УДК 512.542

Об одном применении теории критических формаций

В.М. Селькин
Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F}$ не содержатся в $\mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации формации $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Используя теорию минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций в данной работе доказано, что все ω-насыщенные подформации ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ являются наследственными формациями тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^n_\omega \mathfrak{N}$.

Ключевые слова: *минимальные наследственные ω-насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации, минимальная не $\mathfrak{H}$-группа, монолитическая группа.*

About one application of the theory critical formations

V.M. Selkin
Educational establishment «Gomel State University named after Francisk Skorina»

A formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal τ-closed ω-saturated non $\mathfrak{H}$-formation, if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ but the class of groups $\mathfrak{H}$ contains each proper τ-closed ω-saturated subformatin of $\mathfrak{F}$. Usin the theory of minimal τ-closed ω-saturated non $\mathfrak{H}$-formation in this wort it has been proved that all ω-local subformations of the ω-local formation $\mathfrak{F}$ are s-closed if and only if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^n_\omega \mathfrak{N}$.

Key words: *minimal hereditary ω-saturated non $\mathfrak{H}$-formation, minimal non $\mathfrak{H}$-group, monolithic group.*

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется общепринятая терминология [1–4].

В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Исходя из [3], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

(1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

(2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеют место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \le \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \le \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{формации групп}\}$$

называется ω-локальным спутником [4]. Если все значения ω-локального спутника f являются τ-замкнутыми формациями, то f называется τ-замкнутым ω-локальным спутником. Символом $LF_\omega \langle f \rangle$ обозначим класс групп $(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ для любого произвольного ω-локального спутника f. Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega \langle f \rangle$, то говорим, что f – ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. В этом случае мы называем $\mathfrak{F}$ ω-насыщенной формацией. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \text{form } (G \,/\, F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \text{ если } p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, \text{ если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

V-спутник формации $\mathfrak{F}$ называется минимальным τ-значным ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$, если $f(\omega') = \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ и $f(p) = \text{form}(\mathfrak{F}(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Символом $\tau^\omega\text{form}(\mathfrak{X})$ обозначаем пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих непустое множество групп $\mathfrak{X}$. В частности, $s^\omega\text{form}(G)$ обозначает пересечение всех наследственных ω-насыщенных формаций, содержащих группу G. Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F}$ не содержатся в $\mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые ω-насыщенные подформации формации $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

Общая теория минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций построена автором в [5–9]. Целью данной работы является применение такой теории для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ – ω*-насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_\omega^n \mathfrak{N}$*;*

(2) всякая ω*-насыщенная подформация из* $\mathfrak{F}$ *является наследственной;*

(3) всякая однопорожденная ω*-насыщенная подформация из* $\mathfrak{F}$ *является наследственной;*

(4) $\mathfrak{F}$ *состоит из разрешимых групп и всякая однопорожденная* ω*-насыщенная подформация из* $\mathfrak{F}$ *нормально наследственна;*

(5) $\mathfrak{F}$ *состоит из разрешимых групп и всякая* ω*-насыщенная подформация из* $\mathfrak{F}$ *нормально наследственна.*

В работе [5] нами доказана следующая базисная теорема.

Теорема 2. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной* τ*-замкнутой* ω*-насыщенной не* $\mathfrak{N}^2$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = \tau^\omega \mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая* $\bar{\tau}$*-минимальная не* $\mathfrak{N}^2$*-группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathfrak{N}^2}$*, что либо* P *– неабелева группа, и при* $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$*,* G *–* $\bar{\tau}$ *-минимальная не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$*-группа, причем* $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$*, либо* $G = [P]H$*, где* $P = C_G(P)$ *– абелева* p*-группа, и при* $p \in \omega$ H *– такая монолитическая* $\bar{\tau}$*-минимальная не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$*-группа с монолитом* $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$*, что* $Q \not\subseteq \Phi(H)$ *и* p *не делит* $|Q|$*.*

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{F} = \tau^\omega \mathrm{form}(\mathfrak{X})$*,* f *– минимальный* τ*-значный* ω*-локальный* V*-спутник формации* $\mathfrak{F}$*, то справедливы следующие утверждения:*

(1) $f(\omega') = \tau \mathrm{form}(G / O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$*;*

(2) $f(p) = \tau \mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p \in \omega$*;*

(3) $\mathfrak{F} = LF_\omega < g >$*, где* $g(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $g(p) = f(p)$ *при всех* $p \in \omega$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. доказательство леммы 5 [4].

Лемма 2 (см. 17.6 [10]). *Если* P *– минимальная нормальная подгруппа группы* G*,* $P \not\subseteq \Phi(G)$ *и* P *является абелевой группой, то* $G = P[H]$*, где* $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G)$ *для некоторого простого числа* p*.*

Теорема 3. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной наследственной* ω*-насыщенной не* $\mathfrak{N}^2$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = s^\omega \mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая минимальная не* $\mathfrak{N}^2$*-группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathfrak{N}^2}$*, что*

(1) $P = G$ *– простая неабелева группа и при всяком* $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$*, группа* G *является минимальной не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$*-группой;*

(2) $G = [P]H$*, где* $P = C_G(P)$ *–* p*-группа при некотором простом* p *и* $H = [Q]N$*, где* $Q = C_H(Q)$ *–* q*-группа при некотором простом* $q \neq p$*, являющаяся монолитом группы* H*. При этом* H *является минимальной не* $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$*-группой, если* $p \in \omega$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Необходимость.</u> Пусть для любой группы G $\tau(G)$ обозначает множество всех подгрупп группы G. Тогда ввиду теоремы 2 $\mathfrak{F} = s^\omega \mathrm{form}(G)$, где G – такая минимальная не $\mathfrak{N}^2$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{N}^2}$, что либо P – неабелева группа, и при $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$, G – минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группа, причем $P = G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p-группа, и при $p \in \omega$ H – такая монолитическая минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группа с монолитом $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Поскольку у группы G каждая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{N}^2$, то $P = G$ – простая неабелева группа. Кроме того, поскольку $G \neq H$, то H – разрешимая группа, и поэтому ее монолит Q абелев. Теперь, применяя лемму 2, получаем, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Достаточность вытекает из теоремы 2.

Следствие 1. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной наследственной* ω*-насыщенной не* $(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N})$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = s^\omega \mathrm{form}(G)$*, где* G *– такая минимальная не* $(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N})$*-группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}}$*, что*

(1) $P=G$ – простая неабелева группа и при всяком $p\in\pi=\pi(G)\cap\omega$, группа G является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой;

(2) $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – p-группа при некотором простом p и $H=[Q]N$, где $Q=C_H(Q)$ – q-группа при некотором простом $q\neq p$, являющаяся монолитом группы H. При этом H является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой, если $p\in\omega$, и если $p\notin\omega$, то $H=Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 3 $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной наследственной ω-насыщенной не $(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N})$-формацией, когда $\mathfrak{F}=s^\omega\mathrm{form}(G)$, где G – такая минимальная не $(\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N})$-группа с нефраттиниевым монолитом $P=G^{\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}}$, что

1) $P=G$ – простая неабелева группа и при всяком $p\in\pi=\pi(G)\cap\omega$, группа G является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой;

2) $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – p-группа при некотором простом p и $H=[Q]N$, где $Q=C_H(Q)$ – q-группа при некотором простом $q\neq p$, являющаяся монолитом группы H, при этом H является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой, если $p\in\omega$.

Заметим, что если $PQ<G$, то $PQ\subseteq\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$, где $PQ\notin\mathfrak{N}$, и поэтому при $p\notin\omega$ имеем $H=Q$.

Достаточность вытекает из теоремы 2.

Лемма 3 (лемма 10 [4]). *Пусть $\mathfrak{F}=l_n^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ и f – минимальный l_{n-1}^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) $f(\omega')=l_{n-1}^\omega\mathrm{form}(G/O_\omega(G)\mid G\in\mathfrak{X})$;

(2) $f(p)=l_{n-1}^\omega\mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p\in\omega$;

(3) $\mathfrak{F}=LF_\omega(g)$, где $g(\omega')=\mathfrak{F}$ и $g(p)=f(p)$ при всех $p\in\omega$.

Теорема 4. *Пусть группа $G=MN$, где подгруппа N нормальна в G, $N\in(\mathfrak{N}_\omega)^n\mathfrak{N}$. Тогда подгруппа $M\in l_n^\omega\mathrm{form}(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f – минимальный l_{n-1}^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}=l_n^\omega\mathrm{form}(G)$. Для доказательства теоремы проведем индукцию по $|G|+n$. Пусть L – неединичная подгруппа группы G. Тогда

$$G/L=(NL/L)/ML/L).$$

При этом имеет место

$$NL/L\simeq N/(L\cap N)\in(\mathfrak{N}_\omega)^n\mathfrak{N}.$$

Значит, по индукции

$$M/(M\cap L)\simeq ML/L\in\mathfrak{F}.$$

Следовательно, если в G имеются две минимальные нормальные подгруппы L и R, то

$$M\simeq((M/(M\cap L))\cap(M\cap R)\in\mathfrak{F},$$

и теорема верна.

Пусть L – единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Понятно, что мы можем положить $L\subseteq N$. Если N – нильпотентная группа, то поскольку $MF(G)=G$, то ввиду теоремы 2.3 [1]

$$M\in\mathrm{form}(G)\subseteq\mathfrak{F}.$$

Пусть подгруппа N ненильпотентна и $F=F(N)$. Поскольку F – характеристическая подгруппа в N, то F нормальна в G. Поэтому $L\subseteq F$. Кроме того, поскольку по условию теоремы $N\in(\mathfrak{N}_\omega)^n\mathfrak{N}$, то $N^{\mathfrak{N}}\in(\mathfrak{N}_\omega)^n$. Это, в частности, означает, что L является ω-группой. Допустим, что F не является примарной группой. Тогда поскольку силовские подгруппы характеристичны в F, то она нормальна в G. Значит, в G имеются по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы. Полученное противоречие показывает, что F – примарная группа.

Пусть $\pi(F)=\{p\}$ и $p\in\omega$. Тогда

$$F=O_p(N)\subseteq O_p(G).$$

Кроме того, понятно, что $O_{p'}(G)=1$. Значит, $F_p(G)=O_p(G)$.

Пусть $D=O_p(G)N$. Тогда

$$D/O_p(G)=O_p(G)N/O_p(G)\simeq$$

$$\simeq N/(N\cap O_p(G))=N/F\in\mathfrak{N}_\omega^n\mathfrak{N}.$$

Значит, $D\in(\mathfrak{N}_\omega)^n\mathfrak{N}$ и $G=DM$. Так как

$$G/O_p(G)=(D/O_p(G))(DO_p(G)/O_p(G)),$$

то

$$M/M\cap O_p(G)\simeq$$

$$\simeq MO_p(G)/O_p(G)\in\mathrm{form}(G/O_p(G))=$$

$$=\mathrm{form}(G/F_p(G))\subseteq f(p).$$

Но тогда согласно теореме 2 [11]

$$M\in\mathfrak{N}_pf(p)\subseteq\mathfrak{F}.$$

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 4.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна.

Предположим. что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}_\omega^n\mathfrak{N}$. Значит, ввиду теоремы 1 [9] в $\mathfrak{F}$ существует минимальная наследственная ω-насыщенная не $(\mathfrak{N}_\omega^n\mathfrak{N})$-подформация $\mathfrak{M}$. Тогда ввиду следствия 1 $\mathfrak{M} = s^{\omega}\mathrm{form}(G)$, где G – такая минимальная не $(\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N})$-группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{\mathfrak{N}_{\omega}\mathfrak{N}}$, что

1) $P = G$ – простая неабелева группа и при всяком $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$, группа G является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p-группа при некотором простом p и $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – q-группа при некотором простом $q \neq p$, являющаяся монолитом группы H, при этом H является минимальной не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{N})$-группой, если $p \in \omega$, и если $p \notin \omega$, то $H = Q$.

Рассмотрим случай, когда $P = G$ – простая неабелева ω'-группа. Тогда ввиду теоремы 1 [8] формация $\mathfrak{M}$ является s^{ω}-неприводимой и ее максимальная наследственная ω-насыщенная подформация $\mathfrak{M}_1$ имеет внутренний наследственный ω-локальный спутник m_1 такой, что

$$m_1(a) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega, \\ \mathrm{sform}(\mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных подгрупп группы G.

Учитывая, что у формации $\mathfrak{F}$ все ее собственные ω-насыщенные подформации наследственные, имеем

$$\mathfrak{M} = s^{\omega}\mathrm{form}(G) = l^{\omega}\mathrm{form}(G).$$

Предположим, что τ – тривиальный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(A) = A$, для любой группы A. Применяя вновь теорему 1 [8] к формации $\mathfrak{M}_1$, видим, что

$$m_1(\omega') = \mathrm{form}(G/P) = (1).$$

Значит, $\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = (1)$. Следовательно, каждая подгруппа из $\mathfrak{X}$ является единичной, и поэтому G – группа простого порядка. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{\omega}^{n}\mathfrak{N}$. Аналогично проверяются все остальные случаи.

Импликации 4) $\Rightarrow$ 1) и 5) $\Rightarrow$ 1) доказываются таким же образом. Теорема доказана.

Следствие 1 [12]. *Формация $\mathfrak{F}$ нильпотентна, если каждая ее подформация наследственна.*

Следствие 2 [12]. *Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ метанильпотентна, когда каждая ее локальная подформация наследственна.*

Следствие 3. *Тогда и только тогда группа G есть расширение некоторой своей нильпотентной ω-подгруппы с помощью нильпотентной группы, когда в формации $l^{\omega}\mathrm{form}\ (G)$ нормально наследственны все ее ω-локальные подформации.*

Следствие 4. *Тогда и только тогда разрешимая группа G есть расширение своей силовской подгруппы с помощью нильпотентной группы, когда в формации $l\mathrm{form}_p(G)$ нормально наследственны все ее p-локальные подформации.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Shemetkov, L.A. Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114 –147.
5. Селькин, В.М. О минимальных τ-замкнутых ω-локальных не метанильпотентных формациях / В.М. Селькин // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 184–188.
6. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω-локальных формаций / В.М. Селькин // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5(32). – С. 166–168.
7. Селькин, В.М. О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1996. – № 5. – С. 59–81.
8. Селькин, В.М. Формации с единственной максимальной τ-замкнутой ω-локальной подформацией / В.М. Селькин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. – 2002. – № 1. – С. 25–29.
9. Селькин, В.М. Про існування мінімальних τ-замкнених ω-насичених не $\mathcal{H}$-формацій / В.М. Селькин // Український математичний журнал. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 572–576.
10. Doerk, K. Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin– N. Y.: Walter de gruyter, 1992. – 889 p.
11. Шеметков, Л.А. О частично локальных формациях конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1995. – № 39. – С. 394–395.
12. Скиба, А.Н. Характеризация конечных метанильпотентных групп / А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 1980. – Т. 27, № 3. – С. 345–351.

Поступила в редакцию 31.01.2012. Принята в печать 20.02.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.