

Об одном применении теории критических формаций

В.М. Селькин

Учреждение образования «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Формация F называется минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной не H -формацией, если $F \not\subseteq H$, но все собственные τ -замкнутые ω -насыщенные подформации формации F содержатся в H . Используя теорию минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных не H -формаций в данной работе доказано, что все ω -насыщенные подформации ω -насыщенной формации F являются наследственными формациями тогда и только тогда, когда $F \subseteq N_{\omega}^*N$.

Ключевые слова: минимальные наследственные ω -насыщенные не H -формации, минимальная не H -группа, монолитическая группа.

About one application of the theory critical formations

V.M. Selkin

Educational establishment «Gomel State University named after Francisk Skorina»

A formation F is called a minimal τ -closed ω -saturated non H -formation, if $F \not\subseteq H$ but the class of groups H contains each proper τ -closed ω -saturated subformation of F . Using the theory of minimal τ -closed ω -saturated non H -formation in this work it has been proved that all ω -local subformations of the ω -local formation F are s -closed if and only if $F \subseteq N_{\omega}^*N$.

Key words: minimal hereditary ω -saturated non H -formation, minimal non H -group, monolithic group.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется общепринятая терминология [1–4].

В группе G выберем некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Исходя из [3], τ называется подгрупповым функтором, если выполняются следующие условия:

(1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G ;

(2) для любого эпиморфизма и любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеют место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация F называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq F$ для любой группы $G \in F$. Для подгрупповых функторов τ_1 и τ_2 полагают $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G . Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если всегда из того, что $T \in \tau(H)$, $H \in \tau(G)$, следует $T \in \tau(G)$. Символом $\bar{\tau}$ обозначается наименьший замкнутый подгрупповой функтор со свойством $\tau \leq \bar{\tau}$.

Пусть ω – произвольное непустое множество простых чисел. Всякая функция вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \mapsto \{\text{формации групп}\}$$

называется ω -локальным спутником [4]. Если все значения ω -локального спутника f являются τ -замкнутыми формациями, то f назы-

вается τ -замкнутым ω -локальным спутником. Символом $LF_{\omega} < f >$ обозначим класс групп $(G | G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$) для любого произвольного ω -локального спутника f . Пусть $F = LF_{\omega} < f >$, то говорим, что f – ω -локальный V -спутник формации F . В этом случае мы называем F ω -насыщенной формацией. Если при этом все значения f лежат в F , то f будем называть внутренним ω -локальным V -спутником формации F .

Пусть X – произвольная совокупность групп, p – простое число. Тогда полагают

$$X(F_p) = \begin{cases} \text{form}(G/F_p(G) | G \in X), & \text{если } p \in \pi(X); \\ \emptyset, & \text{если } p \notin \pi(X). \end{cases}$$

V -спутник формации F называется минимальным τ -значным ω -локальным V -спутником формации F , если $f(\omega') = \text{form}(G/O_{\omega}(G) | G \in F)$ и $f(p) = \text{form}(F(F_p))$ для всех простых $p \in \omega$. Символом $\tau^{\omega}\text{form}(X)$ обозначаем пересечение всех τ -замкнутых ω -насыщенных формаций, содержащих непустое множество групп X . В частности, $s^{\omega}\text{form}(G)$ обозначает пересечение всех наследственных

ω -насыщенных формаций, содержащих группу G . Формация F называется минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной H -формацией, если F не содержится в H , но все собственные τ -замкнутые ω -насыщенные подформации формации F содержатся в H .

Общая теория минимальных τ -замкнутых ω -насыщенных не H -формаций построена автором в [5–9]. Целью данной работы является применение такой теории для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть F – ω -насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $F \subseteq N_{\omega}^N$;
- (2) всякая ω -насыщенная подформация из F является наследственной;
- (3) всякая однопорожденная ω -насыщенная подформация из F является наследственной;
- (4) F состоит из разрешимых групп и всякая однопорожденная ω -насыщенная подформация из F нормально наследственна;
- (5) F состоит из разрешимых групп и всякая ω -насыщенная подформация из F нормально наследственна.

В работе [5] нами доказана следующая базисная теорема.

Теорема 2. Тогда F в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой ω -насыщенной не N^2 -формацией, когда $F = \tau^{\omega} \text{form}(G)$, где G – такая $\bar{\tau}$ -минимальная не N^2 -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{N^2}$, что либо P – неабелева группа, и при $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$, G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_p N)$ -группа, причем $P = G^{N_p N}$, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и при $p \in \omega$ H – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $(N_p N)$ -группа с монолитом $Q = H^{N_p N}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Лемма 1. Если $F = \tau^{\omega} \text{form}(X)$, f – минимальный τ -значный ω -локальный V -спутник формации F , то справедливы следующие утверждения:

- (1) $f(\omega') = \tau \text{form}(G/O_{\omega}(G) \mid G \in X)$;
- (2) $f(p) = \tau \text{form}(X(F_p))$ для всех $p \in \omega$;
- (3) $F = LF_{\omega} \langle g \rangle$, где $g(\omega') = F$ и $g(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$.

Доказательство. См. доказательство леммы 5 [4].

Лемма 2 (см. 17.6 [10]). Если P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $P \not\subseteq \Phi(G)$ и P является абелевой группой, то $G = P[H]$, где $P = C_G(P) = F(G) = O_p(G)$ для некоторого простого числа p .

Теорема 3. Тогда F в том и только в том случае является минимальной наследственной ω -насыщенной не N^2 -формацией, когда $F = s^{\omega} \text{form}(G)$, где G – такая минимальная не N^2 -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{N^2}$, что

- (1) $P = G$ – простая неабелева группа и при всяком $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$, группа G является минимальной не $(N_p N)$ -группой;
- (2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа при некотором простом p и $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – q -группа при некотором простом $q \neq p$, являющаяся монолитом группы H . При этом H является минимальной не $(N_p N)$ -группой, если $p \in \omega$.

Доказательство. Необходимость. Пусть для любой группы G $\tau(G)$ обозначает множество всех подгрупп группы G . Тогда ввиду теоремы 2 $F = s^{\omega} \text{form}(G)$, где G – такая минимальная не N^2 -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{N^2}$, что либо P – неабелева группа, и при $p \in \pi = \pi(P) \cap \omega$, G – минимальная не $(N_p N)$ -группа, причем $P = G^{N_p N}$, либо $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа, и при $p \in \omega$ H – такая монолитическая минимальная не $(N_p N)$ -группа с монолитом $Q = H^{N_p N}$, что $Q \not\subseteq \Phi(H)$ и p не делит $|Q|$.

Поскольку у группы G каждая собственная подгруппа принадлежит N^2 , то $P = G$ – простая неабелева группа. Кроме того, поскольку $G \neq H$, то H – разрешимая группа, и поэтому ее монолит Q абелев. Теперь, применяя лемму 2, получаем, что F удовлетворяет условиям (1) и (2).

Достаточность вытекает из теоремы 2.

Следствие 1. Тогда F в том и только в том случае является минимальной наследственной ω -насыщенной не $(N_{\omega} N)$ -формацией, когда $F = s^{\omega} \text{form}(G)$, где G – такая минимальная не $(N_{\omega} N)$ -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{N_{\omega} N}$, что

(1) $P = G$ – простая неабелева группа и при всяком $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$, группа G является минимальной не $(N_p N)$ -группой;

(2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа при некотором простом p и $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – q -группа при некотором простом $q \neq p$, являющаяся монолитом группы H . При этом H является минимальной не $(N_p N)$ -группой, если $p \in \omega$, и если $p \notin \omega$, то $H = Q$.

Доказательство. Ввиду теоремы 3 F в том и только в том случае является минимальной наследственной ω -насыщенной не $(N_\omega N)$ -формацией, когда $F = s^\omega \text{form}(G)$, где G – такая минимальная не $(N_\omega N)$ -группа с нефратиниевым монолитом $P = G^{N_\omega N}$, что

1) $P = G$ – простая неабелева группа и при всяком $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$, группа G является минимальной не $(N_p N)$ -группой;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа при некотором простом p и $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – q -группа при некотором простом $q \neq p$, являющаяся монолитом группы H , при этом H является минимальной не $(N_p N)$ -группой, если $p \in \omega$.

Заметим, что если $PQ < G$, то $PQ \subseteq N_\omega N$, где $PQ \notin N$, и поэтому при $p \notin \omega$ имеем $H = Q$.

Достаточность вытекает из теоремы 2.

Лемма 3 (лемма 10 [4]). Пусть $F = I_n^\omega \text{form}(X)$ и f – минимальный I_{n-1}^ω -значный спутник формации F , то справедливы следующие утверждения:

(1) $f(\omega') = I_{n-1}^\omega \text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in X)$;

(2) $f(p) = I_{n-1}^\omega \text{form}(X(F_p))$ для всех $p \in \omega$;

(3) $F = LF_\omega(g)$, где $g(\omega') = F$ и $g(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$.

Теорема 4. Пусть группа $G = MN$, где подгруппа N нормальна в G , $N \in (N_\omega)^n N$. Тогда подгруппа $M \in I_n^\omega \text{form}(G)$.

Доказательство. Пусть f – минимальный I_{n-1}^ω -значный спутник формации $F = I_n^\omega \text{form}(G)$. Для доказательства теоремы проведем индукцию по $|G| + n$. Пусть L – неединичная подгруппа группы G . Тогда

$$G/L = (NL/L)/ML/L.$$

При этом имеет место

$$NL/L \square N/(L \cap N) \in (N_\omega)^n N.$$

Значит, по индукции

$$M/(M \cap L) \square ML/L \in F.$$

Следовательно, если в G имеются две минимальные нормальные подгруппы L и R , то

$$M \square ((M/(M \cap L)) \cap (M \cap R)) \in F,$$

и теорема верна.

Пусть L – единственная минимальная нормальная подгруппа в G . Понятно, что мы можем положить $L \subseteq N$. Если N – нильпотентная группа, то поскольку $MF(G) = G$, то ввиду теоремы 2.3 [1]

$$M \in \text{form}(G) \subseteq F.$$

Пусть подгруппа N ненильпотентна и $F = F(N)$. Поскольку F – характеристическая подгруппа в N , то F нормальна в G . Поэтому $L \subseteq F$. Кроме того, поскольку по условию теоремы $N \in (N_\omega)^n N$, то $N^N \in (N_\omega)^n$. Это, в частности, означает, что L является ω -группой. Допустим, что F не является примарной группой. Тогда поскольку силовские подгруппы характеристичны в F , то она нормальна в G . Значит, в G имеются по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы. Полученное противоречие показывает, что F – примарная группа.

Пусть $\pi(F) = \{p\}$ и $p \in \omega$. Тогда

$$F = O_p(N) \subseteq O_p(G).$$

Кроме того, понятно, что $O_{p'}(G) = 1$. Значит,

$$F_p(G) = O_p(G).$$

Пусть $D = O_p(G)N$. Тогда

$$D/O_p(G) = O_p(G)N/O_p(G) \square$$

$$\square N/(N \cap O_p(G)) = N/F \in N_\omega^n N.$$

Значит, $D \in (N_\omega)^n N$ и $G = DM$. Так как

$$G/O_p(G) = (D/O_p(G))(DO_p(G)/O_p(G)),$$

то

$$M/M \cap O_p(G) \square$$

$$\square MO_p(G)/O_p(G) \in \text{form}(G/O_p(G)) = \text{form}(G/F_p(G)) \subseteq f(p).$$

Но тогда согласно теореме 2 [11]

$$M \in N_p f(p) \subseteq F.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.

Импликация 1) \Rightarrow 2) следует из теоремы 4. Импликация 2) \Rightarrow 3) очевидна.

Предположим, что $F \not\subseteq N_\omega^n N$. Значит, ввиду теоремы 1 [9] в F существует минимальная наследственная ω -насыщенная не $(N_\omega^n N)$ -подфор-

мация M . Тогда ввиду следствия 1 $M = s^\omega \text{form}(G)$, где G – такая минимальная не $(N_\omega N)$ -группа с нефраттиниевым монолитом $P = G^{N_\omega N}$, что

1) $P = G$ – простая неабелева группа и при всяком $p \in \pi = \pi(G) \cap \omega$, группа G является минимальной не $(N_p N)$ -группой;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – p -группа при некотором простом p и $H = [Q]N$, где $Q = C_H(Q)$ – q -группа при некотором простом $q \neq p$, являющаяся монолитом группы H , при этом H является минимальной не $(N_p N)$ -группой, если $p \in \omega$, и если $p \notin \omega$, то $H = Q$.

Рассмотрим случай, когда $P = G$ – простая неабелева ω' -группа. Тогда ввиду теоремы 1 [8] формация M является s^ω -неприводимой и ее максимальная наследственная ω -насыщенная подформация M_1 имеет внутренний наследственный ω -локальный спутник m_1 такой, что

$$m_1(a) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega, \\ s\text{form}(X), & \text{если } a = \omega', \end{cases}$$

где X – множество всех собственных подгрупп группы G .

Учитывая, что у формации F все ее собственные ω -насыщенные подформации наследственные, имеем

$$M = s^\omega \text{form}(G) = l^\omega \text{form}(G).$$

Предположим, что τ – тривиальный подгрупповой функтор, т.е. $\tau(A) = A$, для любой группы A . Применяя вновь теорему 1 [8] к формации M_1 , видим, что

$$m_1(\omega') = \text{form}(G/P) = (1).$$

Значит, $\text{form}(X) = (1)$. Следовательно, каждая подгруппа из X является единичной, и поэтому G – группа простого порядка. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Значит, $F \subseteq N_\omega^n N$. Аналогично проверяются все остальные случаи.

Импликация 4) \Rightarrow 1) и 5) \Rightarrow 1) доказываются таким же образом. Теорема доказана.

Следствие 1 [12]. *Формация F нильпотентна, если каждая ее подформация наследственна.*

Следствие 2 [12]. *Тогда и только тогда формация F метанильпотентна, когда каждая ее локальная подформация наследственна.*

Следствие 3. *Тогда и только тогда группа G есть расширение некоторой своей нильпотентной ω -подгруппы с помощью нильпотентной группы, когда в формации $l^\omega \text{form}(G)$ нормально наследственны все ее ω -локальные подформации.*

Следствие 4. *Тогда и только тогда разрешимая группа G есть расширение своей силовой подгруппы с помощью нильпотентной группы, когда в формации $K\text{form}_p(G)$ нормально наследственны все ее p -локальные подформации.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Белорусская наука, 1997. – 240 с.
4. Shemetkov, L.A. Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Matem. Trudy. – 1999. – № 2. – P. 114–147.
5. Селькин, В.М. О минимальных τ -замкнутых ω -локальных не метанильпотентных формациях / В.М. Селькин // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 184–188.
6. Селькин, В.М. Об одной проблеме теории ω -локальных формаций / В.М. Селькин // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2005. – № 5(32). – С. 166–168.
7. Селькин, В.М. О наследственных критических формациях / В.М. Селькин, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1996. – № 5. – С. 59–81.
8. Селькин, В.М. Формации с единственной максимальной τ -замкнутой ω -локальной подформацией / В.М. Селькин // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. – 2002. – № 1. – С. 25–29.
9. Селькин, В.М. Про існування мінімальних τ -замкнених ω -насычених не H -формаций / В.М. Селькин // Український математичний журнал. – 2010. – Т. 62, № 4. – С. 572–576.
10. Doerk, K. Finite soluble group / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
11. Шеметков, Л.А. О частично локальных формациях конечных групп / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1995. – № 39. – С. 394–395.
12. Скиба, А.Н. Характеризация конечных метанильпотентных групп / А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 1980. – Т. 27, № 3. – С. 345–351.

Поступила в редакцию 31.01.2012. Принята в печать 20.02.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: vselkin@gsu.by – Селькин В.М.