем второе. Полученный результат умножим на b_0 и вычтем умноженное на nb_1 первое из тождеств (2.3). После умножения полученного тождества на $\bar b_0$ и вычитания из него умноженного на $(b_0 \bar b_2 + b_1 \bar b_1 + \bar b_0 b_2)$ первого из тождеств (2.3) приходим ко второму тождеству (2.4). Четвертое тождество (2.3) умножим на b_0 и вычтем умноженное на $b_1 n^2$ первое тождество (2.3). Из полученного тождества, умноженного на $\bar b_0$, вычитаем первое тождество (2.3), умноженное на $(2\bar b_0 b_2 + b\bar b_1)n + b_1 \bar b_2 + b_2 \bar b_1$. Вычитая из полученного тождества умноженное на n второе тождество (2.4), приходим к третьему тождеству (2.4). Пятое тождество из (2.3) умножим на b_0 и вычтем умноженное на $b_2 n^2$ первое тождество (2.3). Умножением полученного тождества на $\bar b_0$ и вычитанием умноженного на $\bar b_1 b_2 n + b_2 \bar b_2$ первого тождества (2.3) получаем четвертое тождество (2.4). Лемма доказана.

С использованием леммы 2.2 доказана

Теорема. *Пусть для 2ω-периодических коэффициентов уравнения (2.1) выполнены условия леммы 2.2 и $n(\varphi)$ является 2ω-периодической. Тогда отражающая функция уравнения (2.1) задается формулой (2.2), а уравнение (2.1) имеет центр в начале координат.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий теоремы отражающая функция уравнения (2.1) имеет вид $F(\varphi,\rho) = \dfrac{\rho}{1+n(\varphi)\rho}$, где $n(\varphi)$ есть 2ω-периодическая нечетная функция, причем $n(\omega)=0$, так как $n(-\omega) = -n(\omega)$ в силу нечетности, и $n(-\omega) = n(\omega)$ в силу 2ω-периодичности. Последнее означает что отображение, за период $[-\omega, \omega]$, определяемое равенством $F(-\omega,\rho) = \dfrac{\rho}{1+n(\omega)} = \rho$, есть тождественное для всех ρ из малой окрестности начала координат. Поэтому все решения уравнения (2.1), расположенные вблизи тривиального, будут 2ω-периодическими, что означает наличие центра в начале координат. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1975. – С. 209 с.
2. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель, 2004. – С. 59.
3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.
4. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

Поступила в редакцию 25.06.2012. Принята в печать 22.10.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: PiotrVeres@gmail.com – Вересович П.П.