УДК 512.542

О структуре классов Фиттинга, определяемых подгруппами Холла

В.В. Шпаков

Учреждение образования «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова»

В теории формаций хорошо известна своими приложениями для изучения свойств подгрупп Холла конструкция класса $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ *всех тех групп, холловская* π*-подгруппа которых принадлежит локальной формации* $\mathtt{X}$*. Блессенолем было установлено, что класс* $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ *является локальной формацией для любой локальной формации* $\mathtt{X}$*. В теории классов Фиттинга дуальный класс был определен в работах Хаука: как класс* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *всех тех групп, холловская* π*-подгруппа которых принадлежит классу Фиттинга. В дальнейшем класс* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *нашел широкое применение в решении ряда задач теории конечных разрешимых групп. В частности, Бризон посредством класса* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *описал* $\mathtt{F}$ *-радикалы холловых подгрупп, а Кусак посредством решеточных объединений и класса* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *определил для нормальных классов Фиттинга критерий замкнутости относительно холловых* π*-подгрупп. Получено описание структуры класса* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *для новых семейств частично разрешимых классов Фиттинга.*

Ключевые слова: *подгруппа Холла, класс Фиттинга, радикал, класс Локетта.*

On the structure of Fitting classes defined by Hall subgroups

V.V. Shpakov

Educational establishment «Vitebsk State University named after P.M. Masherov»

The construction of $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ *class of all the groups, the Hall* π*-subgroup of which belongs to the local* $\mathtt{X}$ *formation, is well known in the theory of formations by its supplements for the study of the properties of Hall subgroups. Blessenohl found out that* $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ *class is a local formation for any local* $\mathtt{X}$ *formation. In the theory of Fitting classes the dual class was defined in the works by Hauck as* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *class of all the groups, the Hall* π*-subgroup of which belongs to a Fitting class. Further,* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *class was widely used in solution of a number of problems of the theory of finite soluble groups. Namely, Brison described, by means of* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *class,* $\mathtt{F}$*-radicals of Hall subgroups, while Cusack defined, by means of frame junctures and* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *class, criterion of locking in relation to Hall* π*-subgroups for normal Fitting classes. The description of the structure of* $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ *class for new families of partially soluble Fitting classes is obtained.*

Key words: *Hall subgroup, Fitting class, radical, Lockett class.*

Задача исследования классов групп посредством свойств прямых произведений радикалов и корадикалов групп тесно переплетается с задачей изучения свойств самих групп и канонических подгрупп. В этом направлении ряд содержательных результатов в классе $\mathtt{S}$ всех разрешимых групп был посвящен описанию структуры холловых подгрупп, а также конструированию классов Фиттинга, определяемых свойствами холловых подгрупп.

В 1973 году Локетт определяет и описывает строение инъекторов групп для класса $\mathrm{L}_{\pi}(\mathtt{X})$ всех групп, $\mathtt{X}$-инъекторы которых содержат некоторую холлову π-подгруппу этих групп [1]. Заметим, что в теории формаций хорошо известна своими приложениями для изучения свойств подгрупп Холла конструкция класса $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ всех тех групп, холловская π-подгруппа которых принадлежит локальной формации $\mathtt{X}$. В 1975 году Блессенолем было установлено, что класс $\mathrm{B}_{\pi}(\mathtt{X})$ является локальной формацией для любой локальной формации $\mathtt{X}$ [2].

В теории классов Фиттинга аналогичная конструкция была определена Хауком [3] в 1978 году. Хаук определил класс $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ всех тех групп, холловская π-подгруппа которых принадлежит классу Фиттинга. Известно, что класс $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$ является классом Фиттинга [4]. Ряд работ Бризона [5–6], Кусака [6], Хаука [7] содержат ключевые результаты, связанные с описанием свойств и структуры класса $\mathrm{K}_{\pi}(\mathtt{F})$. Вместе с тем вопрос описания структуры классов Фиттинга, определяемых подгруппами Холла, остается открытым. Целью настоящей работы является описание структуры новых семейств классов Фиттинга, определяемых подгруппами Холла.

Необходимые сведения. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения $\mathfrak{F}$-нормальных подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G [4], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Произведением классов Фиттинга [4] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см. например IX.1.12 [4]).

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется холловой π-подгруппой, если порядок H является π-числом, а индекс H в G – π'-числом. Обозначим через $Hall_\pi(G)$ множество всех холловых π-подгрупп группы G.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$.

Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [9] определил класс $\mathfrak{F}^*$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*}=G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^*=\mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют классом Локетта, если $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^*$.

В работе рассматриваются конечные π-разрешимые группы.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Обозначим через $K_\pi(\mathfrak{F})$ класс всех групп из класса $\mathfrak{S}$ всех конечных π-разрешимых групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}=\varnothing$, то положим $K_\pi(\mathfrak{F})=\varnothing$. В случае, когда $\pi=\varnothing$ и $\pi=\mathbb{P}$, положим $K_\varnothing(\mathfrak{F})=\mathfrak{S}^\pi$ и $K_{\mathbb{P}}(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}$ соответственно.

Лемма 1 [6]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, то* $K_\pi(\mathfrak{F}^*) = (K_\pi(\mathfrak{F}))^*$.

Лемма 2 [10]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* $\mathfrak{H}$ *– радикальный насыщенный гомоморф, то* $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H})^*=\mathfrak{F}^*\cap\mathfrak{H}$.

Лемма 3 [3]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* π *– некоторое множество простых чисел, тогда справедливо включение* $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}\subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$.

Лемма 4 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга, тогда если* $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$, *то* $K_\pi(\mathfrak{F})\subseteq K_\pi(\mathfrak{H})$.

Лемма 5 [9]. *Если* A *– группа операторов группы* $G\in\mathfrak{F}^*$, *то* $[G,A]\subseteq G_{\mathfrak{F}}$. *В частности,* $G/G_{\mathfrak{F}}$ *– абелева.*

Основная часть. В данном разделе описывается структура новых семейств классов Фиттинга, определяемых подгруппами Холла.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* π *– некоторое множество простых чисел. Класс Фиттинга* $K_\pi(\mathfrak{F})=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$ *тогда и только тогда, когда* $K_\pi(\mathfrak{F}^*)=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)^*\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ совпадает с классом $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$, тогда по лемме 1, 2 получим, что

$$K_\pi(\mathfrak{F}^*) = (K_\pi(\mathfrak{F}))^* = ((\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'})^* = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)^*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Пусть теперь

$$K_\pi(\mathfrak{F}^*)=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)^*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Тогда с учетом леммы 3 достаточно будет доказать, что класс Фиттинга $K_\pi(\mathfrak{F})$ содержится в классе Фиттинга $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Предположим противное. Пусть G – группа минимального порядка из разности классов $K_\pi(\mathfrak{F})\ /\ (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$. Тогда факторгруппа G по G' будет p-группой и, следовательно, $G/G'\in\mathfrak{S}_p$ и $G'\subseteq G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}}$. Из того, что группа G не принадлежит классу Фиттинга $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$, следует, что $p\in\pi$. Значит, $G=O^{\pi'}(G)$. Теперь с учетом леммы 4 получаем, что

$$G\in K_\pi(\mathfrak{F}^*) = (\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)^*\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Из этого следует, что

$$G\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)^*.$$

По лемме 5 получим $G'\subseteq G_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi}$. Значит, $G_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi}$ – $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi$-инъектор группы G. Так как $G\in K_\pi(\mathfrak{F})$ и $G_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi}$ – $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi$-инъектор группы G, следовательно, $G_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi}$ содержит холлову π-подгруппу группы G. Так как $|G: G_{\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi}|$ – π'-число, то $G\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$. Полученное противоречие доказывает исходное включение. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi$ *– класс Локетта и* π *– некоторое множество простых чисел. Если существует некоторое простое число* $p\in\pi$ *такое, что* $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_p$ *и* $K_\pi(\mathfrak{F})=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$, *то* $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть G – группа минимального порядка из $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}\setminus(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$. Тогда $|G:G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}|\in\pi'$. Пусть R – регулярное сплетение групп G и C_p. Так $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi$ – класс Локетта, тогда $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}=(G^*)_\mathfrak{F}$, где G^* – база сплетения. Так как $|R:G^*|=p\in\pi$ и $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}\subseteq G^*$, следовательно,

$$R\notin(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Пусть теперь

$$R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_p.$$

Так как $G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$ и $C_p\in\mathfrak{S}_p$, то

$$R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi).$$

С учетом того, что $G_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}$ – $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$-инъектор группы G и теоремы 3.1 [9], получим, что $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}$ – $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$-инъектор группы G^*.

Предположим теперь, что

$$R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p\subset R_0\subseteq R,$$

где $R_0\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$. Тогда

$$R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}\subset R_0\cap G^*\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi).$$

Последнее противоречит тому, что $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}$ – $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$-инъектор группы G^*. Значит, $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p$ – $(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)$-инъектор группы R.

С другой стороны,

$$|R:R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p|=|G^*:R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}|=m^p\in\pi'.$$

Так как $R_{(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)}C_p$ содержит холлову π-подгруппу группы R, то $R\in(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$. Последнее противоречит тому, что $R\notin(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}$. Следовательно, наше предположение неверно и

$$(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)=(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}_\pi)\mathfrak{S}_{\pi'}.$$

Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lockett, P. On the theory of Fitting classes / P. Lockett // Math. Z. – 1973. – Vol. 131, № 3. – P. 103–115.
2. Blessenohl, D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / D. Blessenohl // Math. Z. – 1975. – Vol. 142, № 3. – P. 299–300.
3. Hauck, P. Dissertation / P. Hauck. – Mainz: Johannes Gutenberg-Universitat, 1977.
4. Doerk, K. Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
5. Brison, O. A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / O. Brison // Bull. Austral. Math. Soc. – 1981. – Vol. 3, № 3. – P. 361–365.
6. Brison, O. Hall-closure and products of Fitting classes / O. Brison // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1982. – Vol. 32. – P. 145–164.
7. Cusack, E. Normal Fitting classes and Hall Subgroups / E. Cusack // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – Vol. 21, № 2. – P. 229–236.
8. Hauck, P. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse / P. Hauck // J. Algebra. – 1978. – Vol. 53. – P. 395–401.
9. Lockett, P. Fitting class F* / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.
10. Воробьев, Н.Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Матем. заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–167.

Поступила в редакцию 04.05.2012. Принята в печать 22.10.2012

Адрес для корреспонденции: e-mail: scon@yandex.ru – Шпаков В.В.