УДК 517.9

Сходимость рядов Фурье непрерывно-дифференцируемых функций p-адического аргумента

М.А. Заренок
Белорусский государственный университет

В статье рассматривается вопрос сходимости частичных сумм ряда Фурье Q_p-значных непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на Z_p. Для функций, принадлежащих пространству $C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$ при помощи интеграла Волкенборна, определены коэффициенты Фурье и частичные суммы ряда Фурье. Для введенных частичных сумм ряда Фурье получено представление через свертку функции с индикатором замкнутого шара и показано, что частичные суммы ряда Фурье являются локально постоянными функциями. Основным результатом, представленным в статье, является доказательство теоремы о том, что ряд Фурье функций $f \in C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$ сходится равномерно на Q_p. Также дана оценка скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье непрерывно-дифференцируемых и аналитических функций.

Ключевые слова: *непрерывно-дифференцируемые функции p-адического аргумента, Q_p-значные функции, частичные суммы ряда Фурье, ряд Фурье, сходимость рядов Фурье.*

The convergence of the Fourier series for continuously differentiable functions of p-adic argument

M.A. Zarenok
Belarusian State University

This article discusses the convergence of the partial sum of Fourier series for Q_p -valued continuously differentiable functions on Z_p. The definitions of the partial sums of Fourier series and the Fourier coefficients for functions, which belong to the space $C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$, are defined with the help of the Volkenborn integral. We derived formula for the representation of the partial sums of Fourier series by convolution of the function with the indicator of the closed ball and showed that the partial sums of the Fourier series are locally constant function. For continuously differentiable functions on Z_p it is shown that the Fourier series converges uniformly on Z_p. The article also assesses the speed of convergence of partial sums of Fourier series continuously differentiable and analytic functions.

Key words: *continuously differentiable functions of p-adic argument, Q_p -valued functions, the partial sums of Fourier series, the Fourier series, convergence of the Fourier series.*

Одной из центральных задач гармонического анализа является исследование связи между гладкостью функции и сходимости ее ряда Фурье. Известен ряд результатов, полученных для C-значных функций. Если $f \in C^1(\mathrm{T})$, то ее ряд Фурье сходится равномерно на T. В случае если $f \in C(\mathrm{T})$, то ряд Фурье такой функции сходится почти всюду на T. Сходимость ряда Фурье непрерывных на Z_p функций была рассмотрена М. Тейблесоном [1]. Было доказано, что ряд Фурье таких функций сходится равномерно на Z_p.

В данной статье рассматривается вопрос сходимости ряда Фурье Q_p-значных непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на Z_p. Для функций, принадлежащих пространству $C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$, коэффициенты Фурье и частичные суммы ряда Фурье вводятся при помощи интеграла Волкенборна. Основным полученным результатом является доказательство теоремы о том, что ряд Фурье функций $f \in C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$ сходится равномерно на Z_p. Также дана оценка скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье непрерывно-дифференцируемых и аналитических функций.

Далее будем считать, что функция $f \in C^1(\mathrm{Z}_p \to \mathrm{Q}_p)$, если не оговорено иное.

Определение 1. *Неопределенной суммой функции* $f: Z_p \to Q_p$ *называется функция* Sf, *заданная формулой* $(Sf)(x) = \sum_{j=0}^{x-1} f(j)$ *для* $x \in \mathbf{N}$, *и продолжается по непрерывности на все* $x \in Z_p$ *[2].*

Определение 2. *Интегралом Волкенборна функции* $f \in C^1(Z_p \to Q_p)$ *называется*

$$V\int_{Z_p} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j) = (Sf)'(0) \text{ [2].}$$

Определение 3. *Частичной суммой ряда Фурье функции* $f(t): Z_p \to Q_p$ *будем называть функцию* $(S_N f)(x) = \sum_{|k| \le p^N} f_k \chi_p(kx)$, *где* $k \in Q_p / Z_p$, $\chi_p(x) = \exp(2\pi I\{x\}_p)$ *– аддитивный характер группы* Q_p, *а* $f_k = V\int_{Z_p} f(t)\overline{\chi_p(kt)}dt$.

Основные определения теоремы неархимедового анализа можно найти в [3–4].

Теорема 1. *Частичную сумму ряда Фурье функции* $f \in C^1(Z_p)$ *можно представить в виде* $(S_N f)(x) = p^N V\int_{Z_p} f(t) I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt$, *где* $I_{B[x,p^{-N}]}(x)$ *– индикатор замкнутого шара с центром в точке* x *радиуса* p^{-N}.

Доказательство.

$$(S_N f)(x) = \sum_{|\xi| \le p^N} f_\xi \chi(\xi x) =$$
$$= \sum_{|\xi| \le p^N} \left(\lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)\overline{\chi(\xi k)} \right) \chi(\xi x) =$$
$$= \sum_{|\xi| \le p^N} \left(\lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)\chi(\xi(x-k)) \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{|\xi| \le p^N} \left(\sum_{k=0}^{p^n-1} f(k)\chi(\xi(x-k)) \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} \left(f(k) \sum_{|\xi| \le p^N} \chi(\xi(x-k)) \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} \left(f(k) p^N I_{B[0,p^{-N}]}(x-k) \right) =$$
$$= p^N V\int_{Z_p} f(t) I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt.$$

Следствие 1. *Частичные суммы ряда Фурье функции* $f \in C^1(Z_p \to Q_p)$ *являются локально постоянными и, как следствие, равномерно непрерывными.*

Доказательство. Пусть $x, y \in Z_p$ такие, что $|x-y| \le p^N$. Это значит, что $I_{B[x,p^{-N}]}(t) = I_{B[y,p^{-N}]}(t)$. Тогда

$$|(S_N f)(x) - (S_N f)(y)|_p =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} p^{-n} \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} f(k) I_{B[x,p^{-N}]}(t) - \\ -\lim\limits_{n\to\infty} p^{-n} \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} f(k) I_{B[y,p^{-N}]}(t) \end{array} \right|_p =$$
$$= \left| \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{k=0}^{p^n-1} f(k) \left(I_{B[x,p^{-N}]}(t) - I_{B[y,p^{-N}]}(t) \right) \right|_p = 0.$$

Известно, что любую непрерывную функцию можно представить в виде ряда Малера. В [2, с. 149] доказывается теорема о том, что функции Малера образуют ортонормированный базис пространства непрерывных функций. Для исследования свойств сходимости ряда Фурье произвольной непрерывно-дифференцируемой функции рассмотрим частичные суммы ряда Фурье функции Малера $f(x) = \binom{x}{m}$.

Вычислим интеграл Волкенборна от функции Малера.

Лемма 1. *Имеет место следующая формула*

$$V\int_{Z_p} \binom{p^n x}{m} = \frac{(-1)^m p^n}{m+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f(*) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{*}{k}$, тогда для неопределенной суммы верно равенство $(Sf)(*) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \binom{*}{k}$ [2, с. 155]. В частности, $S\binom{*}{k} = \binom{*}{k+1}$. Отсюда

$$V\int_{Z_p} \binom{p^n x}{m} = \lim_{x\to 0} \frac{(Sf)(p^n x) - (Sf)(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\binom{p^n x}{m+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \frac{p^n x}{m+1} \binom{p^n x - 1}{m} = \frac{p^n}{m+1} \lim_{x\to 0} \binom{p^n x - 1}{m} = \frac{p^n (-1)^m}{m+1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $f: Z_p \ni x \mapsto \binom{x}{m} \in Q_p$. *Тогда*

а) частичная сумма ряда Фурье с номером N *функции* $f(x)$ *определяется формулой*

$$(S_N f)(x)=\binom{x_0+\ldots+x_{N-1}p^{N-1}}{m}+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_0+\ldots+x_{N-1}p^{N-1}}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}; \qquad (2)$$

b) частичные суммы ряда Фурье сходятся к $f(x)$ *равномерно на* Z_p.

Доказательство. а. Известно, что для любого $k\in\mathrm{N}$ верна следующая формула [2, с. 138]

$$\binom{x+y}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{x}{j}\binom{y}{k-j}. \qquad (3)$$

В общем виде частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)=\binom{x}{m}$ определяется формулой

$$(S_N f)(x)=p^N V\int_{\mathrm{Z}_p} f(t)I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\sum_{k=0}^{p^n-1}\binom{k}{m}I_{B[x,p^{-N}]}(k).$$

Вычислим нулевую и N-ю частичные суммы ряда Фурье функции Малера. Пусть $x\in\mathrm{Z}_p$, тогда $x=\sum_{i=0}^{\infty}x_i p^i$. Обозначим через $x_{\{N\}}$ остаток деления числа x на p^N, т.е. $x_{\{N\}}=\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i$, $N\in\mathrm{N}$:

$$(S_0 f)(x)=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\sum_{k=0}^{p^n-1}\binom{k}{m}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\binom{p^n}{m+1}=\lim_{n\to\infty}\binom{p^n-1}{m}=\frac{(-1)^m}{m+1}.$$

$$(S_N f)(x)=p^N V\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{t}{m}I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\sum_{k=0}^{p^n-1}\binom{k}{m}I_{B[x,p^{-N}]}(k)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\left(\binom{x_{\{N\}}}{m}+\binom{x_{\{N\}}+p^N}{m}+\ldots+\binom{x_{\{N\}}+p^N(p^{n-N}-1)}{m}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\left(\sum_{l=0}^{p^{n-N}-1}\sum_{j=0}^{m}\binom{x_{\{N\}}}{j}\binom{lp^N}{m-j}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\left(\sum_{l=0}^{p^{n-N}-1}\left(\binom{x_{\{N\}}}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\binom{lp^N}{m-j}\right)\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\left(p^{n-N}\binom{x_{\{N\}}}{m}+\sum_{l=0}^{p^{n-N}-1}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\binom{lp^N}{m-j}\right)=$$
$$=\binom{x_{\{N\}}}{m}+\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{p^{n-N}-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\binom{lp^N}{m-j}\right)=$$
$$=\binom{x_{\{N\}}}{m}+\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\left(\sum_{l=0}^{p^{n-N}-1}\binom{lp^N}{m-j}\right)=$$
$$=\binom{x_{\{N\}}}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\lim_{n\to\infty}p^{-n+N}\sum_{l=1}^{p^{n-N}-1}\binom{lp^N}{m-j}=$$
$$=\binom{x_{\{N\}}}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}V\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{p^N x}{m-j}dx=$$
$$=\binom{x_{\{N\}}}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_{\{N\}}}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}=\binom{x_0+\ldots+x_{N-1}p^{N-1}}{m}+$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{x_0+\ldots+x_{N-1}p^{N-1}}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}.$$

b. Оценим разность $|f(x)-(S_N f)(x)|_p$ с учетом того, что $\left|\binom{x}{m}\right|_p\le 1$ для любого $m\in\mathrm{N}$ [2].

$$|f(x)-(S_N f)(x)|_p=\left|\binom{\sum_{i=0}^{\infty}x_i p^i}{m}-\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{m}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}\right|_p=$$
$$=\left|\sum_{j=0}^{m-1}\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{j}\binom{\sum_{i=N}^{\infty}x_i p^i}{m-j}+\sum_{j=0}^{m-1}\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}\right|_p\le$$
$$\le\max_{j=\overline{0,m-1}}\left\{\left|\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{j}\binom{\sum_{i=N}^{\infty}x_i p^i}{m-j}\right|_p,\ \left|\binom{\sum_{i=0}^{N-1}x_i p^i}{j}\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}\right|_p\right\}\le$$
$$\le\max_{j=\overline{0,m-1}}\left\{\left|\binom{\sum_{i=N}^{\infty}x_i p^i}{m-j}\right|_p,\left|\frac{(-1)^{m-j}p^N}{m-j+1}\right|_p\right\}\le$$

$$\le \max_{j=\overline{0,m-1}} \left\{ \left| \frac{\sum\limits_{i=N}^{\infty} x_i p^i}{m-j} \binom{\sum\limits_{i=N}^{\infty} x_i p^i - 1}{m-j-1} \right|_p, \left| \frac{(-1)^{m-j} p^N}{m-j+1} \right|_p \right\} \le$$

$$\le \max_{j=\overline{0,m-1}} \left\{ \frac{p^{-N}}{|m-j|_p}, \frac{p^{-N}}{|m-j+1|_p} \right\} =$$

$$= p^{-N} \max_{j=\overline{0,m-1}} \frac{1}{|m-j+1|_p}.$$

Получаем, что для любого $x \in \mathrm{Z}_p$ имеет место предел $|f(x) - (S_N f)(x)|_p \to 0$ при $N \to \infty$. Из этого вытекает равномерная сходимость частичных сумм ряда Фурье функции $f(x) = \binom{x}{m}$ на Z_p.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^1(\mathrm{Z}_p)$. *Тогда ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится равномерно на* Z_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in C^1(\mathrm{Z}_p)$, тогда имеет место разложение функции $f(x)$ в ряд Малера $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m \binom{x}{m}$. Так как ряд Малера сходится равномерно на Z_p, то по формуле (2) частичная сумма ряда Фурье произвольной непрерывно-дифференцируемой функции имеет вид

$$(S_N f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m S_N \binom{x}{m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} f_m \binom{x_0 + \ldots + x_{N-1} p^{N-1}}{m} + \sum_{m=0}^{\infty} f_m r_{N,m}(x),$$

где

$$r_{N,m}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{x_0 + \ldots + x_{N-1} p^{N-1}}{j} \frac{(-1)^{m-j} p^N}{m-j+1}.$$

Очевидно, что для любого $x \in \mathrm{Z}_p$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_m \binom{x_0 + \ldots + x_{N-1} p^{N-1}}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \binom{x}{m} = f(x).$$

С учетом этого факта достаточно оценить сумму $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m r_{N,m}(x)$.

Из теоремы 2 вытекает, что $|r_{N,m}(x)|_p \le \max_{j=\overline{0,m-1}} \{p^{-N} |m-j+1|_p^{-1}\}$ для любого $m \in \mathrm{N}$ и для любого $x \in \mathrm{Z}_p$. А с учетом того, что функции Малера ортогональны на Z_p, можно утверждать, что

$$\left| r_{N,m}(x) \right|_{C(\mathrm{Z}_p)} = \max_{j=\overline{0,m-1}} \left\{ p^{-N} \frac{1}{|m-j+1|_p} \right\}. \qquad (4)$$

Известно, что $f \in C^1(\mathrm{Z}_p)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m \to \infty} m |f_m|_p = 0$ [2]. С учетом предыдущего свойства коэффициентов Малера непрерывно-дифференцируемой функции получаем

$$|R_N(x)|_p = \left| \sum_{m=0}^{\infty} f_m r_{N,m}(x) \right|_p \le$$

$$\le p^{-N} \left| \sum_{m=0}^{\infty} f_m \max_{j=\overline{0,m-1}} \{ |m-j+1|_p^{-1} \} \right|_p = C p^{-N}.$$

Из предыдущего неравенства вытекает, что $R_N(x) \to 0$ при $N \to \infty$, из чего следует доказательство утверждения теоремы.

Далее рассмотрим свойства сходимости рядов Фурье аналитических функций. Так как аналитические функции принадлежат пространству $C^{\infty}(\mathrm{Z}_p) \subset C^1(\mathrm{Z}_p)$, то для данного класса функций верны полученные выше результаты. С другой стороны, частичные суммы ряда Фурье аналитической функции обладают рядом интересных свойств.

Любая аналитическая функция $g(x)$ представима в виде ряда $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} g_k x^k$, поэтому прежде всего вычислим частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) = x^m$, $x \in \mathrm{Z}_p$.

Теорема 4. *Пусть* $f : \mathrm{Z}_p$ е $x \to x^m \in \mathrm{Q}_p$, *тогда имеют место следующие утверждения:*

a) частичная сумма ряда Фурье с номером N *функции* $f(x)$ *определяется формулой*

$$(S_N f)(x) = (x_0 + x_1 p + \ldots + x_{N-1} p^{N-1})^m + \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j (x_0 + \ldots + x_{N-1} p^{N-1})^j (p^N)^{m-j} B_{m-j}; \qquad (5)$$

b) частичные суммы ряда Фурье функции сходятся к $f(x)$ *равномерно на* Z_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а. В общем виде частичная сумма ряда Фурье рассматриваемой функции имеет следующий вид:

$$(S_N f)(x) = p^N V \int_{\mathrm{Z}_p} f(t) I_{B[x, p^{-N}]}(t) dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} p^{-n+N} \sum_{k=0}^{p^n - 1} k^m I_{B[x, p^{-N}]}(k).$$

Вычислим последовательно нулевую и N-ю частичные суммы ряда Фурье функции Малера. Пусть $x \in \mathrm{Z}_p$, тогда $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i$. Обозначим через $x_{\{N\}}$ остаток деления числа x на p^N, т.е. $x_{\{N\}}=\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i$.

$$(S_0 f)(x)=V\int_{\mathrm{Z}_p} f(t)dt=\lim_{n\to\infty} p^{-n}\sum_{k=0}^{p^n-1} k^m = B_m,$$

где B_m – m-е число Бернулли [2]. Для любого $m\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ знаменатель B_m свободен от квадратов, т.е. числа Бернулли удовлетворяют следующему неравенству [2]

$$|B_m|_p \le p. \qquad (6)$$

$$(S_N f)(x)=V\int_{\mathrm{Z}_p} f(t) I_{B[x,p^{-N}]}(t)dt=$$

$$=\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\sum_{k=0}^{p^{n-N}-1} k^m I_{B[x,p^{-N}]}(k)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\begin{pmatrix} x_{\{N\}}^m+(x_{\{N\}}+p^N)^m+(x_{\{N\}}+2p^N)^m+\ldots \\ +(x_{\{N\}}+p^N(p^{n-N}-1))^m \end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\begin{pmatrix} x_{\{N\}}^m+\sum_{j=0}^{m} C_m^j x_{\{N\}}^j\left(p^N\right)^{(m-j)}+\ldots \\ +\sum_{j=0}^{m} C_m^j x_{\{N\}}^j (p^n-p^N)^{m-j} \end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{p^{n-N}-1} x_{\{N\}}^m+\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j\left(p^N\right)^{(m-j)}+\ldots \\ +\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j (p^n-p^N)^{m-j} \end{pmatrix}=$$

$$=x_{\{N\}}^m+\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j\left(p^N\right)^{(m-j)}+\ldots \\ +\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j (p^n-p^N)^{m-j} \end{pmatrix}=$$

$$=x_{\{N\}}^m+\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j\left(\left(p^N\right)^{(m-j)}+\ldots\right.$$

$$\left.+(p^n-p^N)^{m-j}\right)=$$

$$=x_{\{N\}}^m+\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j p^{N(m-j)}\times$$

$$\times(1^{(m-j)}+\ldots+(p^{n-N}-1)^{(m-j)})=$$

$$=x_{\{N\}}^m+\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j p^{N(m-j)}\left(\lim_{n\to\infty} p^{-n+N}\sum_{i=0}^{p^{n-N}-1} i^{m-j}\right)=$$

$$=x_{\{N\}}^m+\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j x_{\{N\}}^j p^{N(m-j)} B_{m-j}=$$

$$=(x_0+x_1p+\ldots+x_{N-1}p^{N-1})^m+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j (x_0+\ldots+x_{N-1}p^{N-1})^j (p^N)^{m-j} B_{m-j}.$$

b. Оценим разность $|f(x)-(S_N f)(x)|_p$ с учетом $|B_m|_p \le p$, $|C_m^j|_p \le 1$ для любого $m\in \mathrm{N}$, $j=\overline{0,m}$ [2]:

$$|f(x)-(S_N f)(x)|_p=\left|\begin{matrix} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i\right)^m-\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^m+ \\ +\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j (p^N)^{m-j} B_{m-j} \end{matrix}\right|_p=$$

$$=\left|\begin{matrix} \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j \left(\sum_{i=N}^{\infty} x_i p^i\right)^{m-j}+ \\ +\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j (p^N)^{m-j} B_{m-j} \end{matrix}\right|_p \le$$

$$\le \max_{j=\overline{0,m-1}}\left\{\begin{matrix} \left|C_m^j \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j \left(\sum_{i=N}^{\infty} x_i p^i\right)^{m-j}\right|_p, \\ \left|C_m^j \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j (p^N)^{m-j} B_{m-j}\right|_p \end{matrix}\right\} \le$$

$$\le \max_{j=\overline{0,m-1}}\left\{\begin{matrix} \left|\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j \left(\sum_{i=N}^{\infty} x_i p^i\right)^{m-j}\right|_p, \\ \left|\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i\right)^j (p^N)^{m-j} p\right|_p \end{matrix}\right\} \le p^{-N}.$$

Получаем, что $|f(x)-(S_N f)(x)|_p \to 0$ при $N\to\infty$. Из этого вытекает равномерная сходимость частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)=x^m$ на Z_p.

Замечание 1. Частичные суммы ряда Фурье степенных функций сходятся быстрее, чем частичные суммы ряда Фурье функций Малера. Скорость сходимости частичных сумм ряда Фурье степенных функций не зависит от значения показателя степени, в то время как скорость сходимости частичных сумм ряда Фурье функций Малера зависит от номера функции.

Следствие 2. *Пусть* $f: Z_p \to Q_p$ *– аналитическая функция, тогда ряд Фурье функции* f *сходится равномерно на* Z_p.

Замечание 2. Как показано выше, ряд Фурье функции $f \in C^1(Z_p)$ сходится равномерно на Z_p, однако сходимости по норме $C^1(Z_p)$ может и не быть. На множестве $C^1(Z_p)$ задана норма

$$\|f(x)\|_{C^1} = \sup_{x \in Z_p} |f(x)|_p + \sup_{x,y \in Z_p, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|_p}{|x-y|_p}.$$

Пусть $f(x) = x$. Из леммы 1 следует, что для любой функции $f \in C^1(Z_p)$ и для любых $x, y \in Z_p$ таких, что $|x-y|_p \leq p^{-N}$, $(S_N f)(x) = (S_N f)(y)$. С учетом этого факта оценим $\|f(x) - (S_N f)(x)\|_{C^1}$.

$$\|f(x) - (S_N f)(x)\|_{C^1} \geq$$

$$\geq \sup_{x,y \in Z_p, x \neq y} \frac{|f(x) - (S_N f)(x) - f(y) + (S_N f)(y)|_p}{|x-y|_p} =$$

$$= [x = 0, y = p^N] = \frac{|f(0) - f(p^N)|_p}{|p^N|_p} = \frac{p^{-N}}{p^{-N}} = 1.$$

Из чего следует, что $\|f(x) - (S_N f)(x)\|_{C^1}$ S 0, при $N \to \infty$. Это означает, что в пространстве $C^1(Z_p)$ существует функция, ряд Фурье которой не сходится по норме $C^1(Z_p)$.

Таким образом, для Q_p-значных непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на Z_p, введены при помощи интеграла Волкенборна коэффициенты Фурье и частичные суммы ряда Фурье. Доказана теорема о том, что ряд Фурье функций $f \in C^1(Z_p \to Q_p)$ сходится равномерно на Z_p. На примере показано, что, несмотря на то, что ряд Фурье функции $f \in C^1(Z_p)$ сходится равномерно на Z_p, сходимости по норме $C^1(Z_p)$ может и не быть. Также дана оценка скорости сходимости частичных сумм ряда Фурье непрерывно-дифференцируемых и аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taibleson, M.H. Fourier analysis on local fields / M.H. Taibleson / Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975. – 294 p.
2. Schikhof, W.H. Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis / W.H. Schikhof. – Cambridge: Cambridge University Press, 1984. – 306 p.
3. Владимиров, В.С. p-адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов. – М.: Физматлит, 1994. – 352 с.
4. Радына, А.Я. Пачаткі неархімедавага аналізу / А.Я. Радына, Я.М. Радына, Я.В. Радына. – Мінск: БДУ, 2010. – 81 с.

Поступила в редакцию 19.01.2012. Принята в печать 20.02.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: zarenokma@gmail.com – Заренок М.А.