Матэматыка

УДК 512.542.6

Инъекторы конечных групп

В.И. Гойко
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого»

В своих работах Локетт, используя класс Фиттинга F конечных разрешимых групп и F-инъекторы, построенные Фишером, Гашюцем, Хартли, определяет класс групп, который состоит из всех тех конечных разрешимых групп G, F-инъекторы которых содержат холловскую π-подгруппу группы G. Им же доказано, что данный класс является классом Фиттинга. Поскольку построение таких классов связано с холловскими подгруппами и F-инъекторами разрешимых групп, то, естественно, что эти результаты изложены для класса конечных разрешимых групп. В дальнейшем П. Германн рассмотрел специальный класс групп, который он обозначил символом $\mathcal{N}(p,q)$ (класс конечных групп без бипримарных минимальных не p-нильпотентных групп), и доказал, что этот класс групп является ненасыщенной формацией Фиттинга. В предыдущих работах В. Гойко доказано существование $\mathcal{N}(p,q)$-инъекторов в произвольных конечных группах и изучены некоторые основные свойства таких инъекторов. В данной работе доказывается, что класс групп, который состоит из всех тех конечных групп G, $\mathcal{N}(p,q)$-инъекторы которых содержат силовскую p-подгруппу группы G (p – простое), является ненасыщенной формацией Фитинга, а также устанавливаются другие свойства таких классов конечных групп с использованием свойств $\mathcal{N}(p,q)$-инъекторов конечных групп.

Ключевые слова: *формация Фиттинга, конечная группа, инъектор, силовская подгруппа.*

Injectors of finite groups

U.I. Hoika
Educational establishment «Gomel State Technical Sukhoy University»

In his works Lockett, using Fitting F class of solvable groups and F-injectors, built up by Fisher, Hashuts, Hartley, and builds up a class of groups which consists of all those finite solvable G groups, F-injectors of which contain Hall's π-subgroup of G group. He also proves that such class is a Fitting class. Since building up of such classes is connected with Hall's subgroups and with F-injectors of solvable groups, it is natural that these results are formulated for the class of finite solvable groups. P. Hermann then considered a special class of groups, which he indicated by the $\mathcal{N}(p,q)$ symbol (class of finite groups without biprimary minimal non p-nilpotent groups) and proved that this class of groups is non saturated Fitting formation. In his previous works U. Hoika proved the existence of $\mathcal{N}(p,q)$-injectors in arbitrary finite groups and studied some basic features of such injectors. In the present paper it is proved that the class of groups which consists of all those finite G groups, $\mathcal{N}(p,q)$-injectors of which contain Sylov's p-subgroup of G group (p is simple), is non saturated Fitting formation; other features of such classes of finite groups using the properties of $\mathcal{N}(p,q)$-injectors of finite groups are established.

Key words: *Fitting formation, finite group, injector, Sylov's subgroup.*

В работе [1] Локетт, используя класс Фиттинга F конечных разрешимых групп и F-инъекторы [2], строит класс групп, который состоит из всех тех конечных разрешимых групп G, F-инъекторы которых содержат холловскую π-подгруппу группы G. Там же [1] доказано, что данный класс является классом Фиттинга. Поскольку построение таких классов связано с холловскими подгруппами и F-инъекторами группы, то, естественно, что эти результаты изложены для класса конечных разрешимых групп. Хорошо известно [3], что для произвольного класса Фиттинга конечных групп F в произвольной конечной группе F-инъекторов не существует. Однако в частично разрешимых конечных группах возможны обобщения (см. работы [4–5]). Кроме того, если в качестве класса F брать некоторые специальные классы групп, то в произвольной конечной группе F-инъекторы могут существовать (см., например, работы [6–12]). В работе [13] П. Германн рассмотрел специальный класс групп (обозначенный символом $\mathcal{N}(p,q)$) и доказал, что этот класс конечных групп является ненасыщенной формацией Фиттинга. В работе [14] доказано существование $\mathcal{N}(p,q)$-инъекторов в произвольной конечной группе и изучены некоторые основные свойства $\mathcal{N}(p,q)$-инъекторов. В данной работе мы рассматриваем класс групп, который состоит из всех тех конечных групп G, $\mathfrak{N}(p,q)$-инъекторы которых содержат силовскую p-подгруппу группы G (p – простое), и изучаем свойства таких классов с использованием свойств $\mathfrak{N}(p,q)$-инъекторов. Приведем некоторые необходимые нам в дальнейшем определения и обозначения.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ – это такой непустой класс конечных групп, для которого выполняются условия: a) если $G \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная в G подгруппа, то $N \in \mathfrak{F}$; b) если M и N – нормальные подгруппы в группе G и $M \in \mathfrak{F}$, $N \in \mathfrak{F}$, то $MN \in \mathfrak{F}$.

Подгруппа H разрешимой группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* [1], если для любой субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathfrak{F}$ и является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в V. Подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$-*максимальной подгруппой* в группе G, если $M \in F$, и из условий $M \subseteq L \subseteq G$, $L \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $M = L$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Символом p всегда обозначаем простое число. Минимальная не p-нильпотентная группа порядка $p^m q^n$ называется (p,q)-*группой* [13] (p, q – различные простые числа, m, n – натуральные числа). В работе [13] через $\mathfrak{N}(p,q)$ обозначен класс конечных групп без (p,q)-подгрупп. Там же доказано, что этот класс является *ненасыщенной формацией Фиттинга, замкнутой относительно подгрупп*. $\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп, $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, $\mathfrak{S}_p$ – класс всех конечных p-групп и $\mathfrak{E}$ – класс всех конечных групп, G_p – силовская p-подгруппа группы G. Через $\langle A, B, \dots, C \rangle$ обозначаем подгруппу, порожденную множествами $A, B, \dots, C$.

Подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{N}(p,q)$-*инъектором* [14], если для любой неединичной субнормальной подгруппы V группы G пересечение $H \cap V \in \mathfrak{N}(p,q)$ и является $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальной подгруппой в группе V. Если наибольшая субнормальная подгруппа V группы G равна 1, то $\mathfrak{N}(p,q)$-*инъектором* группы G называется $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа группы G . Класс $\mathfrak{F}$ называется *Q-замкнутым*, если для любой группы $H \in \mathfrak{F}$ гомоморфный образ группы H также принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *S-замкнутым* (*S_n-замкнутым*), если для любой группы $H \in \mathfrak{F}$ любая ее подгруппа (любая нормальная подгруппа) также принадлежит $\mathfrak{F}$. В работе [14] доказано существование $\mathfrak{N}(p,q)$-*инъекторов* в конечной группе.

Остальные необходимые определения, обозначения и утверждения, которые используются в данной работе, можно найти в [3, 15–18].

Все рассматриваемые в данной работе группы и классы групп берутся из класса всех конечных групп.

Лемма 1. *Подгруппа F группы G тогда и только тогда является $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектором в G, когда F – $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в G и $F \cap M$ – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор в M, где M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. <u>Достаточность.</u> Пусть F – $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в группе G и $F \cap M$ – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор группы M. Возьмем произвольную субнормальную подгруппу S в группе M. Так как $F \cap M$ – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор группы M, то $F \cap M \cap S$ принадлежит классу $\mathfrak{N}(p,q)$ и $F \cap M \cap S$ есть $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в группе S. Ввиду равенства $F \cap M \cap S = F \cap S$ получим, что $F \cap S$ есть $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в группе S. Поскольку $S \lhd\lhd G$, то F – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор группы G. <u>Необходимость</u> очевидна. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор в коммутанте G' группы G, M – $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в G и $F \subseteq M$. Тогда M – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор группы G.*

Доказательство. Пусть D – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор группы G. Применяя [3, глава 9, 1.3(a)] получим, что $D \cap G'$ – $\mathfrak{N}(p,q)$-инъектор в G'. По теореме 2 [14] F и $D \cap G'$ сопряжены в G': $(D \cap G')^x = F$, $D^x \cap G' = F$, $x \in G'$. Отсюда следует, что $F \subseteq D^x$. Кроме того, $F \subseteq M$. Так как D^x, M – две $\mathfrak{N}(p,q)$-максимальные подгруппы в группе *G*, содержащие *F*, то опять применяя теорему 2 [14] получим, что D^x и *M* сопряжены в *G*. Следовательно, $M -$ $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *G*. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть для* $N \lhd G$ *справедливо*: $NL = G$, *где* $L \in \mathscr{N}(p,q)$ *и* $L \cap N$ *–* $\mathscr{N}(p,q)$*-инъектор группы N. Тогда* $L - \mathscr{N}(p,q)$*-инъектор группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G = 1$, то утверждение леммы выполняется тривиально. Пусть $G \neq 1$. Доказываем индукцией по порядку группы *G*. Пусть *M* – произвольная нормальная подгруппа в группе *G*. Допустим, что $L \subset H \in \mathscr{N}(p,q)$. Если $H = G$, то $G \in \mathscr{N}(p,q)$. Ясно, что в этом случае $N \in \mathscr{N}(p,q)$. Так как по условию $L \cap N - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *N*, то $L \cap N = N$. Отсюда получаем, что $N \subseteq L$ и (ввиду условия леммы) $L = G$. В этом случае $L - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *G*. Пусть $H \subset G$. Так как $L \cap N \subseteq H \cap N$ и $H \cap N \lhd H$, то $H \cap N \in \mathscr{N}(p,q)$ и поскольку $L \cap N - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *N*, то $L \cap N -$ $\mathscr{N}(p,q)$ -инъектор группы $H \cap N$ (ввиду теоремы 3 из [14]). Но $H \cap N \in \mathscr{N}(p,q)$. Значит, $L \cap N = H \cap N$. Рассмотрим равенства (используем тождество Дедекинда):

$$H = H \cap G = H \cap LN =$$
$$= L(H \cap N) = L(L \cap N) = L\,.$$

Полученное противоречие доказывает, что $L - \mathscr{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в группе G. Далее покажем, что L есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы G. Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $LM \subset G$. Воспользуемся очевидными равенствами: $LM = LM \cap LN = L(LM \cap N)$ и тем фактом, что $L \cap LM \cap N = L \cap N$ является $\mathscr{N}(p,q)$-инъектором группы *N* (по условию леммы). Так как $(LM \cap N) \cap L \subseteq$ $\subseteq LM \cap N \subseteq N$, то $(LM \cap N) \cap L$ является $\mathscr{N}(p,q)$-инъектором группы $LM \cap N$ (по теореме 3 из [14]). По индукции $L - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *LM*. Так как $M \lhd LM$, то $L \cap M$ – $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *M*. Поскольку *M* – произвольная нормальная подгруппа в группе *G*, то по лемме 1 получим, что *L* является $\mathscr{N}(p,q)$-инъектором группы *G*.

2. $LM = G$. Возьмем такую нормальную подгруппу *N* в группе *G*, что $N \subseteq M$. Далее воспользуемся тождеством Дедекинда и получим: $M = LN \cap M = N(L \cap M)$. Так как $L \cap M \cap N = L \cap N$, то $L \cap M \cap N$ есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *N*. Ввиду индуктивных рассуждений следует, что $L \cap M$ есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *M*. Ввиду леммы 1 следует, что *L* есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор группы *G*.

Лемма 4. *Пусть* $N \lhd G$ *– конечная группа, L – такая подгруппа в G, что* $L \cap N$ *является* $\mathscr{N}(p,q)$*-инъектором в N и пусть выполняется одно из двух условий: a) либо* G/N *– абелева группа и* $L - \mathscr{N}(p,q)$*-максимальная подгруппа в G, b) либо* $LN = G$ *и* $L \in \mathscr{N}(p,q)$*. Тогда L –* $\mathscr{N}(p,q)$*-инъектор в группе G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняется условие *a*). В этом случае из абелевости группы *G/N* получим, что $G' \subseteq N$. Возьмем *F* – $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в G'. По условию $L \cap N$ есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в *N*. Так как $G' \lhd N$, то $L \cap N \cap G'$ есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в G'. Так как $L \cap N \cap G' = L \cap G'$, то $L \cap G'$ есть $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в G'. Ввиду теоремы 2 [14] получим: $L \cap G' = F^x$, $x \in G'$. Очевидно, что $F^x \subseteq L$. Значит, $F^x - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор в G'. Возьмем *D* – $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в *G*. Тогда $D \cap G' - \mathscr{N}(p,q)$-инъектор в G'. Снова ввиду теоремы 2 [14] получим: $(D \cap G')^y = F$, $D^y \cap G' = F$. Ясно, что $F \subseteq D^y$, $F^x \subseteq D^z$, $z = yx \in G'$. Итак, $F^x \subseteq L, F^x \subseteq D^z$. Так как *L* – $\mathscr{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в группе *G* по условию, D^z также $\mathscr{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в *G* (как $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в *G*), а $F^x - \mathscr{N}(p,q)$-максимальная подгруппа в G', то по теореме 2 [14] (пункт 1) получим сопряженность подгрупп D^z, L в группе *G*. Значит, *L* – $\mathscr{N}(p,q)$-инъектор в *G*. Пусть выполняется *b*). В этом случае *L* является $\mathscr{N}(p,q)$-инъектором группы *G* в силу леммы 3. Лемма 4 доказана.

Введем обозначение: $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}(p,q)$. По аналогии с определением класса групп $L_\pi(\mathfrak{F})$ из [1] введем следующий класс групп:

$$L_p(\mathfrak{X}) = \{G : \mathfrak{X} - \text{инъектор } G \text{ содержит } G_p,$$
$$p - \text{простое}, \ p \in \pi(G)\}$$

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) $L_p(\mathfrak{X})$ *– формация Фиттинга, замкнутая относительно подгрупп;*

2) $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_q \subseteq L_p(\mathfrak{X}) = L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$, $q \neq p$;

3) $L_p(L_p(\mathfrak{X})) = L_p(\mathfrak{X})$;

4) следующие утверждения эквивалентны:

a) $\mathfrak{X} = L_p(\mathfrak{X})$;

b) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{G}_q$, $q \neq p$;

c) *в любой конечной группе индекс ее Х-инъектора имеет степень р-числа (р – простое);*

d) $L_p(\mathfrak{X}) = \mathfrak{E}$, $q \neq p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Возьмем произвольную группу $G \in L_p(\mathfrak{X})$. Пусть N – произвольная нормальная подгруппа в G. Покажем, что $N \in L_p(\mathfrak{X})$. В самом деле, если возьмем $\mathfrak{X}$-инъектор F в группе G, то $F \supseteq G_p$ – силовская p-подгруппа в G. Отсюда следует, что $G_p \cap N \subseteq F \cap N$ – $\mathfrak{X}$-инъектор в N (ввиду [3, глава 9, 1.3(a)]). Так как $G_p \cap N = N_p$, то N_p входит в Х-инъектор группы N. Ввиду определения класса $L_p(\mathfrak{X})$ получим $N \in L_p(\mathfrak{X})$.

Возьмем M, N – две произвольные нормальные подгруппы в группе G такие, что $M, N \in L_p(\mathfrak{X})$. Покажем, что $MN \in L_p(\mathfrak{X})$.

В самом деле, возьмем F_1 и F_2 – $\mathfrak{X}$-инъекторы соответственно из M и N. Ясно, что $F_1 \supseteq M_p$, $F_2 \supseteq N_p$. Возьмем $\mathfrak{X}$-инъектор F в группе MN. Ввиду теоремы 2 (пункт 2) из [14] $F \cap M$ сопряжена с F_1, а $F \cap N$ сопряжена с F_2 : $F \cap M = F_1^m \supseteq M_p^m$, $F \cap N = F_2^n \supseteq N_p^n$, $m \in M$, $n \in N$. Отсюда следует, что $F \supseteq M_p^m, F \supseteq N_p^n$. Обозначим: $K = MN$. Далее, применяя лемму 11.6 из [15], получим: $K_p = M_p N_p$, где K_p, M_p, N_p есть силовские p-подгруппы соответственно в группах K, M, N. Далее, используя включение $F \supseteq \langle M_p^m, N_p^n \rangle$ и следующие равенства

$$\left|\langle M_p^m, N_p^n \rangle\right| = \left|\langle M_p, N_p \rangle\right| \geq \left|M_p N_p\right| = \left|K_p\right|,$$

заключаем, что Х-инъектор группы MN содержит силовскую p-подгруппу группы MN. Значит, $MN \in L_p(\mathfrak{X})$. Итак, $L_p(\mathfrak{X})$– класс Фиттинга. Докажем далее замкнутость этого класса относительно подгрупп. Рассмотрим два возможных случая.

А1. Группа G – непростая. Пусть $G \in L_p(\mathfrak{X})$, $H \subset G$. Выберем группу G минимального порядка, для которой утверждение не выполняется. Ввиду равенства $L_p(\mathfrak{X}) = L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ (по пункту 2 теоремы 1). Теперь получим, что $G \in L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$. Возьмем $N \in L_p(\mathfrak{X})$. Тогда $G/N \in \mathfrak{S}_q$. Отсюда следует, что

$$N \supseteq G_p \ . \qquad (1)$$

Так как $N \subset G$, то из включения $N \in L_p(\mathfrak{X})$ по индукции получаем включение $H \cap N \in L_p(\mathfrak{X})$. Возьмем D – $\mathfrak{X}$-инъектор из H. Так как $H \cap N \triangleleft H$, то $D \cap H \cap N$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор из $H \cap N$. Используя очевидное равенство $D \cap H \cap N = D \cap N$, утверждаем, что $D \cap N$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор из $H \cap N \in L_p(\mathfrak{X})$. Значит, $D \cap N \supseteq (H \cap N)_p$. Так как $H \cap N \triangleleft H$ и H_p есть р-силовская из H, то $H_p \cap H \cap N$ – p-силовская из $H \cap N$. Ввиду равенства $H_p \cap H \cap N = H_p \cap N$ получим, что $H_p \cap N$ – p-силовская из $H \cap N$. Из включения $H \cap N \in L_p(\mathfrak{X})$ получим, что $D \cap N \supseteq H_p \cap N$. Из (1) следует $H_p \subseteq N$. Значит, $H_p \cap N = H_p$. Теперь очевидно, что $D \cap N \supseteq H_p$, $H_p \subseteq D$. Следовательно, $H \in L_p(\mathfrak{X})$.

А2. G – простая группа. Из включения $G \in L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ следует включение $G/E \in \mathfrak{S}_q$, где E – единичная группа. Отсюда следует, что $G_p = 1$. Значит, $H_p = 1$. Теперь очевидно, что $\mathfrak{X}$-инъектор из H содержит p-силовскую подгруппу из H. Следовательно, $H \in L_p(\mathfrak{X})$.

Покажем, что класс $L_p(\mathfrak{X})$ – гомоморф. В самом деле, пусть $G \in L_p(\mathfrak{X})$. Возьмем $N \lhd G$. Ввиду пункта 2 теоремы 1 получим: $L_p(\mathfrak{X}) = L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ для всех простых $q \neq p$. Возьмем $N \lhd G$. Так как $N \in L_p(\mathfrak{X})$, то из включения $G/N \in \mathfrak{S}_q$ следует включение $N \supseteq G_p$. Теперь из равенства $N/N = G_pN/N$ (последняя фактор-группа есть силовская p-подгруппа в G/N) получим, что $\mathfrak{X}$-инъектор из фактор-группы G/N содержит силовскую p-подгруппу из G/N. Значит, $G/N \in L_p(\mathfrak{X})$. Замкнутость относительно подпрямых произведений доказывается тривиально. Пункт 1 доказан.

2. Докажем второе утверждение. Включение $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_q$ очевидно. Докажем включение $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_q \subseteq L_p(\mathfrak{X})$. Возьмем группу G из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_q$. Тогда для $N \lhd G$ получим, что $N \lhd \mathfrak{X}$, $G/N \in \mathfrak{S}_q$. Возьмем F – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G. Так как $F \cap N$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор в группе N, то $F \cap N \supseteq N_p = G_p$, т.е. $F \supseteq G_p$. Значит, $G \in L_p(\mathfrak{X})$.

Докажем теперь равенство $L_p(\mathfrak{X}) = L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$. Так как включение $L_p(\mathfrak{X}) \subseteq L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ очевидное, то остается доказать обратное включение. Допустим, что обратное включение не выполняется и возьмем группу G минимального порядка из класса $L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q \setminus L_p(\mathfrak{X})$. Пусть F – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G. Тогда для $N \lhd G$ из включения $G \in L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ следует, что $N \in L_p(\mathfrak{X})$ и $G/N \in \mathfrak{S}_q$. Так как $F \cap N$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор группы N, а $N \in L_p(\mathfrak{X})$, то $F \cap N = N_p$ и, значит, $N_p \subseteq F$. Из включения $G/N \in \mathfrak{S}_q$ следует, что $N \supseteq G_p$. Значит, $F \supseteq G_p$. Следовательно, $G \in L_p(\mathfrak{X})$. Полученное противоречие доказывает необходимое включение. Пункт 2 доказан.

3. Докажем равенство $L_p(L_p(\mathfrak{X})) = L_p(\mathfrak{X})$. Это равенство получим с помощью двухсторонних включений. Возьмем произвольную группу $N \in L_p(\mathfrak{X})$. Очевидно, что $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор группы N есть сама группа N. Следовательно, $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор группы N содержит N_p – силовскую p-подгруппу группы N. Значит, $N \in L_p(L_p(\mathfrak{X}))$. Отсюда теперь следует, что

$$L_p(\mathfrak{X}) \subseteq L_p(L_p(\mathfrak{X})). \qquad (2)$$

Докажем теперь обратное включение. Допустим, что оно не выполняется и возьмем группу G наименьшего порядка из класса $L_p(L_p(\mathfrak{X})) \setminus L_p(\mathfrak{X})$. Пусть M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $L_p(L_p(\mathfrak{X}))$ – класс Фиттинга, то очевидно, что $M \in L_p(L_p(\mathfrak{X}))$. Ввиду индукции $M \in L_p(\mathfrak{X})$. Возьмем $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор H в группе G. Поскольку $H \cap M$ есть $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор в M, то легко видно, что $H \cap M = M$ и, следовательно, $M \subseteq H$. Так как $G \in L_p(L_p(\mathfrak{X}))$, то $G_p \subseteq H$, $G_p = H_p$. Из включений $M \in L_p(\mathfrak{X})$ и $H \in L_p(\mathfrak{X}) = L_p(\mathfrak{X})\mathfrak{S}_q$ следует, что $H/M \in \mathfrak{S}_q$. Значит, $H_p \subseteq M$ и $H_p = M_p$. Из равенства $G_p = H_p$ теперь получим, что $M_p = G_p$. Возьмем теперь $\mathfrak{X}$-инъектор F в группе G. Так как $F \cap M$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор в $M \in L_p(\mathfrak{X})$, то $F \cap M \supseteq M_p = G_p$. Значит, $G \in L_p(\mathfrak{X})$. Полученное противоречие и доказывает требуемое включение. Учитывая (2), получим требуемое равенство. Пункт 3 доказан.

4. Пусть выполняется равенство *a*), т.е. $\mathfrak{X} = L_p(\mathfrak{X})$. По пункту 2 имеем $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_q \subseteq L_p(\mathfrak{X})$. По условию: $L_p(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_q \subseteq \mathfrak{X}$. Так как обратное включение очевидно, то получаем требуемое равенство, т.е. пункт b) выполняется. Пусть теперь выполняется пункт b), т.е. имеет место равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\mathfrak{S}_q$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

A1. G – непростая группа. Возьмем в G максимальную нормальную (собственную) подгруппу M. Так как $F \cap M$ есть $\mathfrak{X}$-инъектор в M, то по индукции получим: $|M : F \cap M| = p^a$. Если $FM \subset G$, то получим:

$$|G:F| = \frac{|G|}{|F|} = \frac{|FM|}{|F|} =$$

$$= \frac{|F| \cdot |M|}{|F \cap M| \cdot |F|} = \frac{|M|}{|F \cap M|} = |M : F \cap M| = p^a .$$

Пусть теперь $FM \subset G$. Так как G/M простая группа, то $\mathfrak{X}$-максимальная подгруппа R/M из G/M является $\mathfrak{X}$-инъектором в G/M (см. определение в [14]). По индукции $|G/M : R/M| = p^b$. Теперь ввиду равенств $\frac{|G/M|}{|R/M|} = \frac{|G|}{|M|} : \frac{|R|}{|M|} = |G:R| = p^b$ получим: $G_q \subseteq R, q \neq p$. Без ограничения общности можно считать, что $FM/M \subseteq RM/M$. Отсюда получим включение $F \subseteq R$. Если $F = R$, то из $|G:R| = p^b$ получим $|G:F| = p^b$. Пусть $F \subset R$. По индукции $|R:F| = p^k$ и, следовательно, $R_q \subseteq F$. Отсюда получим, что $G_q \subseteq F$. Требуемое утверждение в этом случае выполняется.

А2. G – простая группа. Ввиду определения из [14] получим, что наибольшая $\mathfrak{X}$-подгруппа H группы G является $\mathfrak{X}$-инъектором в G. Рассмотрим включение $H \subseteq M$, где M есть максимальная (собственная) подгруппа в G. Допустим, что $H = 1$. По индукции: $|M:H| = p^k$. Следовательно, M – p-группа. Ясно, что все максимальные подгруппы группы G есть силовские p-группы в G. Отсюда следует, что группа G – p-группа и $|G:H| = p^c$ выполняется тривиально. Допустим, что $H \subset M$. Отсюда следует, что $M \notin \mathfrak{X}$. Так как H – $\mathfrak{X}$-инъектор в M, то по индукции $|M:H| = p^k$. Отсюда получим, что $M_q \subseteq H, q \neq p$. Из условия $M \notin \mathfrak{X}$ и определения класса $\mathfrak{X}$ следует, что в M существует нетривиальная (p, q)-группа M_1. Последнее означает, что группа M_1 – бипримарная и минимальная не p-нильпотентная. Значит, в M_1 существует собственная подгруппа M_2 такая, что $((M_2)_q \cap H) \rtimes (M_2)_q$. Теперь ясно, что $(M_2)_q \subseteq H$, $H \cap (M_2)_p \neq 1$. Рассмотрим группу $K = \langle H \cap (M_2)_p, (M_2)_q \rangle$. Ясно, что $((M_2)_p \cap H)(M_2)_q$ – подгруппа в K. Следовательно, $(M_2)_q \lhd ((M_2)_p \cap H)(M_2)_q$. Значит, $K_1 = ((M_2)_p \cap H) \rtimes (M_2)_q$ – p-нильпотентная подгруппа и $K_1 \subseteq H$. Последнее означает, что $H \notin \mathfrak{X}$. Противоречие с тем, что H – $\mathfrak{X}$-инъектор. Полагаем теперь, что $H = M$. Допустим, что существует такая максимальная подгруппа M_1 в группе G, что $M_1 \neq M$, $M_1 \notin \mathfrak{X}$. Возьмем $\mathfrak{X}$-инъектор $H_1 \subset M_1$. Так как H_1 и H сопряжены в G, то H_1 – максимальная в G подгруппа. Противоречие с условием $H_1 \subset M_1$. Значит, все максимальные в G подгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$ и являются в G $\mathfrak{X}$-инъекторами. С другой стороны, так как G не принадлежит $\mathfrak{X}$, то в G существует (p, q)-группа G_1, то есть G_1 – минимальная не p-нильпотентная подгруппа, которая входит в некоторую максимальную подгруппу M_2 группы G. Отсюда получаем, что $M_2 \notin \mathfrak{X}$. Противоречие. Итак, доказали, что из условия b) следует c).

Из c) следует d) очевидно. Пусть выполняется d). Докажем, что будет иметь место a), т.е. выполняется равенство $\mathfrak{X} = L_p(\mathfrak{X})$. Возьмем произвольную группу $H \in L_p(\mathfrak{X})$. Тогда для $\mathfrak{X}$-инъектора V группы H справедливо: $V \supseteq H_p$, где H_p – силовская в H. Далее из включения $H \in L_q(\mathfrak{X})$ получим, что $V \supseteq H_q$ для всех $q \in \pi(H)$, $q \neq p$. Отсюда следует, что $H = V \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $L_p(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. Так как обратное включение очевидно, то получаем требуемое равенство, т.е. a) имеет место. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* G – *конечная группа,* $\pi(G) = \{p, q, \ldots, r\}$, $p, q, \ldots, r$ – *различные простые числа,* F *есть* $\mathfrak{X}$-*инъектор группы* G, $A = \langle G_q, \ldots, G_r \rangle$, $W = \langle F, A \rangle$. *Тогда справедливо утверждение:* W – $L_p(\mathfrak{X})$-*инъектор группы* G *тогда и только тогда, когда* $FA = AF$.

Доказательство. Пусть W – $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор группы G. По теореме 1 (пункт 3) $L_p(\mathfrak{X}) = L_p(L_p(\mathfrak{X}))$. По теореме 1 (пункт 4) получим, что $L_p(\mathfrak{X})$-инъектор группы G имеет индексом степень p-числа. Отсюда следует, что $W \supseteq A$. Так как $F \subseteq W$, то F является $\mathfrak{X}$-инъектором группы W (по теореме 3 из [14]). Следовательно, так как $W \in L_p(\mathfrak{X})$, то

F содержит $W_p - p$-силовскую из W. Теперь видно, что $|F|\cdot|A| \ge |W|$. Поскольку обратное неравенство очевидно, то $W = FA$. Значит, $FA = AF$. Обратно, пусть $FA = AF$. Отсюда получаем равенство $W = FA = AF$. Допустим, что W не является $L_p(\mathsf{X})$-инъектором группы G. Выберем группу G наименьшего порядка с таким свойством (если $G = 1$, то утверждение теоремы выполняется. Поэтому полагаем, что $G \neq 1$). Возьмем произвольную собственную максимальную нормальную подгруппу M в G и силовскую p-подгруппу F_p из F. По лемме 11.6 из [15] получим равенства $W_p = (FA)_p = F_p A_p = F_p$ (здесь использовали очевидное равенство $A_p = \langle 1 \rangle$). Далее рассмотрим следующие равенства:

$$F_p \cap M = W_p \cap M = (W \cap M) \cap W_p = (W \cap M)_p. \qquad (3)$$

Введем обозначение: $\overline{A} = \langle M_q, ..., M_s \rangle$, где $M_q, \dots, M_s$ – силовские подгруппы из M для всех $q \in \pi(M), q \neq p$. Ясно, что $W \cap M \supseteq \overline{A}$. Кроме того, индекс A в W есть степень числа p и $W \cap M = \langle (W \cap M)_p, \overline{A} \rangle$. Применяя (3), получим

$$\langle F \cap M, \overline{A} \rangle \supseteq \langle F_p \cap M, \overline{A} \rangle = \langle (W \cap M)_p, \overline{A} \rangle = W \cap M.$$

С другой стороны, очевидно, что $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle \subseteq W \cap M$. Отсюда следует $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle = W \cap M$. Значит, $F \cap M$ перестановочна с $\overline{A}$. Кроме того, $F \cap M$ – X-инъектор в подгруппе $M \subset G$. По индукции $\langle F \cap M, \overline{A} \rangle = W \cap M$ является $L_p(\mathsf{X})$-инъектором группы M. Покажем теперь, что W является $L_p(\mathsf{X})$ – максимальной подгруппой в группе G. Допустим противное, т.е. $W \subset U \subset G$, где $U - L_p(\mathsf{X})$ – максимальная подгруппа в G. По теореме 3 из [14] F – X-инъектор в подгруппе $U \in L_p(\mathsf{X})$. По определению класса X получим: $F \supseteq U_p$ – силовская из U. Так как $F \subseteq W$, то $U_p \subseteq W$. Далее используем включение: $\langle U_q, \cdots, U_t \rangle \subseteq A \subseteq W$, где $U_q, \dots, U_t$ – все силовские подгруппы из U, кроме U_p. Отсюда следует, что $U \subseteq W$. Полученное противоречие доказывает, что $W - L_p(\mathsf{X})$ – максимальная подгруппа в G. Так как выше показали, что $W \cap M$ является $L_p(\mathsf{X})$-инъектором в собственной максимальной нормальной подгруппе M группы G, то $W - L_p(\mathsf{X})$-инъектор в G. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockett, P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / P. Lockett // Math. Z. – 1973. – B. 131. – S. 103–115.
2. Fischer, B. Injectoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – B. 102. – № 5. – S. 337–339.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawwkes // Walter de Gruyter. – Berlin, 1992.
4. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // в сб. «Конечные группы». – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.
5. Сементовский, В.Г. Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 166–170.
6. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1(15). – С. 5–13.
7. Shemetkov, L.A. Injectjrs in finite groups / L.A. Shemetkov // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 186–187.
8. Vorobiev, N.T. Gaschütz's local method in the theory of Fitting classes of finite soluble groups / N.T. Vorobiev // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3(16). – С. 155–166.
9. Залесская, Е.Н. О новых классах сопряженных инъекторов конечных групп / Е.Н. Залесская // Дискретная математика. – 2004. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 105–113.
10. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56. – P. 516–532.
11. Iranso, M.J. Fitting classes F such that all finite groups have F-injectors / M.J. Iranso, F. Pérez-Monasor // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 56. – P. 97–101.
12. Förster, P. Uber Projektoren und Injektoren in endlichen auflösbaren Gruppen / P. Förster // J. Algebra. – 1977. – B. 49. – S. 606–620.
13. Hermann, P. Groups without certain subgroups form a Fitting class / P. Hermann // Ann. Univ. sci. Budapest. Sec. math. – 1983. – Vol. 26. – P. 183–186.
14. Гойко, В.И. О существовании сопряженного класса инъекторов в конечных группах / В.И. Гойко // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 17–22.
15. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
16. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin–Heidelberg–N. Y., 1967.
17. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
18. Гойко, В.И. Характеристические классы подсистем конечных алгебраических систем / В.И. Гойко. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2005.

Поступила в редакцию 16.01.2012. Принята в печать 20.02.2012
Адрес для корреспонденции: e-mail: stage@tut.by – Гойко В.И.